

5.
L'ACTION CONJOINTE PROFESSEUR-ÉLÈVES
DANS UN SYSTÈME DIDACTIQUE ORIENTÉ VERS LES MATHÉMATIQUES
Teresa Assude & Alain Mercier

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'étude de classes de mathématiques dans l'enseignement primaire. Pour aborder cette étude nous allons prendre en compte certaines catégories définies pour appréhender l'action du professeur (Sensevy 2001 ; Schubauer-Leoni et Leutenegger 2002), développées dans le cas princeps de la « Course à 20 » (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000), notamment les trois dimensions de l'action enseignante que sont la mésogénèse, la topogénèse et la chronogénèse. Nous nous centrerons par ailleurs sur les moyens sémiotiques mis au travail par les professeurs et les élèves dans les classes : ils permettent de décrire leur action conjointe relativement au savoir en jeu. L'observation didactique nécessite de spécifier les enjeux de toute relation didactique instituée - des savoirs, ce que nous ferons par une analyse *a priori* conduite en trois moments, selon trois points de vue différents. Ce chapitre vise surtout la confrontation de certains éléments théoriques produits dans le cadre d'un travail de recherche avec les données empiriques, ce qui nous conduira à mettre en évidence certains phénomènes didactiques nouveaux et à en rendre compte.

1. COMMENT ABORDER LE PROBLÈME ? ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Notre première question – comment aborder le problème de l'action conjointe professeur-élève ? – n'est pas nouvelle en principe pour la didactique des mathématiques qui a comme but, dès sa fondation, l'étude des *systèmes didactiques* ayant pour enjeu la diffusion, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le système didactique est alors défini comme l'ensemble des relations et des interactions entre plusieurs instances (le savoir mathématique, le professeur, l'élève) et plusieurs niveaux de sur-systèmes (le système d'enseignement, la noosphère, la société). Toutefois, reposer aujourd'hui cette même question a un double intérêt : cela permet de mettre l'accent sur le centrage nécessaire de toute analyse d'une relation didactique sur ses enjeux, les savoirs ; cela permet ensuite de s'intéresser aux moyens d'observation, de description ou d'analyse de cette action que nous qualifions de conjointe après avoir montré la participation des élèves à l'enseignement (Mercier 1997). En quoi l'action des professeurs et des élèves est-elle conjointe ? Est-elle nécessairement conjointe ? A travers quels descripteurs pouvons-nous identifier ce caractère ? Pourquoi parler d'action didactique conjointe lorsque la question initiale est relative à l'action du professeur ?

Nos descripteurs sont les rapports des élèves et du professeur aux objets et organisations mathématiques qu'ils utilisent localement ou régulièrement, soit principalement des *systèmes sémiotiques*. Les systèmes sémiotiques sont donc des ensembles d'objets (mots, symboles ou gestes) qui servent à la fois de substituts de l'activité matérielle dont ils rendent compte - de notations, de rappel et support des pratiques régulières de cette activité symbolique substitutive - des techniques, d'emblème de l'activité formelle qu'ils permettent de réaliser, ainsi devenue une technique intellectuelle partagée - un savoir.

En effet, élèves et professeur s'approprient ou inventent des systèmes sémiotiques à l'aide desquels ils développent des pratiques que nous décrivons comme des *organisations praxéologiques*. Ces organisations sont en principe et officiellement, dans le cas qui nous intéresse, de type mathématique. Les organisations praxéologiques sont prises au sens de Chevallard (1992) comme des quadruplets formés en [*types de tâches, techniques, technologies et théories*] : nous utiliserons surtout les trois premiers éléments car dans l'enseignement élémentaire le travail de classe ne dépasse ce niveau que de manière tout à fait exceptionnelle. Nous prenons le terme « technique » au

sens de « manière de faire » une certaine tâche ou type de tâche. Pour préciser la place des techniques dans le travail mathématique, nous allons définir trois types de techniques :

-les techniques *invisibles* sont celles qui permettent de produire un résultat mais ne sont pas explicitées car leur usage n'implique ni commentaire ni contrôle langagier : pour qui les met en oeuvre, elles sont muettes, la pratique démontrée est le procédé de leur transmission ;

les techniques *faibles*¹ sont celles qui permettent de produire un résultat et qui sont explicitées : la manière de faire peut être montrée et commentée par un expert ou observée par un apprenti comme un savoir en situation ;

les techniques *fortes* sont celles qui produisent un résultat attendu, qui sont non seulement explicitées mais aussi justifiées par une technologie ou théorie explicites, au sens de Chevallard (1992 ; 1999).

