HAL
open science

Ecologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum

Teresa Assude

To cite this version:

Teresa Assude. Ecologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum. Petit x, 1993, 35, pp.43-58. hal-01802864

HAL Id: hal-01802864

https://amu.hal.science/hal-01802864v1

Submitted on 29 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLOGIE DE L'OBJET "RACINE CARREE" ET ANALYSE DU CURRICULUM

Teresa ASSUDE
chercheur en didactique des mathématiques
IUFM de Toulon

I. Introduction

Dans cet article, nous analyserons le système d'enseignement secondaire français (et notamment l'enseignement au Collège) en prenant le point de vue d'un objet de savoir particulier - l'objet "racine carrée"[1]. Pour cela, nous considérons deux problèmes de départ dont le premier est issu d'une observation de terrain et le second d'une question épistémologique posée à ce propos :

1er Problème : l'objet RC est regardé comme un objet "à problèmes", sur lequel butent les élèves ;
2ème Problème : quel est le statut de l'objet RC dans le système d'enseignement secondaire actuel en France ?

Ces deux problèmes, nous le verrons, sont liés car leur compréhension passe par l'identification d'un phénomène commun et plus général, propre au système d'enseignement français. Nous étudierons ces deux problèmes en les insérant, non seulement dans leur cadre curriculaire et didactique, mais aussi dans leur environnement savant et culturel. Pour cela, considérons trois thèmes d'étude à partir desquels l'objet RC est vu ordinairement comme un objet à problèmes pour poser la question du statut de cet objet. Voici ces thèmes d'étude :

- le thème de l'irrationalité;
- le thème des approximations numériques;
- le thème de la manipulation opératoire des radicaux, soit ce que nous appellerons désormais le thème de l'algèbre des radicaux[2].

Pour préciser notre problématique d'étude, remarquons que, du point de vue strictement mathématique, ces thèmes-là ne sont pas spécifiques aux racines carrées mais qu'ils appartiennent à une classe de problèmes englobant d'autres objets que l'objet RC. Or, ce qu'on peut observer dans l'enseignement secondaire français c'est

[1]. Désormais nous appellerons l'objet "racine carrée" par l'objet RC. Les analyses suivantes sont extraites de mon travail de thèse et elles concernent les programmes jusqu'à 1985. Toutefois ces analyses peuvent être prises, à quelques changements près, pour les programmes actuels.
[2]. D'autres thèmes comme le thème des équations ou le thème des fonctions auraient pu être choisis. Nous verrons plus tard comment ce dernier thème est aussi présent dans nos analyses.

que ces thèmes sont liés à l'objet RC d'une manière insistante. Par exemple, on pose le problème de *l'irrationalité* de $\sqrt{2}$ au Collège[3] mais une telle question ne surgit pas au Lycée à propos des valeurs des fonctions trigonométriques, logaritmiques ou exponentielles : on s'interroge sur la nature rationnelle/irrationnelle de $\sqrt{2}$ et non sur celle de log 2, e^2 ou tan 3. De même, on s'interroge sur le calcul des *valeurs approchées décimales* de $\sqrt{2}$ sans le faire à propos du calcul de log 2. Le traitement didactique fait aussi un sort particulier à la racine carrée dans *l'algèbre des radicaux* : alors qu'on enseigne aux élèves que $(a+b)=a^2+b^2+2ab$ on dira simplement que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est différent de $\sqrt{a+b}$ sans présenter positivement l'égalité $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$. Ou encore, une expression du type $\frac{1}{\tan 2-1}$ sera laissée telle quelle tandis que le même sort ne sera pas réservé à une expression du type $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Dans ces trois registres, la racine carrée apparaît comme différente, comme mystérieuse, comme un "objet à problèmes". Le fait qu'on parle d'une manière insistante à propos de la racine carrée de problèmes qui ne lui sont pas spécifiques est un symptôme du caractère "pathologique" de la particularité attribuée à cet objet.

Il est vrai que l'objet RC est le premier objet à apparaître dans l'enseignement qui permet de travailler ces thèmes. Mais cela ne suffit pas pour comprendre leur association presque exclusive à la racine carrée. Il y a autant de raisons culturelles et historiques que didactiques à cette association, ce que nous analyserons par la suite.

II. Le thème de l'irrationnalité

La présence de la racine carrée est très anciennement attestée à propos de ce qu'on appelle la "crise des irrationnelles" : l'objet RC constitue pour ainsi dire le premier exemple historique d'objet mathématique "à problèmes". La "découverte" de l'incommensurabilité de la diagonale du carré à son côté réalisée au sein de l'école pythagoriciennne, selon la légende, fit scandale car elle aurait valu à son premier divulgateur de périr dans un naufrage. Le scoliaste anonyme du livre X des *Eléments* d'Euclide écrit à ce propos[4] :

"Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants."

Le thème de l'irrationalité de la racine carrée a une *forte pertinence culturelle,* qui pousse à insister sur le caractère mystérieux de l'objet RC. Ecoutons ce qu'écrit Paul-Henri Michel dans son livre intitulé *DE PYTHAGORE A EUCLIDE, Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidiennes*, publié en 1950[5] :

---

[3]. Actuellement on ne pose plus ce problème au Collège en laissant ainsi le problème des systèmes des nombres nécessaire au travail mathématique dans le flou.

[4]. *Cité in* Desanti 1967, auquel nous renvoyons pour l'analyse de cette crise, p.441.

[5]. Michel 1950, pp.521-522.

