



## Détermination des incertitudes des surfaces associées

Jérôme Bachmann, Jean Michel Sprauel, Jean-Marc Linares

### ► To cite this version:

Jérôme Bachmann, Jean Michel Sprauel, Jean-Marc Linares. Détermination des incertitudes des surfaces associées. *Mechanics & Industry*, 2002, 3 (3), pp.261-266. hal-01408716

**HAL Id: hal-01408716**

**<https://amu.hal.science/hal-01408716>**

Submitted on 5 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **DETERMINATION DES INCERTITUDES DES SURFACES ASSOCIEES DETERMINATION OF ASSOCIATED SURFACE UNCERTAINTIES**

Jean Marc Linares, Jérôme Bachmann, Jean Michel Sprauel

EA(MS)<sup>2</sup>  
Université de la Méditerranée  
Institut Universitaire de Technologie  
Avenue Gaston Berger  
13625 Aix en Provence Cedex 1

**RESUME/ ABSTRACT :** Sur machine à mesure tridimensionnelle, la fonction pour obtenir la surface associée est basée sur la minimisation de la distance entre le point  $M_i$  palpé et la surface idéale. Cette fonction est non linéaire pour les surfaces usuelles. Pour accélérer les calculs itératifs de nombreux travaux ont linéarisé le problème. Les hypothèses sous-jacentes sont les suivantes : petits déplacements, défaut d'état de surface petit devant les défauts de géométrie et homocédasticité. Dans cet article, nous supprimerons les deux premières hypothèses pour la méthode des moindres carrés grâce à une nouvelle méthode de détermination du vecteur aléatoire constitué par les paramètres de la surface associée suivant un critère d'optimisation.

*The function to obtain associated surface on coordinate measuring machine is based on the minimization of the distance between point measured and ideal surface. This function is nonlinear for usual surfaces. In many works to accelerate iterative calculations, the problem is linearized. The assumptions posed are the following ones: small displacements, defect of surface quality is small in front of the defects of geometry and homocedasticity. In this article, we will remove the first two assumptions for the least squares method thanks to a new method of determination of the random vector.*

**MOTS CLES/ KEY WORDS :** Métrologie tridimensionnelle, Surfaces associées, Incertitude, Optimisation, Moindres carrés, machine à mesurer tridimensionnelle.  
*Metrology, Associated surface, Uncertainty, Optimization, Least squares method, coordinate measuring machine*

## **1. INTRODUCTION**

Dans les années 70, de nombreux travaux ont été réalisés sur l'association de surfaces idéales (modèle mathématique) à un nuage de points issu d'un relevé effectué par une Machine à Mesurer Tridimensionnelle sur une pièce mécanique réelle. La fonction à minimiser est basée sur la distance  $d_i$  entre le point  $M_i$  palpé et la surface idéale ou associée. Le résultat diffère suivant le critère de minimisation choisi (moindres carrées, critère de Chebicheff...). Cette fonction est non linéaire pour les surfaces usuelles (Droite dans l'espace, Plan, Cylindre, Cône, Sphère...). Pour accélérer les calculs itératifs de minimisation, de nombreux travaux ont linéarisé au premier ordre la matrice de déplacement. Aujourd'hui, une grande majorité de logiciels de métrologie emploient cette méthode pour déterminer les paramètres de la surface associée. Les hypothèses attachées à cette méthode imposent que les déplacements soient petits et que la surface mesurée possède un défaut de forme négligeable devant les défauts de géométrie (orientation, position ...). Le moyen de mesure est supposé lui aussi parfait. L'hypothèse d'homocédasticité présage que tous les points  $M_i$  sont acquis avec la même variance.

