HAL
open science

Une famille de règles d'élimination de variables pour les CSP binaires basées sur BTP

Achref El Mouelhi

To cite this version:

Achref El Mouelhi. Une famille de règles d'élimination de variables pour les CSP binaires basées sur BTP. Treizièmes Francophones de Programmation par Contraintes, JFPC 2017, Jun 2017, Montreuil-sur-Mer, France. hal-01785215

HAL Id: hal-01785215

https://amu.hal.science/hal-01785215

Submitted on 7 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une famille de règles d'élimination de variables pour les CSP binaires basées sur BTP

Achref El Mouelhi
Marseille - France
elmouelhi.achref@gmail.com

Résumé

L'étude des triangles cassés devient de plus en plus ambitieuse, par la résolution des problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) en temps polynomial d'un coté, et par la réduction de l'espace de recherche à travers l'élimination de variables et la fusion de valeurs de l'autre. Pour cela, plusieurs extensions de ce concept ont été étudiées dans le passé récent, tel que les triangles cassés duaux et les triangles légèrement cassés. Ces extensions ont été introduites dans le but de maximiser soit le nombre de valeurs fusionnées et/ou le nombre d'instances traitables capturées. Mais, aucune d'entre elles n'a préservé toutes les caractéristiques de BTP.

Ici, nous introduisons une nouvelle version légère de BTP, que nous appelons m-fBTP (pour flexible broken-triangle property). m-fBTP permet la fusion de valeurs, l'élimination de variables et définit une plus grande classe polynomiale pour laquelle la cohérence d'arc est une procédure de décision.

Une version plus détaillée en langue anglaise a été publiée à AAAI'17 [4].

1 Définitions

Le problème de satisfaction de contraintes constitue un formalisme important pour la modélisation et la résolution des plusieurs problèmes du monde réel en Intelligence Artificielle. Ici, nous nous intéressons uniquement aux instances binaires. Une instance de CSP binaire est un couple $I = (X, C)$. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ est un ensemble n **variables**. Chaque variable x_i a un ensemble fini de valeurs, appelé **domaine** et noté $D(x_i)$. C est un ensemble de e **contraintes** binaires. Chaque contrainte binaire C_{ij} est un couple $(Scp(C_{ij}), Rel(C_{ij}))$, où $Scp(C_{ij})$ est un ensemble de deux variables $\{x_i, x_j\}$ et $Rel(C_{ij})$ définit la compatibilité entre les valeurs dans $D(x_i)$ et $D(x_j)$.

Vérifier s'il existe une solution pour une instance de CSP binaire donnée est un problème NP-complet. Mais, en imposant quelques restrictions sur le domaine des variables ou sur les contraintes, une telle instance peut être résolue en temps polynomial. Par exemple, il est connu que les instances de CSP binaires qui satisfont BTP (pour Broken-Triangle Property [2]) sont résolues en temps polynomial par le niveau de cohérence le plus basique et le moins couteux en terme de complexité, à savoir la cohérence d'arc. BTP interdit l'existence d'un triangle cassé sur la variable courante vis-à-vis de variables précédentes dans l'ordre. Ici nous proposons une extension de BTP, appelée m-fBTP, qui préserve toutes ses caractéristiques.

Définition 1 *Un couple de valeurs $v'_k, v''_k \in D(x_k)$ satisfait **m-fBTP**, si pour chaque triangle cassé (v'_k, v_i, v_j, v''_k) avec $v_i \in D(x_i)$ et $v_j \in D(x_j)$, il existe un ensemble de $r \leq m$ **variables soutiens** $E \subseteq X \setminus \{x_i, x_j, x_k\}$ tel que pour toute solution partielle $\mathcal{A}$ de E, il existe $v_\ell \in \mathcal{A}$ tel que si $(v_\ell, v_i) \in Rel(C_{\ell i})$, alors $(v_\ell, v_j) \notin Rel(C_{\ell j})$. Dans ce cas, nous disons que (v'_k, v_i, v_j, v''_k) est un triangle cassé flexible. Une variable $x_k \in X$ satisfait m-fBTP si pour chaque couple de valeurs dans $D(x_k)$ satisfait m-fBTP.*

S'il n'existe aucun ensemble de variables pour soutenir un triangle cassé, alors ce dernier sera dit triangle purement cassé.

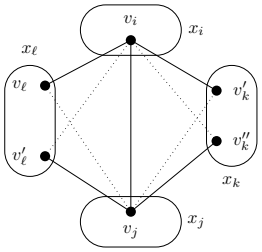

FIGURE 1 – La variable x_k satisfait m-fBTP.