"Un philosophe n'aurait-il pas sujet de s'étonner, aujourd'hui comme alors, devant le fait de l'irrationalité ? Et même de s'indigner au spectacle d'une certaine ignorance satisfaite, les plus ignorants étant ceux qui croient connaître parce qu'ils ont nommé ? Platon "tenait la blessure ouverte" et se refusait "à cacher derrière un mot la difficulté du concept". Qu'entre deux lignes dont les proportions relatives sont aussi familières et reconnaissables à l'oeil que celles du côté et de la diagonale d'un carré, il n'existe aucune commune mesure, si petite soit-elle, c'est là le signe d'une troublante antinomie entre la pensée et la sensation. Pas plus que le calcul, la logique ne jette un pont sur l'abîme. La géométrie pas davantage. L'opération qui consiste à construire, à tracer les lignes en question ne résout pas le problème : elle le pose à l'esprit en le montrant tout résolu, mystérieusement résolu en fait. Pour finir, il faut admettre ce fait géométrique ; il faut "sauter". La φυσις de l'irrationnel était une énigme. Elle le reste."

La "crise des irrationnelles" reste dans la mémoire collective comme une "blessure ouverte", comme un trauma toujours à revivre même si le problème est mathématiquement résolu par les constructions axiomatiques de Dedekind et autres au XIXème siècle. Mais au-delà de ces raisons d'ordre historico-culturel, il convient d'examiner si certaines contraintes de l'enseignement secondaire demandent d'une manière prégnante cette association-là.

Dans un premier temps, au Lycée mais déjà au Collège, il importe de travailler avec un système de nombres comportant suffisamment de nombres de manière à ce que certaines propriétés soient vraies, comme par exemple la propriété de la continuité de certaines fonctions. De ce fait la pratique mathématique conduit à rencontrer des nombres dont il suffit en un premier temps de savoir qu'ils existent : la question de leur nature rationnelle/irrationnelle n'importe pas en général. Pour préciser cela, faisons alors un parcours par la sphère savante et posons-nous deux questions. La première peut se formuler ainsi :

- Etant donné un nombre réel x, défini d'une manière déterminée (solution d'une équation, limite d'une suite, etc.) est-il rationnel ou irrationnel ?

Cette question est mathématiquement légitime mais elle est souvent d'une grande difficulté. Il existe des nombres pour lesquels les mathématiciens n'ont pas encore démontré s'ils étaient ou non irrationnels, comme par exemple la constante d'Euler ; il existe aussi des nombres dont on a démontré seulement récemment l'irrationalité, comme le nombre $\zeta(3)$ - somme de la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ - dont la nature irrationnelle a été démontrée par Roger Apéry en 1978. Toutefois il existe quelques résultats généraux : par exemple, si x est un rationnel non nul alors e^x est irrationnel ; si x est un rationnel positif différent de 1 alors ln x est irrationnel, résultats qui pourraient servir pour mettre en place une technique d'étude pour aborder certains problèmes d'irrationalité dans l'enseignement au Lycée.

La deuxième question est la suivante :

Est-il pertinent, dans une situation mathématique donnée, de se demander si un nombre x donné est ou non rationnel ?, et plus précisément : y a-t-il, dans les mathématiques de l'enseignement secondaire, des situations où le fait qu'un nombre soit rationnel ou irrationnel change structurellement la situation ?

Dans l'enseignement du Lycée, on pourrait trouver par exemple la fonction $f(x) = \sin x + \sin 2x$, qui est périodique. Or si on passe du rationnel 2 à l'irrationnel $\sqrt{2}$, la fonction $g(x) = \sin x + \sin \sqrt{2}x$ est non périodique, c'est-à-dire que le passage à l'irrationnel $\sqrt{2}$ change structurellement le phénomène mathématique étudié. Mais ce type de situations ne se rencontre ordinairement pas et l'opposition rationnel/irrationnel a une *faible pertinence dans la pratique* des mathématiques de l'enseignement secondaire puisqu'il n'y existe presqu'aucun phénomène où cette opposition serait pertinente. Nous pourrions penser toutefois que l'association du thème de l'irrationalité avec les racines carrées est due au fait que la démonstration de l'irrationalité dans ce dernier cas est plus facile. Or la démonstration, par exemple, de l'irrationalité de $\log_3 5$ est du même degré de difficulté que celle de $\sqrt{n}$ pour n positif non carré parfait : pourtant elle n'apparaît pas dans l'enseignement au Lycée.

Les préoccupations d'ordre didactique sont toutefois nombreuses dans la noosphère[6] en ce qui concerne la présentation du thème de l'irrationalité associé aux racines : cela devient presque une obsession qui se manifeste par la question suivante : comment traiter - mathématiquement - de cette question avec les élèves ?

Dans tout un ensemble d'articles[7], des auteurs essaient de présenter l'irrationalité des racines de différentes manières en évitant un résultat mathématiquement important - le théorème fondamental de l'arithmétique qui énonce l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers de tout entier - pour en obtenir un autre qui l'est beaucoup moins. Par exemple, pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, Waterhouse[8] suppose que la fraction b/c est irréductible et il montre que si b/c n'est pas un entier alors son carré ne peut davantage être un entier. De l'égalité suivante : $(b/c)^2 = b^2/c^2 = (b.b)/(c.c)$, il écrit alors :

> "the only factors that we have in the numerator are repetitions of the one we had in b. Similarly, the only factors that we have in the denominator are repetitions of the ones we had in c. Hence again the numerator and denominator have no factors in commun that could be cancelled, and we have an honest fraction. Thus the proof is finished."

Et Fine trouve amusant le fait de chercher une démonstration sans le théorème fondamental de l'arithmétique. Il écrit[9] :

> "The usual proof of this depend on the theorem that a prime that divides a product must divide one the factors. It might be amusing to give a proof that does not involve number theory."

La solution de l'auteur recourt à l'idée de descente infinie : si $\sqrt{n}$, supposé non entier, s'écrivait sous la forme $\frac{x}{y}$ avec x et y entiers, on pourrait trouver x' et y' entiers vérifiant $x'<x$ et $y'<y$ tel que $\frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} = \sqrt{n}$[10].

D'autres auteurs utilisent la méthode de la descente infinie dans un cadre

---

[6]. Terme introduit en didactique des mathématiques par Yves Chevallard pour désigner l'ensemble de gens qui "pensent" sur le système d'enseignement (des mathématiques en occurrence).