Dans cet article et pour l'emploi du critère des moindres carrés, nous montrons que cette méthode ne minimise pas seulement la somme quadratique des  $d_i$  mais associe à l'ensemble des résidus obtenus après optimisation (distances après minimisation) une loi de répartition normale. En utilisant cette propriété, nous montrons que les méthodes généralement basées sur les petits déplacements estiment actuellement les moments d'ordre 1. Autrement dit, les logiciels de métrologie en grande majorité ne peuvent calculer que les valeurs moyennes des paramètres de la surface associée.

En annulant les deux premières hypothèses citées précédemment, nous estimerons les moments d'ordre 1 et 2 du vecteur aléatoire  $\vec{a}$ . Il représente les paramètres de la surface associée. Les moments d'ordre 2 sont homogènes à l'incertitude avec laquelle les paramètres de la surface associée ont été déterminés. Le moment d'ordre 1 est l'estimateur du mesurande. Le champ d'application des moments d'ordre 2 est vaste car les normes sur la qualité obligent les acteurs du contrôle à fournir le résultat d'un mesurage avec son incertitude. [1]

## 2. REPARTITION NORMALE DE LA VARIABLE ALEATOIRE $d_i$ OPTIMISEE

En métrologie tridimensionnelle où la méthode des moindres carrés occupe une place de choix, il est communément admis que les résidus obtenus après optimisation sont répartis suivant une loi normale. Nous proposons de démontrer cette suggestion en maximisant la quantité d'information au sens de Fisher.

Lorsque l'on utilise la méthode des moindres carrés, on recherche à minimiser la somme quadratique des  $d_i$  :

$$\min \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \right) (1)$$

avec : n nombre de points palpés

La fonction  $d_i$  a pour variables les composantes  $a_i$  du vecteur aléatoire  $\vec{a}$ .

$$d_i = g(\vec{a}) = g(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Posons l'hypothèse que la variable  $d_i$  suive une loi normale dans  $\mathfrak{R}$  après optimisation.

$$\forall d_i \in \mathfrak{R}, \quad f = \left( \frac{1}{s \sqrt{2\Pi}} \right)^n \cdot \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{d_i}{s} \right)^2 \right]$$

Nous calculons le vecteur estimé de  $\vec{a}$  (noté  $\vec{\hat{a}}$ ) par la méthode du maximum de vraisemblance en posant l'hypothèse d'homocédasticité:

$$\begin{aligned} \ln f &= n \cdot \ln \frac{1}{s \sqrt{2\Pi}} \cdot -\frac{1}{2s^2} \cdot \sum_{i=1}^n d_i^2 \\ \frac{\partial \ln f}{\partial a_i} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^n d_i^2}{\partial a_i} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Cette dernière formule permet d'obtenir un système d'équations nécessaire à l'estimation du vecteur aléatoire  $\vec{\hat{a}}$ . L'équation (2) correspond aux calculs réalisés pour satisfaire le critère (1). On peut donc conclure qu'après optimisation, les résidus  $d_i$  sont répartis suivant une loi normale de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_r$ . (figure 1)

La valeur de  $\sigma_r$  est obtenue par l'estimateur asymptotiquement sans biais suivant:

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-p}}$$

avec : n nombre de points et p nombre de composantes de  $\vec{a}$  estimées

Actuellement, les méthodes de détermination des paramètres de la surface associée supposent que le terme  $\sigma_r$  est infiniment petit. Réellement la surface possède un défaut d'état de surface. A ce défaut vient s'ajouter le bruit du processus de mesurage (termes aléatoire et systématique si non corrigé). Il est variable et fonction d'un grand nombre de paramètres (opérateur, tête de mesure dynamique ou statique, vitesse accostage, qualité de la direction d'accostage...) [2]. Le terme  $\sigma_r$  est un bon indicateur de la qualité du mesurage.