La figure 1 montre un couple de valeurs $v'_k, v''_k \in$

$D(x_k)$ qui satisfait 1-fBTP car l'unique triangle cassé (v'_k, v_i, v_j, v''_k) est flexible (soutenu par x_ℓ).

Intuitivement, nous pouvons constater que si un couple de valeurs satisfait m-fBTP, alors il satisfait aussi $(m+1)$-fBTP.

2 Fusion de valeurs

Le résultat sur la fusion s'appuie sur la proposition suivante qui établit le lien avec m-wBTP [1].

Proposition 1 *Dans une instance de CSP binaire $I = (X, C)$, $\forall m,\ 0 \leq m \leq n-4$, si un couple de valeurs $v'_k, v''_k \in D(x_k)$ satisfait m-fBTP, alors il satisfait aussi m-wBTP.*

Puisque la fusion d'un couple de valeurs satisfaisant m-wBTP ne modifie pas la satisfiabilité d'une instance, alors nous pouvons aussi déduire que fusionner un couple de valeurs qui satisfait m-fBTP n'affecte pas la satisfiabilité d'une instance.

3 Élimination de variables

La fusion de valeurs d'une variable x_k qui satisfait m-wBTP ne peut se dérouler d'une façon itérative jusqu'à obtention d'une valeur singleton. En effet, après avoir fusionné un couple de valeurs $v'_k, v''_k \in D(x_k)$, il est possible que la variable x_k ne soit plus m-wBTP (voir section 5 de [1]). Ceci n'est pas le cas pour m-fBTP.

Lemme 1 *Étant donnée une variable x_k qui satisfait m-fBTP, après fusion d'un couple de valeurs $v''_k, v'''_k \in D(x_k)$ en une nouvelle valeur v'_k, aucun triangle purement cassé ne peut s'introduire sur x_k.*

Le théorème suivant est une conséquence directe des résultats précédents.

Théorème 1 *Étant donnée une instance de CSP binaire arc cohérente $I = (X, C)$, si une variable $x_k \in X$ satisfait m-fBTP, alors elle peut être éliminée de I tout en préservant la satisfiabilité.*

m-fBTP définit aussi une condition maximale d'élimination de variables, c'est-à-dire l'élimination de toute autre variable d'une instance I, sur laquelle il existe un triangle purement cassé, conduit nécessairement à la modification de la satisfiabilité I.

4 Classe polynomiale résolue par la cohérence d'arc

Nous étendons la définition de m-fBTP aux instances de CSP binaire.

Définition 2 *Une instance de CSP binaire I menée d'un ordre $<$ sur les variables satisfait m-fBTP par rapport à $<$ si pour toute variable x_k, chaque couple de valeurs dans $D(x_k)$ satisfait m-fBTP dans la sous-instance de I contenant les variables $x_i \leq x_k$.*

Comme BTP, m-fBTP est conservative, c'est-à-dire la propriété sera préservée même après application de tout algorithme de filtrage supprimant seulement des valeurs, comme la cohérence d'arc. Ce résultat est nécessaire pour prouver le théorème suivant.

Théorème 2 *La cohérence d'arc est une procédure de décision pour toute instance de CSP binaire $I = (X, C)$ qui satisfait m-fBTP ($1 \leq m \leq n-3$).*

m-fBTP constitue ainsi la plus large classe polynomiale résolue itérativement par l'élimination de variables.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons introduit m-fBTP, une version légère de BTP, qui couvre les imperfections des versions précédentes et qui préserve toutes ses caractéristiques, fusion de valeurs, élimination de variables, conservation et résolution par la cohérence d'arc. Nous avons aussi prouver que m-fBTP es différente de k-BTP [3] et WBTP [5]. Il serait intéressant de valider expérimentalement ces résultats théoriques et les étendre aux instances CSP d'arité quelconque.

Références

[1] Martin C. Cooper, Achref El Mouelhi, and Cyril Terrioux. Extending broken triangles and enhanced value-merging. In *Proceedings of the 22nd International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP)*, pages 173–188, 2016.

[2] Martin C. Cooper, Peter Jeavons, and Andras Salamon. Generalizing constraint satisfaction on trees : hybrid tractability and variable elimination. *Artificial Intelligence*, 174 :570–584, 2010.

[3] Martin C. Cooper, Philippe Jégou, and Cyril Terrioux. A microstructure-based family of tractable classes for CSPs. In *Proceedings of the 21st International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP)*, pages 74–88, 2015.

[4] Achref El Mouelhi. A BTP-based family of variable elimination rules for binary CSPs. In *Proceedings of the 31st AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 3871–3877, 2017.

[5] Wady Naanaa. Extending the broken triangle property tractable class of binary CSPs. In *Proceedings of the 9th Hellenic Conference on Artificial Intelligence (SETN)*, pages 3 :1–3 :6, 2016.