[7]. Voir Assude 1992.

[8]. Waterhouse 1986, p.213.

[9]. Fine 1976, p.249.

[10]. Soit k l'entier tel qu'on a : $k - 1 < \frac{x}{y} < k$. L'auteur pose $x' = (k - \frac{x}{y})\,x$ et $y' = (k - \frac{x}{y})\,y$.

géométrique. Plus généralement, les auteurs cherchent à présenter le thème de l'irrationalité par le biais de situations inhabituelles. Mais ces présentations accentuent l'aspect historico-culturel du thème, et renforcent de fait l'aura de mystère qui l'entoure. L'existence de ces articles va d'une certaine manière créer une pression historico-culturelle lors de la production des manuels : le thème de l'irrationalité, en effet, ne s'articule pas de manière évidente avec le thème des racines carrées comme nous pouvons l'observer dans les manuels.

Les manuels analysés (correspondant à la réforme de 1978 pour les classes de troisième) présentent, dans le chapitre sur les racines carrées, l'existence des nombres irrationnels comme une introduction à l'objet RC. Ainsi pour montrer que certaines racines carrées sont des nombres irrationnels, on montre l'existence des longueurs de carrés dont la mesure n'est pas rationnelle. Par exemple, tel manuel propose la construction d'un carré d'aire 2 pour poser ainsi le problème de la mesure de la longueur de son côté. Or cette activité initiale n'aura pas de répercussions puisqu'il n'existe pas d'articulation entre le thème de l'irrationalité et le reste des activités proposées : dans la longue liste des exercices de ce chapitre qui porte le sous-titre significatif de "A la recherche de l'insaisissable", un seul exercice renvoie au thème de l'irrationalité - celui donnant la démonstration traditionnelle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. La gestion didactique du thème de l'irrationalité est ainsi associée à l'introduction des racines carrées sans que ce problème ait un caractère de généralité ni une articulation réelle avec le reste du chapitre, ce qui bien sûr accentue le caractère étrange de l'objet RC.

Il nous semble que l'aura de mystère d'un thème donné surgit lorsqu'on a une certaine familiarité culturelle avec le thème mais sans avoir les moyens d'aborder ces questions en première personne. Nous ferons l'hypothèse que ce caractère mystérieux se dissout dès lors que le rapport de la personne à la question comporte un angle d'attaque d'au moins une classe de problèmes à l'aide d'au moins une technique d'étude. C'est le cas dans un manuel québecois - Mathématiques de l'école moderne, publié en 1968 par le Centre de Psychologie et de Pédagogie à Montréal[11]. Le thème de l'irrationalité y est abordé à propos d'une classe de problèmes dont l'étude comporte une technique de résolution.

Par exemple, soit à montrer que le nombre $A=\sqrt[3]{2} + 1$ est irrationnel. Comment faire ? Les auteurs présentent un théorème qui va permettre de donner une réponse :

> Si p/q est une racine rationnelle d'une équation polynomiale à coefficients entiers, avec p et q premiers entre eux et $q \neq 0$, alors q divise le coefficient de plus haut degré de l'équation et p divise le terme constant.

Dans notre cas, A est solution de l'équation $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Les solutions a priori rationnelles sont telles que q divise 1, soit 1 et -1, et p divise -3 soit 1, -1, 3 et -3. Les solutions rationnelles, s'il y en a, seraient alors -1, 1, -3 et 3. En substituant à x ces valeurs, on voit qu'aucune d'entre elles n'est solution de l'équation. Donc l'équation n'a pas de racines rationnelles et A est un nombre irrationnel.

---

[11]. Dolciani *et alii* 1968, *Mathématiques de l'école moderne, Secondaire V, Algèbre et Trigonométrie*, Centre de Psychologie et de Pédagogie inc., Montréal.

Cette technique d'étude a une certaine généralité puisqu'elle nous permet d'aborder le thème de l'irrationalité dans toute une classe de problèmes. Cet exemple montre qu'on peut passer d'un *rapport mystérieux* à l'irrationalité à un *rapport de pratique* puisqu'on peut aborder le problème en première personne par l'intermédiaire d'une certaine technique d'étude.

Voilà quelques éléments de réponse à notre premier problème : l'objet RC est vu comme un objet "à problèmes" parce qu'il est regardé comme un objet particulier, étrange, car associé à un thème difficile, dont le traitement didactique, par des pressions diverses d'ordre historico-culturel, ne donne pas les moyens techniques pour que les élèves puissent l'aborder en première personne au moins dans une certaine classe de problèmes. Inversement le thème de l'irrationalité, souvent rabattu sur les racines carrées, perd de sa généralité. Il ne faut pas oublier que ce thème est lié à un des problèmes fondamentaux des premières étapes de la formation mathématique qui est la question du système des nombres nécessaire au travail mathématique : comme nous le disions plus haut, dans un premier temps, il suffit peut-être de savoir que ces nombres existent, sans se soucier de leur nature tant que les fins du travail mathématique ne le justifient pas vraiment.

Nous pourrions penser alors que les choix actuels concernant le Collège s'adaptent bien aux analyses précédentes puisqu'on ne parle plus de nombres irrationnels. Toutefois il nous semble que cette stratégie d'évitement ne résout pas vraiment le problème du système des nombres nécessaire au travail mathématique car les élèves n'ont aucun moyen de savoir que ces nombres existent. Une chose est de savoir que ces nombres existent sans se soucier de leur nature, une autre chose est d'ignorer leur existence ou d'en entendre parler comme d'une curiosité culturelle. Significatif des contraintes culturelles pesant sur le thème de l'irrationalité est le fait que dans un manuel de troisième[12], la seule référence aux nombres irrationnels est faite sous la forme d'une question "le saviez-vous?", où l'on retrouve la citation que faisait Desanti pour présenter la "crise des irrationnelles".