### 3. SUPPRESSION DE L'HYPOTHESE DE PETITS DEPLACEMENTS

#### 3.1. Rappel de la méthode des petits déplacements[3] [4]

Le déplacement  $\vec{D}_M = \vec{MM'} = \vec{OM'} - \vec{OM}$  entre le point de départ M et le point déplacé M' peut être modélisé par une transformation matricielle écrite en coordonnées homogènes dans le repère  $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Le déplacement est obtenu par trois rotations et trois translations indépendantes entre elles:

$$\vec{D}_M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \vec{OM}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos a_2 \cos a_3 - 1, & a_{12} &= -\cos a_2 \sin a_3, \\ a_{13} &= \sin a_2, & a_{21} &= \sin a_3 \cos a_1 + \sin a_1 \cos a_3 \sin a_2, \\ a_{22} &= (\cos a_1 \cos a_3 - \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3) - 1, & a_{23} &= -\sin a_1 \cos a_2, \\ a_{31} &= \sin a_1 \sin a_3 - \cos a_1 \cos a_3 \sin a_2, & a_{32} &= \sin a_1 \cos a_3 + \cos a_1 \sin a_2 \sin a_3, \\ a_{33} &= \cos a_1 \cos a_2 - 1 \end{aligned}$$

Si les trois rotations sont infiniment petites (environ  $10^{-3}$  rad.), alors les fonctions trigonométriques peuvent être linéarisées au premier ordre. L'expression précédente devient :

$$\vec{D}_M = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & u_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & u_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \vec{OM} \quad \text{avec} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la multiplication matricielle est remplacée par la somme d'un vecteur translation et le vecteur résultant, d'un produit vectoriel entre un vecteur rotation et le vecteur position du point M :  $\vec{D}_M = \vec{D}_0 + \vec{MO} \wedge \vec{\Omega}$ . En France, les vecteurs translation et rotation sont les composantes du torseur des petits déplacements (translation  $\vec{D}_0$  et rotation  $\vec{\Omega}$ ):

$$\begin{matrix} \vec{\Omega} & \vec{D}_0 \\ \begin{bmatrix} a_1 & u_1 \\ a_2 & u_2 \\ a_3 & u_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La linéarisation au premier ordre des fonctions trigonométriques entraîne plusieurs hypothèses sur la validité de la valeur  $\dot{D}_M$  :

- Les angles de rotation doivent rester infiniment petits (3)
- $\dot{D}_M$  doit rester petit (4) [5].

En métrologie tridimensionnelle, une propriété particulière a permis de développer un grand nombre d'algorithmes. La valeur de la projection de  $\dot{D}_M$  calculée en petits déplacements sur la normale de la surface permet d'écrire les équations à minimiser pour les surfaces usuelles. On remarquera que l'hypothèse de conservation de l'orientation de la surface déplacée doit être respectée (figure 2). Le déplacement  $\dot{D}_M$  au point i en projection sur la normale  $\vec{n}_i$  est égal à :  $\dot{D}_{Mi} \cdot \vec{n}_i$ .

Afin de respecter les hypothèses, il faut impérativement se placer dans un référentiel local où les valeurs des composantes du vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  restent infiniment petites. Cet artifice de calcul nécessite donc que l'algorithme estime premièrement une position de la surface associée proche de la solution finale et transporte par une matrice de changement de repère les points dans ce référentiel local. Ce dernier est construit à partir des informations contenues dans cette première estimation. Ensuite l'algorithme d'optimisation minimise la fonction écart en plusieurs itérations. Le résultat obtenu est donc connu dans le référentiel local, on travaille donc en relatif. Une transformation inverse permet de connaître les paramètres de la surface associée dans le référentiel global.

Par exemple, dans le cas d'un plan orienté d'une manière quelconque dans l'espace, les points  $M_i$  sont transportés dans un référentiel  $R'$  dont l'axe  $e'_3$  est orienté suivant la normale d'un plan proche de la solution. L'équation à minimiser dans le référentiel local  $R' (0', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  est :

$$d_i = z'_i - (\dot{D}_{Mi} \cdot \vec{n}_i)$$

avec :  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  les coordonnées de  $M'_i$  dans le référentiel local  $R'$

Le vecteur aléatoire à estimer dans le référentiel local a pour composantes  $(\alpha_1, \alpha_2, u_3)$ .