Sans vouloir faire un parallèle étroit, nous pouvons faire des correspondances avec la théorie des situations didactiques, en ce qui concerne le rapport des élèves aux différentes techniques. Dans le cas des techniques invisibles, l'élève produit une réponse et il est dans un rapport d'action ; dans le cas des techniques faibles, l'élève est non seulement dans un rapport d'action (il produit une réponse) mais aussi dans un rapport de formulation (il décrit ou formule un discours de la technique) ; dans le cas des techniques fortes l'élève est dans un rapport d'action (il produit), dans un rapport de formulation (il décrit mais il justifie aussi cette technique – il formule un discours sur la technique) et éventuellement dans un rapport de validation (au cas où la justification devient aussi une validation). Ainsi, nous tissons un lien entre les niveaux du travail didactique et les types de techniques qui s'y mettent en place.

Les indicateurs de l'action observée sont donc pour nous fondés sur les objets avec lesquels professeur et élèves entrent en rapport et plus particulièrement ceux dont l'usage montre une fonction sémiotique. Le travail d'interprétation des rapports à ces objets va nous permettre de préciser comment les systèmes sémiotiques rendent possible une action conjointe du professeur et des élèves, notamment à travers des organisations praxéologiques par lesquelles nous décrivons les savoirs mathématiques qui vivent dans la classe, la manière dont ils se développent et s'organisent. Nous préciserons encore certaines des fonctions des systèmes sémiotiques dans la dynamique des milieux (mésogénèse), dans la production des différentes positions institutionnelles du professeur et des élèves et dans le partage de leurs responsabilités (topogénèse) et enfin, dans la progression du temps par la production du savoir commun (chronogénèse) : certaines de ces fonctions relèvent de la construction d'une mémoire institutionnelle (Matheron et Mercier, 2005) et d'une mémoire du savoir (Matheron, 2000).

L'invention et l'usage de systèmes sémiotiques évolutifs s'observe en mathématiques savantes (Matheron, 2002 ; Serfati, 2005), comme en mathématiques scolaires (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Mercier, 2000 ; Bosch et al., 2003 ; Assude, Mercier, Sensevy, accepté) mais aussi dans d'autres disciplines dont nous ne parlons pas dans ce travail (Tiberghien, 1994 ; Schubauer-Leoni et Leutenegger, 2005 ; Sensevy et al, 2005). Un certain nombre de travaux en didactique des mathématiques de langue française se sont intéressés aux outils sémiotiques comme représentations calculables chez Vergnaud (1981) ou registres de représentation (Duval, 1995), ils les ont étudiés à travers la distinction ostensifs/non ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999 ;), et dans un autre sens du terme de représentation (Brousseau, 2005), mais bien d'autres auteurs travaillent la question (Steinbring et al, 1998 ; Bartolini-Bussi et Mariotti, 1999 ; Contreras et al, 2005). Nous n'en ferons ni l'inventaire ni la critique car ce qui nous intéresse d'abord est le terme « sémiotique » en tant qu'adjectif dans son sens primitif, celui qui « concerne l'observation » et qui est « apte à noter ». Car les systèmes sémiotiques, « aptes à noter » et à « marquer d'un signe », sont de ce fait des objets et des systèmes d'objets observables, ils peuvent donc devenir des « signes pour l'observation ». Lorsque des systèmes de symboles et de discours associés se stabilisent dans une forme correspondant à des termes de la théorie mathématique connue dans la classe, des *notions*, nous désignerons les symboles par le terme ordinaire en mathématiques de *notations*. Le premier

¹ Nous prenons ici les termes faible et fort comme on peut parler en physique d'interactions faibles et interactions fortes : pour nous faible et fort correspond au lien entre technique et discours.

niveau d'observation d'unités élémentaires du savoir [notions-notations], est donc celui des techniques et de leur discours d'accompagnement (il s'agira ici de savoir mathématique) . Notre hypothèse est donc précisément que l'action conjointe professeur-élèves se manifeste et se construit relativement aux structures d'action dans la relation didactique (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni 2000) :

« au sein du système didactique, le professeur doit agir (définir, réguler, dévoluer, instituer pour : produire les lieux du professeur et de l'élève (effet de topogenèse) ; produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage (effet de chronogenèse) ; produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports)à ces objets (effet de mésogenèse) » (p.267),

mais que l'observation de cette action est nécessairement spécifiée dans les formes que nous avons rapidement décrites ici.