Cependant nous avons une réponse par la négative à notre deuxième problème : les racines carrées des nombres n'ont pas actuellement un statut de nombres au Collège. Voyons comment nous pouvons traiter de ce problème en prenant les deux autres thèmes annoncés.

III. Le thème des approximations numériques

Pour l'aborder reprenons le thème des approximations numériques, et suivons les traces de l'objet RC, non seulement actuellement, mais aussi dans des organisations anciennes.

La réponse au problème du statut actuel de l'objet RC n'est pas évidente : si tout le monde s'accorde pour dire qu'"un nombre positif a une racine carrée (positive)", cela n'est qu'un germe de ce que pourrait être son statut : celui de fonction. Par contre, pendant très longtemps le problème du statut de l'objet RC avait une réponse : la racine carrée était classée parmi les opérations de l'arithmétique. Le problème est que l'objet RC a cessé, depuis plus de vingt ans, d'être une des opérations de

[12] Antibi et alii, Maths 3, Transmath, Nathan, 1993, p.169.

l'arithmétique, et qu'il n'arrive pas à devenir autre chose, par exemple une des fonctions de l'analyse en ce qui concerne l'enseignement au Collège.

Ce statut de l'objet RC comme la cinquième opération de l'arithmétique peut apparaître, au premier abord, un peu bizarre car cet objet vient toujours en fin de liste et y figure comme un élément qui rompt l'homogénéité de la liste des opérations : l'irrationalité du résultat de l'opération fait sortir du domaine rationnel et la détermination d'une valeur approchée rationnelle n'apparaît qu'avec la racine carrée, la division par exemple donnant toujours une valeur rationnelle exacte. Or cette rupture entre l'opération d'extraction de la racine carrée et les autres opérations de l'arithmétique est atténuée lorsqu'on considère comme système de nombres les décimaux.

L'organisation classique avait pour notion centrale celle d'opération dans le système décimal. Dans ce cadre, savoir effectuer les opérations consistait à savoir déterminer une valeur décimale exacte ou approchée. Ainsi, la question des valeurs approchées décimales apparaissait lorsque le résultat d'une opération était un réel non décimal : ce résultat peut être obtenu autant à partir de l'extraction d'une racine carrée que d'une division. Apprendre la division consistait donc à apprendre à exécuter un certain algorithme de calcul exact ou approché du quotient, et cet algorithme avait le statut de "manière dont on effectue la division". L'intégration de l'objet RC dans le continent des opérations prolongeait cette problématique : on détermine les valeurs exactes ou approchées de l'opération d'extraction de la racine carrée en exécutant un certain algorithme de calcul qui est alors "la manière dont on effectue cette opération". Cet algorithme était précisément l'algorithme traditionnel d'extraction de la racine carrée, par partage de l'écriture du nombre en tranches de deux chiffres. On peut voir la ressemblance des deux opérations dans la disposition graphique elle-même :

```
7.56. 28   |  2 75
4          |  47 x 7 =  329
3 56       |  54 5 x 5 = 2725
3 29       |
  27 28    |
  27 25    |
     3     |
```

Le problème des approximations numériques était géré dans ces systèmes didactiques par le fait que les algorithmes utilisés ont la propriété de donner des valeurs décimales successives qui donnent à chaque pas de l'opération une nouvelle décimale exacte. Cela évitait de penser le problème de la précision de l'approximation car ce problème était remplacé par celui du "nombre de décimales" : "trois décimales exactes" signifie dans ce cadre la valeur approchée par défaut à 10^{-3}. Nous n'entrerons pas dans les détails de l'analyse de l'organisation classique. Mais nous voudrions souligner le fait que la notion de valeur approchée à une précision donnée était dans ce système bien définie : ce qu'on appelle la valeur approchée à 10^{-n} près par défaut d'un nombre A n'est rien d'autre que le nombre décimal $N/10^n$, où N est le nombre entier, unique, tel que l'on ait $N/10^n \leq A < (N+1)/10^n$. Or cette notion va commencer à flotter lorsque l'organisation classique commence à disparaître.

La première étape de la désagrégation du traitement classique ne se produit pas au moment de la réforme des mathématiques modernes ni au moment de l'introduction des calculettes mais, à la fin des années cinquante, au moment où l'algorithme traditionnel d'extraction de la racine carrée commence à disparaître de l'enseignement. Par exemple, les auteurs d'un livre d'arithmétique publié en 1958[13] écrivent dans l'Avertissement de leur ouvrage :

> "En Arithmétique, conformément aux instructions officielles, nous avons insisté sur les différents procédés (table des carrés, décomposition convenable d'un nombre en produit de facteurs) qui permettent de calculer la racine carrée d'un nombre sans recourir à l'opération."

et le programme de 1962 pour les classes de Mathématiques exclut explicitement des programmes l'algorithme traditionnel :

> "Indications sur la recherche pratique de la racine carrée entière. L'étude de la règle classique de l'extraction de la racine carrée est en dehors du programme."

Il faut dire qu'à ce moment-là la réforme des années 70 se prépare déjà. Lors de la rencontre de 1959 à Royaumont, Gustave Choquet donne le ton[14] :

> "Il faut supprimer totalement de l'Enseignement Secondaire l'étude théorique des opérations dans le système décimal : multiplication, division, racine carrée. Pour les multiplications et divisions, il suffit d'en avoir la pratique ; pour la racine carrée, non seulement il faut des méthodes théoriques plus rapides, mais aussi il existe des tables, des règles à calcul, des tables de logarithme, et maintenant des machines à calculer."

Cette décomposition de l'organisation classique en ce qui concerne les approximations numériques n'a pas encore abouti à une reconstruction de la culture du numérique dans l'enseignement secondaire, en dépit des réformes successives. La réforme des mathématiques modernes s'attache plutôt à l'élucidation de la structure du numérique qu'au contrôle de sa manipulation calculatoire, c'est-à-dire qu'on s'attache plutôt à l'étude des différentes structures (groupe, anneau, corps) et de leurs propriétés qu'aux algorithmes de calcul des différentes opérations comme nous l'indique la citation précédente de Gustave Choquet. Le thème des développements décimaux des nombres réels est différent du thème des approximations décimales, et comme nous le constatons encore dans les manuels de la réforme de 1978 (pour la classe de troisième) il y a depuis lors une nette minoration du thème des approximations numériques.