L'avantage majeur de cette méthode réside dans le fait que l'équation à minimiser est simple à trouver. Une opération matricielle est remplacée par une opération vectorielle. De plus, la fonction obtenue est un polynôme de degré 1. La linéarité de l'équation  $d_i$  permet la simplification de l'algorithme d'optimisation.

Cette caractéristique permettait dans les années 70 de diminuer les temps de calculs car les ordinateurs ne possédaient pas les performances de leurs confrères actuels.

Nous proposons de travailler en grands déplacements. Cette méthode permet de connaître les résultats de l'optimisation dans le référentiel de base donc d'estimer directement plusieurs propriétés du vecteur aléatoire (en absolu).

### 3.2. Méthode en grands déplacements

Avec cette méthode, les fonctions trigonométriques de la matrice de rotation ne sont pas linéarisées au premier ordre. Les hypothèses (3) et (4) ne sont plus nécessaires. Des travaux ont été réalisés dans cette direction; cependant, ils utilisent un repère local pour éviter les problèmes de convergence de leurs algorithmes [6].

L'équation de  $d_i$  n'est pas linéaire mais présente l'avantage de donner les résultats après optimisation dans le référentiel global. Dans le cas du plan, l'équation de  $d_i$  devient :

$$d_i = (\overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{n}_i) - h$$

avec h : distance à l'origine du plan

La normale  $\vec{n}_i$  orientée par les angles  $(\theta, \psi)$  est projetée dans le référentiel  $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  (figure 3). En grands déplacements, la distance  $d_i$  calculée ne subit aucune approximation. Le vecteur aléatoire à estimer a pour composantes  $(\theta, \psi, h)$ . Tous ces moments statistiques pourront être déterminés avec précision.

### 3.3. Estimation du moment statistique d'ordre 1 en grands déplacements

L'estimation du vecteur aléatoire  $\vec{a}$  est obtenue par la minimisation de la fonction :

$\sum_{i=1}^n d_i^2$ . Le problème à résoudre est non linéaire. La méthode des gradients conjugués

est utilisée pour estimer le vecteur aléatoire  $\vec{\hat{a}}$ . La méthode des moindres carrés implique la minimisation d'une équation quadratique (concave). Elle possède un et un seul minimum. Tous les algorithmes doivent donc trouver les mêmes résultats. La précision est fonction en autres du critère d'arrêt des méthodes itératives utilisées. La formalisation d'un problème ne doit pas influencer le résultat. Le seul critère de performance des algorithmes est la valeur de la somme quadratique des  $d_i$  optimisés.

Pour valider nos résultats, nous avons écrit la fonction  $d_i$  par plusieurs méthodes. Nous avons utilisé les angles d'Euler et la rotation vectorielle pour toutes les surfaces usuelles (figure 3).

Afin de valider les résultats, nous avons programmé d'une manière indépendante, les différentes modélisations. Deux plates-formes de programmation ont été utilisées par deux personnes différentes (visual C++ et visual basic de Microsoft). Les deux codes réalisés utilisent la programmation objets communicants et la programmation structurée. Tous les calculs issus des deux sources ont donné les mêmes résultats.

De plus, nous avons testé nos algorithmes sur 44 fichiers de référence. Ces exemples comprennent les difficultés majeures rencontrées en optimisation (convergence et de temps de calcul). Les moments d'ordre 1 obtenus sont conformes aux valeurs attendues (coordonnées du vecteur directeur à  $10^{-10}$  mm près, paramètres intrinsèques et origine à  $10^{-6}$  mm près).

## 4. SUPPRESSION DE L'HYPOTHESE DE DEFAUTS D'ETAT DE SURFACE NULS ET DE MOYEN DE MESURAGE PARFAIT

Les logiciels industriels de métrologie se limitent à la détermination des moments d'ordre 1. L'estimation du mesurande sans lui adjoindre son incertitude implique que l'on suppose que la surface réelle est non bruitée. Les hypothèses de défaut d'état de surface faible et de moyen de mesurage parfait, ne sont pas valides dans la réalité.

Dans le premier paragraphe, nous avons montré que les  $d_i$  se répartissent autour de la surface associée suivant une loi normale centrée. Cette loi de répartition possède une variance  $\sigma_r^2$ . Ce paramètre de dispersion est un indicateur sur la qualité de la mesure. Il représente l'effet des perturbations non maîtrisées introduites dans le processus de mesurage. Elles peuvent être de diverses origines : un état de surface de qualité exécutable, une mauvaise répétabilité du moyen de mesure, des vibrations de la structure... L'estimation du moment d'ordre 1 du vecteur aléatoire sera d'autant meilleure que cette variance sera faible.

### 4.1. Estimation du moment statistique d'ordre 2 du vecteur aléatoire [7]

La matrice de variance covariance des estimateurs du vecteur aléatoire est :

$$Var(\hat{a}) = \begin{bmatrix} Var(\hat{a}_0) & Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_1) & \dots & Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_{m-1}) \\ Cov(\hat{a}_1, \hat{a}_0) & Var(\hat{a}_1) & \dots & Cov(\hat{a}_1, \hat{a}_{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\hat{a}_{p-1}, \hat{a}_0) & Cov(\hat{a}_{p-1}, \hat{a}_1) & \dots & Var(\hat{a}_{m-1}) \end{bmatrix}$$

Les algorithmes mis au point fournissent en plus des moments d'ordre 1 du vecteur aléatoire, la variance des estimateurs. La méthode en grands déplacements travaille en absolu et sans approximation, cela lui confère une très grande précision dans le calcul de la matrice de variance covariance. Dans le cas du plan, la matrice de variance covariance est:

$$Var(\hat{a}) = \begin{bmatrix} Var(q) & Cov(q,y) & Cov(q,h) \\ Cov(q,y) & Var(y) & Cov(y,h) \\ Cov(q,h) & Cov(y,h) & Var(h) \end{bmatrix}$$

Les composantes du vecteur aléatoire ne représentent pas directement les paramètres couramment utilisés en métrologie (vecteur directeur, origine et grandeurs intrinsèques). Nous calculons ces variables d'affichage en faisant propager les incertitudes par la méthode suivante [8][9][10]:

$$y^a = f^a(x_1^a + x_2^a + \dots x_n^a) \text{ où } y^a \text{ est un vecteur}$$

$$Cov[y^a] = [J]^T \cdot Cov[x] \cdot [J]$$

avec:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1} & \frac{\partial f^m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T \quad J : \text{Jacobian matrix}$$

Les termes diagonaux de la matrice représentent les composantes de la variance du vecteur :

$$\overline{u^2}_{c(y^a)} = Cov[y^a]_{\alpha\beta} \text{ avec } \alpha=\beta$$

Cette connaissance permet d'assurer la maîtrise de la propagation de l'incertitude dans le logiciel de métrologie.

## 4.2. Application en Métrologie Tridimensionnelle

Nos programmes permettent de calculer simultanément les valeurs moyennes et les incertitudes des variables d'affichage. Les figures 4 et 5 présentent les fenêtres d'un des deux logiciels et propose les résultats d'optimisation pour un plan et un cylindre. Les indications Cx, Cy, Cz sont les coordonnées de l'origine de la surface. Les valeurs de nx, ny, nz sont les coordonnées du vecteur directeur de la surface. La variable D correspond au diamètre de la surface. La valeur de Chi représente le ½ angle au sommet d'un cône.