Le dépassement de la minoration de ce thème doit être englobé dans le problème plus général de la reconstruction de la culture du numérique. Un mouvement puissant s'est développé à partir des années soixante avec l'apparition et la diffusion des moyens modernes de calcul, du développement de l'informatique, de l'algorithmique et du thème des algorithmes qui vient renouveler profondément la réflexion sur les procédés de calcul. Ce mouvement novateur qui touche autant la sphère savante que la sphère professionnelle va avoir des échos dans la sphère de l'enseignement, et tout d'abord dans la noosphère de ce système.

Toutefois le thème des algorithmes va voir sa portée réduite, parce qu'il sera articulé presque exclusivement avec le thème des racines carrées - alors qu'on ne

---

[13] Monge et Guinchan 1959, p.5.

[14] Choquet 1961, pp.365-372.

s'intéresse guère, par exemple, au calcul de l'inverse d'un nombre. Des anciens algorithmes de calcul de la racine carrée sont alors réhabilités à la lumière des nouveaux moyens de calcul comme l'algorithme de Héron ou l'algorithme de Théon de Smyrne[15], tandis que d'autres algorithmes voient le jour. Par exemple, en 1982, M.A. Grant propose, dans *The Mathematical Gazette*, un procédé basé sur une observation très simple[16]. Soit par exemple à calculer $\sqrt{2}$. On part d'une valeur approchée rationnelle telle $\frac{7}{5}$. On a donc :

$$(\frac{7}{5} - \sqrt{2})^2 \approx 0$$

En développant le premier membre de cette égalité approchée, il vient

$$\frac{49}{25} - \frac{14}{5}\sqrt{2} + 2 \approx 0$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt{2} \approx \frac{99}{70}$$

L'utilisation d'une puissance supérieure améliore la précision. A partir de :

$$(\frac{7}{5} - \sqrt{2})^4 \approx 0$$

on parvient ainsi à $\sqrt{2} \approx \frac{19601}{1360}$.

Le mouvement noosphérien a du mal à prendre pied dans la culture mathématique de l'enseignement secondaire, pour plusieurs raisons. Sans doute, l'algorithme de Héron, qui apparaît assez souvent dans les publications noosphèriennes, n'entre-t-il pas vraiment dans le système d'enseignement parce que le système des nombres choisi pour travailler est basé fondamentalement sur le système décimal. Mais cette raison n'est pas la seule. Les moyens matériels de calcul ne sont pas toujours disponibles, et même quand c'est le cas, l'introduction de l'algorithmique se heurte à une question tabou du système d'enseignement secondaire : celle de la délégation à des instruments fabriqués par l'homme d'une partie du travail mathématique. Ces instruments sont regardés comme des adjuvants mais ils ne s'intègrent pas vraiment dans le travail mathématique. C'est la réforme de 1985 qui introduira officiellement l'usage des calculettes dans l'enseignement au Collège et le paysage commence à changer un peu : les notions comme celles d'arrondi et de troncature sont mises en relief ; l'objet RC apparaît désormais, pour la première fois, en classe de 4ème, en interrelation avec le théorème de Pythagore, et on utilise la calculette pour déterminer des valeurs approchées des racines carrées d'entiers non carrés parfaits.

On voit ainsi se reconstituer tout un système notionnel propre à gérer la question des approximations, en association avec ce nouveau dispositif de travail qu'est la calculette. Mais le lien systématique entre le thème des approximations et celui des racines carrées, résidu de l'ancienne organisation, constitue un frein à ce développement. Alors que le déploiement conceptuel général du thème des approximations aurait permis de donner à l'objet RC une nouvelle place dans le

---

15. Pour calculer des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ par l'algorithme de Héron on considère une valeur approchée initiale x_0 de $\sqrt{a}$ et la suite définie par $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ pour $n > 0$. Si on veut utiliser l'algorithme de Théon de Smyrne, on prend aussi une valeur approchée initiale de $\sqrt{a}$ et la suite définie par $x_{n+1} = \frac{x_n + a}{x_n + 1}$, pour $n > 0$.

16. Grant 1982.

curriculum où pourraient apparaître d'une manière stabilisée des algorithmes de calcul approché de l'inverse d'un nombre ou autres autant que de racines carrées .

Ce n'est pas le thème des approximations numériques qui nous donnera une réponse au problème du statut actuel de l'objet RC dans l'enseignement secondaire français. Nous examinerons maintenant ce problème à partir du thème de l'algèbre des radicaux.

IV. Le thème de l'algèbre des radicaux

Nous pourrions penser, en regardant les programmes actuels, que le statut de l'objet RC est le suivant : objet sur lequel on fait des multiplications, des divisions. Or les manipulations opératoires par elles-mêmes ne suffisent pas à donner un statut à l'objet sur lequel on calcule car la question de la raison d'être de ces manipulations doit être posée. Remarquons simplement que l'algèbre des radicaux actuelle est un résidu d'un corpus de règles calculatoires qui a pu atteindre autrefois un degré supérieur de sophistication, comme le montre l'extrait suivant d'un ouvrage - Algebra de G.Chrystal - dont la première édition date de 1886 concernant les exercices demandés [17] :

"Rationalise the following :

(40.) $3.5^{1/3} - 4^{1/5}$.

(41.) $\sum\sqrt{(b + c - a)}$.

(42.) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{6}$.

(43.) $3.2^{2/3} + 4.2^{1/3} - 1$.

(44.) $a^{1/3} + b^{1/3} + c^{1/3}$.

(45.) $2^{1/4} + 2^{1/2} + 1$.