Les doutes affichés sont les incertitudes composées. Si l'on souhaite obtenir les incertitudes élargies, il faut multiplier ces dernières par un coefficient d'élargissement k (k=2 généralement en métrologie)[8].

## 5. PERSPECTIVES

L'incertitude de mesure est homogène à un écart type, elle peut être modélisée grâce à cette nouvelle méthode d'estimation. Sa situation amont dans le logiciel de métrologie, lui confère une position stratégique. Le métrologue connaîtra en temps réel, le doute qui entache ses résultats. Toutes les phases de vérifications situées en aval de la

détermination des surfaces associées, peuvent donc être complétées par la proposition d'une incertitude (exemple vérification d'un parallélisme, proposition de la valeur estimée et de son doute).

Si l'on vient palper une plaque de verre polie à défaut de forme nul, les incertitudes composées fournies par les algorithmes ont pour origine seulement les variations aléatoires du processus de mesurage. Ces valeurs pourraient servir à la caractérisation du processus.

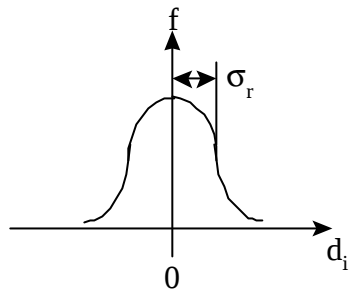
## **6. Conclusion**

La démarche de qualité fixée par la norme ISO9000, impose au métrologue d'estimer l'incertitude avec laquelle, il a obtenu sa mesure. Les algorithmes développés apportent une réponse aux problèmes de contrôle industriel. Ils ont fait l'objet d'un dépôt d'enveloppes Soleau auprès de l'INPI.

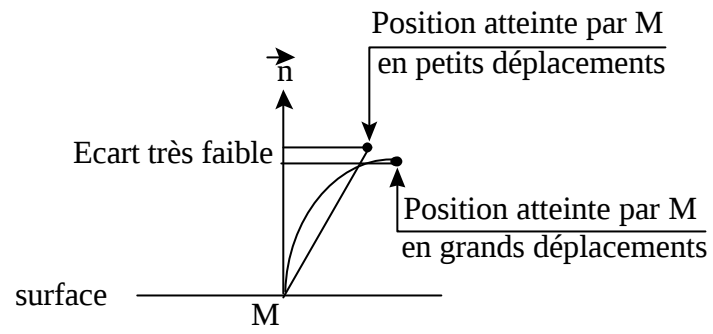
Les essais réalisés montrent que les incertitudes évoluent en fonction d'un grand nombre de paramètres. L'automatisation du calcul des incertitudes permet d'envisager l'utilisation de la méthodologie de la recherche expérimentale (plans d'expériences) afin de mettre en évidence les facteurs influents. Ils nous permettront de donner les précautions à prendre afin de diminuer les incertitudes sur les résultats. De même, des indications sur la réalisation des gammes de mesures pourront être fournies aux utilisateurs avant que les logiciels de métrologie incluent les fonctionnalités présentées dans cet article.

## **BIBLIOGRAPHIE**

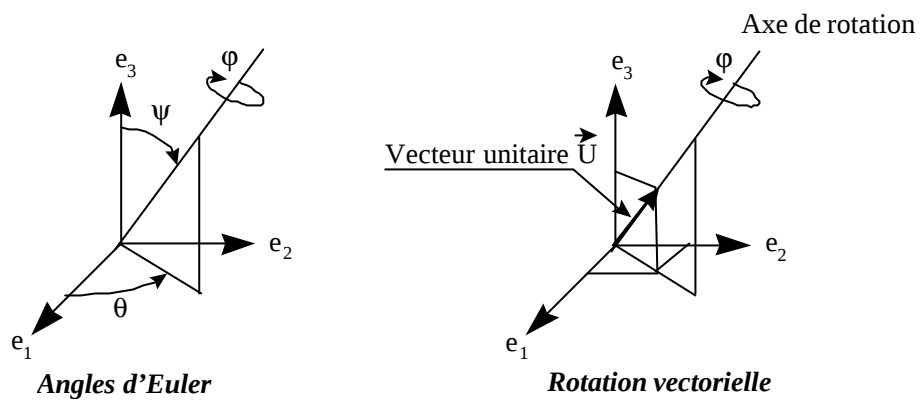
- [1] M.Priel, Pourquoi faut-il annoncer une incertitude avec les résultats de mesure ?, Revue des laboratoires d'essais, décembre 1995, pp. 16-19.
- [2] S. Courtois, J. Bachmann, J.M. Linares, Méthodologie de la recherche expérimentale, Criblage des facteurs et foldover, Application à l'optimisation de l'utilisation d'une machine à mesurer, Congrès CNR-IUT'2000, Tome I, 2000, pp.303-316.
- [3] P. Bourdet, I. Mathieu, C. Lartigue, A. Ballu, The concept of the small displacement torsor in metrology, Advanced Mathematical Tools in Metrology II, 1996, pp.110-122.
- [4] G. Goch, U.Tschudi, A Universal Algorithm for the alignment of Sculptured Surfaces, Annals of CIRP, Vol 41/1, Aix en Provence, 1992, pp. 507-510
- [5] A. Clement "Principe d'Abbe généralisé" Technologie et formation, n°32, 1990, pp. 39-45.
- [6] J.P. Kruth, Weiyin Ma, Parameter identification of geometric elements from digitized data of coordinate measuring machines, MATADOR Conference, Manchester, 1992, pp. 277-285
- [7] J.M. Linares, P. Bourdet, J.M. Sprauel, Quality measurement on CMM, Proceeding of the International IDMM2000 (compact disk), 10 pages, Montréal, May 2000.
- [8] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, Guide to the expression of the uncertainty in measurement, First edition, 1993, ISBN 92-6710188-9
- [9] V Tuninski, S D'emilio, F. Cabiati, Concepts and rules in the guide to the expression of uncertainty: additional proposals, Metrology 99, Proceeding of the 9<sup>TH</sup> International metrology congress, Bordeaux, 18-21 October 1999, pp.361-364.
- [10] E.Arri, F. Cabiati, S D'emilio, L. Gonella, "On the application , Guide to the expression of the uncertainty in measurements to measuring instruments", Measurement, Vol. 16, 1995, pp. 51-57.



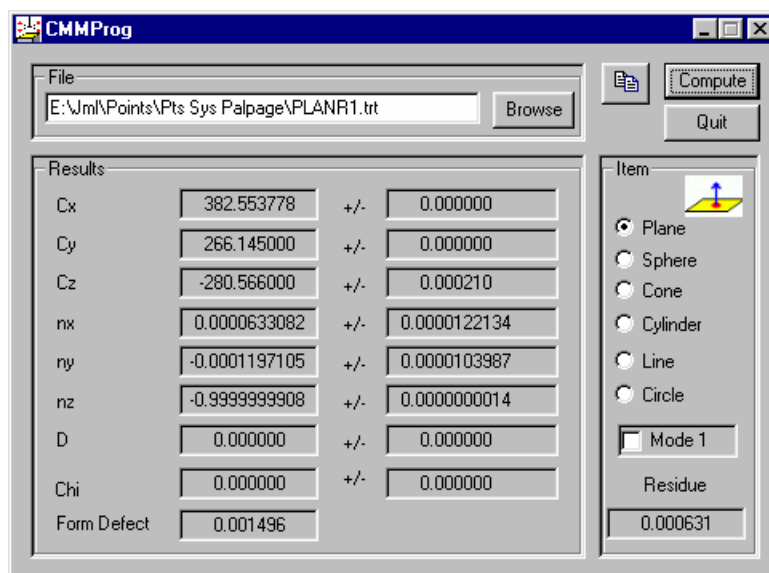
**Figure 1 :** Répartition des résidus  $d_i$  après optimisation  
 *$d_i$  after optimisation*