(46.) If $u = x\sqrt{(1 + y^2)} + y\sqrt{(1 + x^2)}$, then $\sqrt{(1 + u^2)} = xy + \sqrt{((1 + x^2)(1 + y^2))}$

(47.) Show that

$$\frac{2}{\sqrt{(y - z)} + \sqrt{(z - x)} + \sqrt{(x - y)}} = \frac{(y - z)^{3/2} + (z - x)^{3/2} + (x - y)^{3/2} + (y - z)^{1/2}(z - x)^{1/2}(x - y)^{1/2}}{x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy}$$

(48.) If $x = 1/(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})$, $y = 1/(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $z = 1/(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})$, $u=1/(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

then $\prod_{xyz}(-x + y + z + u)/(\sum x - u)^3 = \sum(b + c - a)/8abc$."

Les manipulations formelles dans le livre de G.Chrystal avaient comme but la simplification des expressions à calculer. Actuellement, les manipulations formelles des radicaux sont aussi faites dans le sens de simplifier : voilà donc le mot-clé - simplifier, obtenir une forme plus simple. Or la pertinence de cette simplification n'est

[17] Chrystal 1886, p.200.

plus aujourd'hui celle qu'elle avait au temps de G.Chrystal.

Par exemple, aujourd'hui, avec les calculettes, il n'y a pas plus de raison de favoriser une expression du type $\frac{\sqrt{2}}{2}$ plutôt que l'expression $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Les outils mathématiques qui permettraient de choisir, dans un ensemble d'expressions numériquement égales, l'expression de meilleur rendement en utilisant les calculettes ne sont pas disponibles au Collège où pourtant apparaît ce type de manipulations. Le mot-clé de simplification doit être regardé dans une dialectique entre le formel et le fonctionnel qui reste bien ossifiée au niveau du Collège. Donnons un exemple :

Considérons le problème suivant qui aurait pu apparaître dans un manuel de 1980 :

Calculer à 10^{-4} près $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ en prenant une valeur approchée au millième près de $\sqrt{2}$

La réponse attendue consiste à transformer cette expression sous la forme $a+b\sqrt{2}$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$, puis à effectuer le calcul en prenant 1,414 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.

On a ainsi : $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4140$.

Or, voyons que la forme simplifiée fournit un résultat moins bon que la forme "brute". Pour cela introduisons les fonctions :

$\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\psi(x) = x - 1$.

On a : $\varphi(\sqrt{2}) = \psi(\sqrt{2})$.

Prenons alors la valeur $y = 1{,}414$ pour valeur approchée de $\sqrt{2}$. On a alors :

$\varphi(1{,}414) = \frac{1}{2{,}414} \approx 0{,}4142$ et $\psi(1{,}414) = 0{,}4140$.

La calculette donne $\varphi(\sqrt{2}) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \approx 0{,}4142135624$ ce qui est plus proche de $\varphi(1{,}414)$.

Ceci pourrait être prévu. Le calcul des valeurs absolues des dérivées en ce point :

$\left|\varphi'(\sqrt{2})\right| \approx 0{,}17$ et $\left|\psi'(\sqrt{2})\right| = 1$

montre que la dérivée de $\psi(x)$ en $\sqrt{2}$ est, en valeur absolue, presque 6 fois supérieure à la dérivée de $\varphi(x)$ en ce même point.

De même, on pourrait montrer d'autres exemples où c'est l'expression simplifiée qui serait la plus intéressante. Considérons par exemple le même type de problème qu'auparavant en prenant l'expression $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$. Si on rend rationnels les dénominateurs, il vient :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3} \approx -3{,}7320.$$

En utilisant la même méthode, considérons les fonctions :

$$\varphi_3(x) = \frac{1 + x}{1 - x} \quad \text{et} \quad \psi_3(x) = -2 - x$$

On a ici : $\left|\varphi_3'(\sqrt{3})\right| = \dfrac{2}{(\sqrt{3} - 1)^2} = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732$, tandis que $\left|\psi_3'(\sqrt{3})\right| = 1$.
On doit donc s'attendre à ce que l'expression $\psi_3(x) = -2 - x$ soit la plus "intéressante". On a en effet $\varphi_3(1{,}732) = \dfrac{-2{,}732}{0{,}732} \approx -3{,}7322$ et $\psi_3(1{,}732) = -2 - 1{,}732 = -3{,}7320$. La calculette donne $\varphi_3(\sqrt{3}) \approx -3{,}73205$, ce qui confirme bien notre prévision.

On observera que, dans les deux cas examinés, le problème que nous soulignons ici reste normalement *invisible*. Cet exemple permet d'éclairer un phénomène encore mal pris en compte aujourd'hui. En renouvelant - potentiellement - les conditions de la dialectique du formel et du fonctionnel, les moyens de calcul modernes redonnent vie à cette dialectique - que la tradition, sans l'évacuer, avait laissé s'ossifier. On voit ainsi que les modifications du système de travail mathématique appellent une conceptualisation neuve, nécessaire en l'espèce pour réarticuler les plans du numérique et de l'algèbrique, et cela dès le Collège.

Nous l'avons déjà dit, le mot-clé de simplification doit être regardé dans une dialectique entre le formel et le fonctionnel qui reste largement absente au niveau du Collège. Ou pour le dire autrement, même au niveau du travail mathématique au Collège, les moyens utilisés devraient être en concordance avec les buts poursuivis. L'enseignement au Collège privilégie les manipulations consistant à "rendre rationnel le dénominateur", comme si, devant une expression ayant des radicaux dans les dénominateurs, cette opération était toujours pertinente. Or ceci n'est plus vrai si on veut accorder moyens et fins : par exemple pour calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $g(x) = x - \sqrt{x^2-1}$ il convient de passer à l'expression $\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$. D'autres exemples pourraient être donnés.

Dans le curriculum du Collège, les différentes réformes n'ont pas touché à ce thème qui reste un point isolé auquel personne ne sait attribuer un statut. La réforme des mathématiques modernes n'a pas non plus touché à ce thème : la consigne est encore la même - "simplifier" ou "rendre rationnels les dénominateurs" - sans qu'on s'interroge sur la possibilité et l'intérêt de faire ce type de manipulations. Cette réforme a introduit les notions de groupe, d'anneau, de corps mais ne passera pas le cap des extensions de corps et notamment des extensions quadratiques, ce qui aurait conduit à reformuler le problème : "mettre l'expression A sous la forme $a+b\sqrt{3}$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$", comme on le fait en ce qui concerne l'étude des nombres complexes.

La raison des calculs effectués ainsi au Collège reste obscure, y compris pour les professeurs. Et ce ne sera pas par l'examen de l'algèbre des radicaux que nous pourrons répondre d'une manière positive à notre problème du statut de l'objet RC.

Voilà les points essentiels que nous voulions vous présenter pour aborder nos deux problèmes de départ : l'objet RC vu comme un objet "à problèmes" et le statut

actuel de cet objet. L'étude de ces deux problèmes nous a fait rencontrer un double paradoxe : d'une part l'objet RC est l'un des objets les plus "remarqués" de l'enseignement de base, d'autre part il est un objet ignoré par les réformes successives du système d'enseignement français. Or la compréhension de ce double paradoxe passe par l'identification d'un phénomène d'arrêt de la transposition didactique.

V. Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique

Nous l'avons dit, l'objet RC souffre de sa singularité, qui est pourtant relative. Car l'étrangeté de cet objet disparaît si on le regarde comme l'une des fonctions élémentaires de l'analyse mathématique, c'est-à-dire comme un élément d'une classe d'objets qui possèdent pour l'essentiel les mêmes caractères que lui : par exemple, la fonction racine carrée prend des valeurs irrationnelles mais les fonctions trigonométriques, logarithmiques ou exponentielles en prennent aussi, etc. Les trois thèmes (irrationalité, approximations numériques, algèbre des radicaux) associés aux pathologies de l'objet RC sont finalement plus généraux et dès lors que l'on compare *la fonction* racine carrée avec *les autres fonctions*, elle perd son "étrangeté".

Le problème curriculaire principal posé par la modernisation mathématique de l'enseignement est en fait celui du passage du logarithme à la fonction logarithme, des racines carrées à la fonction racine carrée, c'est-à-dire le problème de la primauté à donner à la notion de *fonction comme concept organisateur du travail mathématique*. Ce problème curriculaire est celui de la réorganisation de l'enseignement des mathématiques dès le Collège, autour de la notion de fonction, c'est-à-dire que le travail transpositif doit être repris à propos d'un des objets fondamentaux des mathématiques savantes qu'est l'objet "fonction".

D'une manière un peu brutale, nous dirons que la notion de fonction est un objet manquant dans le curriculum, même si elle est un thème d'étude au Lycée et est officiellement introduite au Collège dans une rubrique des programmes. Plus précisément, nous dirons que la notion de fonction existe en tant qu'objet d'étude mais non comme outil de travail et de pensée mathématiques. Ou, pour le dire autrement, la notion de fonction n'a pas été intégrée à la culture mathématique de l'enseignement secondaire. Donnons un exemple emprunté au travail de Marianna Bosch[18] de ce que nous voulons dire par là à propos de la proportionnalité et de la fonction linéaire.

Considérons le problème suivant :
on a acheté 12 sachets de bonbons pour 27 francs. Combien auraient coûté 3 sachets de bonbons ?

La solution traditionnelle utilisant le coefficient de proportionnalité consiste à dire que, 3 étant égal à 12/4, le prix à payer pour 3 sachets sera le prix payé pour 12 divisé par 4, soit 27/4. La solution utilisant la notion de fonction utiliserait la propriété de linéarité de la fonction. Désignons par f la fonction qui au nombre de sachets associe le prix à payer. On a $f(12)=27$. Par ailleurs $f(12)=f(4\times 3)=4f(3)$. D'où $4f(3)=27$ et donc $f(3)=27/4$. Dans ce dernier cas, la notion de fonction est un outil de travail mathématique dans la résolution d'un problème.

---

[18] Bosch 1991.

L'enseignement au Collège conserve dans son organisation des traces de l'ancienne théorie des rapports et proportions. Cependant les formulations proportionnalistes y ont été remplacées, en grande partie, par les formules. Ainsi, on ne dira plus, que l'aire d'un cercle est proportionnel au carré de son rayon, on écrira $A = \pi.r^2$. Ce changement constitue une perte du point de vue fonctionnel et dynamique, présent à l'état de germe dans les formulations proportionnalistes. La formule de l'aire d'un triangle n'est pas considérée, en effet, comme l'expression d'une fonction à deux variables, mais on la verra statiquement. Il existe ainsi un déficit qui affecte la culture mathématique de l'enseignement secondaire : la notion de fonction n'est qu'un thème d'étude particulier à ce niveau d'études. Alors qu'elle est une notion centrale du savoir savant, elle n'a pas jusqu'ici été intégrée dans la culture mathématique du secondaire. Il y a là un échec de la transposition didactique.

Cet échec bloque l'évolution du statut de l'objet RC, en interdisant le passage du cadre des nombres au cadre des fonctions, changement qui enrichirait l'univers mathématique et l'ensemble des instruments du travail mathématique, en permettant des formulations en termes de propriétés de fonctions. La solution fonctionnaliste, disponible à la fin des années soixante en ce qui concerne la fonction racine carrée au niveau des études supérieures, ne sera pas transposée au niveau élémentaire. Pour ne considérer ici cette discontinuité entre la culture mathématique savante et la culture mathématique du secondaire que du point de vue des définitions, examinons ce que nous disent les auteurs d'un ouvrage universitaire[19] :

> " le nombre $\sqrt[n]{y}$ est défini comme étant l'unique solution positive de l'équation $x^n=y$, où y est un nombre réel positif donné.
> (...)
>
> REMARQUE 1. - Lorsque n=2, l'élément $\sqrt[2]{y}$ s'appelle racine carrée de y, et se note $\sqrt{y}$. Ainsi, nous avons prouvé que tout nombre réel positif admet une racine carrée et une seule."