**Figure 2 :** Ecart entre les deux méthodes  
*Difference between the two methods*

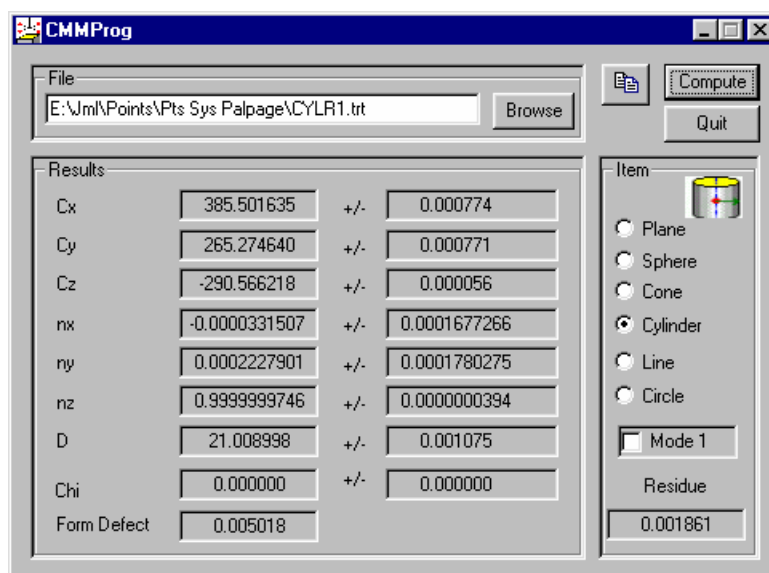


**Figure 3 :** Matrices de rotation et Rotation vectorielle  
*Euler Angles and vectorial rotation*



| Résultats    | Estimateur du mesurande | Incertitude composée | Incertitude étendue |
|--------------|-------------------------|----------------------|---------------------|
| <b>Cx</b>    | 385.553778              | +/- 0                | +/- 0               |
| <b>Cy</b>    | 266.145000              | +/- 0                | +/- 0               |
| <b>Cz</b>    | -280.566000             | +/- 0.000210         | +/- 0.000420        |
| <b>nx</b>    | 0.0000633082            | +/- 0.000012         | +/- 0.000024        |
| <b>ny</b>    | -0.0001197105           | +/- 0.000010         | +/- 0.000020        |
| <b>nz</b>    | -0.99999999708          | +/- 0                | +/- 0               |
| <b>D</b>     | 0                       | +/- 0                | +/- 0               |
| <b>Chi</b>   | 0                       | +/- 0                | +/- 0               |
| <b>Forme</b> | 0.001496                |                      |                     |

Figure 4 : Plan du marbre de la MMT  
Plane of the CMM



| Résultats :  | Estimateur du mesurande | Incertitude composée | Incertitude élargie |
|--------------|-------------------------|----------------------|---------------------|
| <b>Cx</b>    | 385.501635              | +/- 0.000774         | +/- 0.001548        |
| <b>Cy</b>    | 265.274640              | +/- 0.000771         | +/- 0.001542        |
| <b>Cz</b>    | -290.566218             | +/- 0.000056         | +/- 0.000112        |
| <b>nx</b>    | -0.0000331507           | +/- 0.000116         | +/- 0.000232        |
| <b>ny</b>    | 0.0002227901            | +/- 0.000178         | +/- 0.000356        |
| <b>nz</b>    | 0.9999999716            | +/- 0                | +/- 0               |
| <b>D</b>     | 21.008998               | +/- 0.001075         | +/- 0.002150        |
| <b>Chi</b>   | 0                       | +/- 0                | +/- 0               |
| <b>Forme</b> | 0.005018                |                      |                     |

Figure 5 : Cylindre étalon  
Standard cylinder