Pour ces auteurs, il n'existe qu'*une et une seule* racine carrée qu'est la solution positive de l'équation $x^2 = a$ (pour a positif). Or, il existe même actuellement dans la culture du système d'enseignement secondaire une ambiguïté à ce propos. Pour le montrer, citons un court article publié dans le Bulletin de l'APMEP en décembre 1991[20] :

> "Comment un professeur de mathématiques peut-il
> -affirmer, en terminale :
> "Tout réel non nul a, dans $\mathbb{C}$, n racines n-ièmes donc 9 a pour racines carrées 3 et -3"
> -avoir dit, dans les classes précédentes :
> "9 a une racine carrée : 3"
> et savoir que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$?
> Et comment s'étonner alors que l'équation $x^2 = 9$ n'ait, pour de nombreux élèves, qu'une seule solution, dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$?"

---

[19] Chambadal et Ovaert 1966, p.434.
[20] Pelé 1991, p.655.

Même la réforme des mathématiques modernes où la racine carrée est présentée sous un habillage fonctionnel ne la présente pas vraiment comme une fonction. Symptôme de cette situation, tel manuel de l'époque, paru dans la collection Queysanne et Revuz, indique :

> "Tout réel strictement positif a admet dans IR deux racines carrées opposées l'une de l'autre : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$."

Soulignons le fait que les auteurs considèrent ici l'existence de deux racines carrées ce qui laisse supposer que le passage au domaine des fonctions n'est pas réellement fait. Toutefois, deux ans plus tard, dans une autre édition de leur ouvrage, les mêmes auteurs écriront :

> "Si a est un réel positif, l'unique réel positif x tel que $x^2 = a$ s'appelle la racine carrée de a dans IR_+, et se note $\sqrt{a}$."

Cette modification reste ponctuelle. Sinon, en effet, il n'aurait plus d'ambiguïté sur la question de la nomination de l'objet RC. L'ambiguïté peut être levée aisément si l'on considère la fonction "racine carrée", et non le nombre "racine carrée". Il ne revient pas au même de chercher, pour un nombre réel positif a quelconque, un nombre b tel que $b^2=a$, ou de chercher une fonction r telle que $r^2(x)=x$, pour tout x où elle est définie. Ce qu'on cherche alors, en effet, n'est plus un nombre mais une fonction, et ce ne sont plus les propriétés des nombres (par exemple être positif ou négatif) qui importent, mais les propriétés des fonctions, comme par exemple la continuité.

Nos deux problèmes ont maintenant une réponse. C'est parce qu'il y a un arrêt de la transposition didactique que l'objet RC est vu comme un objet "à problèmes" - situation dont l'ambiguïté du statut de cet objet apparaît alors comme un symptôme. La reprise de la transposition didactique qui apparaît nécessaire suppose un profond changement du rapport institutionnel à l'objet "fonction". C'est cet objet qui doit permettre de repenser de manière unitaire l'ensemble des problèmes que nous avons examinés, problèmes qui constituent autour de l'objet RC un véritable abcès de fixation.

Les mathématiques de base sont fondées aujourd'hui sur deux piliers étroitement solidaires : le système des nombres et le système des fonctions. C'est par leur solidarité que ces deux piliers sont susceptibles de permettre d'établir un nouvel ordre didactique. La reprise de la transposition didactique est un problème difficile au sujet duquel nous nous sommes contentés ici de souligner quelques points clés. Un travail transpositif de cette nature nécessite tout un engagement collectif, et il n'existe pas aujourd'hui de solution "clé en main".

Bibliographie

ANTIBI *et ALII* (1993), *Maths 3*, Transmath, Nathan, Paris.

ASSUDE T. (1992), *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "racine carré" et analyse du curriculum*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier et IREM d'Aix-Marseille.

BIANCAMARIA P. et DEHAME E. (1972), Mathématique 3e, Collection Queysanne-Revuz, Nathan, Paris.

BIANCAMARIA P. et DEHAME E. (1974), Mathématique 3e, Collection Queysanne-Revuz, Nathan, Paris.
BOSCH M. (1991), *El Semiotic i l'instrumental en el tractament clàssic de les situacions de proportionalitat*, Treball de Recerca presentat al departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.
CHAMBADAL L. et OVAERT J.-L. (1966), *Cours de Mathématiques, Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris.
CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, deuxième édition 1991.
CHOQUET G. (1961), *L'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire et à l'école secondaire*, Bulletin de l'APMEP, n°215.
CHRYSTAL G. (1886), *Algebra*, Chelsea Publishing Company, New York, septième édition 1964.
DESANTI J.-T. (1967), Une crise de développement exemplaire : la "découverte" des nombres irrationnels, *Logique et connaissance scientifique*, Encyclopédie de la Pléiade, vol.22, pp.439-464.
DOLCIANI M. *et alii* (1968), *Mathématiques de l'école moderne, Secondaire V, Algèbre et Trigonométrie*, Centre de Psychologie et de Pédagogie inc., Montréal.
FINE N.J. (1976), Look, Ma, No primes, *Mathematics Magazine*, vol.49, n°5, p.249.
GRANT M.A. (1982), Approximating Square Roots, *The Mathematical Gazette*, vol.66, n°437, pp.230-231.
MICHEL P-H. (1950), *De Pythagore à Euclide, Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidiennes*, Société d'Edition "Les Belles lettres", Paris.
MONGE M. et GUINCHAN M. (1959), *Mathématiques Classe de 3e*, Belin, Paris.
PELÉ C. (1991), $\sqrt{9}$, Racine(s) Carrée(s) ?, *Bulletin de l'APMEP*, n°381, p.655.
WATERHOUSE W.C. (1986), Why Square Roots are Irrational, *The American Mathematical Monthly*, vol.93, n°3, pp.213-214.