Nous allons nous placer dans ce cadre et nous utiliserons les descripteurs précédemment définis (types de tâches, types de techniques, systèmes sémiotiques) pour observer comment le professeur et les élèves développent une activité commune pour le maintien de la relation didactique - notamment lors de la définition et la dévolution du jeu - et comment la régulation du jeu se fait par les techniques. De ce fait, dans cette étude, nos analyses se situeront résolument au niveau du système didactique et des phénomènes didactiques relatifs aux trois instances qui le composent. Néanmoins, les actions des élèves individuels seront pour nous des indices pour construire les caractères de la position d'élève dans une classe observée. Bien qu'une approche des épisodes concernant personnellement les élèves ou les professeurs soit possible selon une méthode semblable (Mercier, 1995), nous ne l'engagerons pas ici, si ce n'est ponctuellement et dans le cas du professeur qui est l'objet principal de notre investigation.

2. COMMENT ABORDER LE PROBLÈME ? ELÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Nous analyserons un ensemble de données issu de la deuxième phase du programme de recherche « *Caractérisation des pratiques d'enseignement et détermination de leur efficacité. La lecture et les mathématiques au Cours Préparatoire* »². Notre corpus a été constitué à partir de deux séances de mathématiques qui ont été préparées et mises en œuvre par trois professeurs (Rita, Renée, Roger³) de CP en mars 2005. Nous avons ainsi pour chacun d'eux un ensemble important de matériaux : la séance de préparation, deux séances de classe filmées et transcrites et des entretiens après coup. A ce corpus se rajoute aussi un ensemble de cinq séances réalisées par ces mêmes enseignants (à leur initiative cette fois) et observées pendant les années scolaires 2003/2004 et 2004/2005 : nous pouvons donc confirmer une interprétation locale par des observations sur un long terme, si nécessaire.

Pour analyser notre corpus, nous avons procédé de la manière suivante. Nous avons mené une analyse *a priori* du savoir en trois temps : (1) une analyse descendante qui nous permet d'analyser le savoir supposé être l'enjeu du jeu (enjeux mathématique et institutionnel) ; (2) une analyse ascendante qui nous permet de voir les possibles techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre (les jeux possibles de l'instance élève) ; (3) ces deux types d'analyse nous permettent de voir certains problèmes didactiques auxquels les professeurs peuvent être confrontés (les jeux possibles de l'instance professeur sur celle de l'élève). Cette triple analyse *a priori* nous permet ensuite de faire un découpage des séances en un certain nombre d'unités autour des types de tâches effectivement proposés aux élèves, ainsi que des techniques qui leur sont indiquées. Nous avons ainsi produit un synopsis de chaque séance. Nous observons enfin (à partir des découpages obtenus) certains faits lorsqu'ils nous semblent significatifs du point de vue de l'un des quatre types d'intervention enseignante (définition, dévolution, régulation, institutionnalisation) ainsi que de l'une de leurs trois fonctions (mésogenèse, chronogenèse et topogenèse), faits qui nous permettent d'identifier un certain nombre de phénomènes didactiques.

² Recherche produite en réponse à un appel à projets du PIREF (2004-2006).

³ Ces prénoms ne correspondent aux prénoms réels, ils sont choisis au hasard dans une liste : nous garantissons ainsi l'anonymat des acteurs..

3. ANALYSE A PRIORI : LA DOUBLE INÉGALITÉ ET LES TECHNIQUES

Dans le cadre de cette recherche, chaque fois qu'ils ont été observés, les professeurs participant à la recherche devaient choisir une situation qu'ils estimaient représentative de leur pratique habituelle. Mais en mars 2005 il leur a été proposé de mettre en œuvre un même canevas de situation, qu'ils devaient développer pendant deux séances consécutives. Notre corpus découle essentiellement de ces observations. Le canevas que les professeurs expérimentés travaillent lors d'une réunion convoquée à notre demande, est le suivant :

- deux séances en continuité (l'une un jour et l'autre le jour suivant) comprenant des moments de résolution de problèmes et des moments d'exercices ;
- la question proposée est inspirée de *la situation des fleurs* de ERMEL⁴ CP ;
- cette question doit comporter au moins deux étapes : dans la première étape on demande aux élèves de trouver « *combien de bandes de 5 étoiles il faut pour mettre sur un sapin un certain nombre d'étoiles* » avec un travail collectif dans le cas de neuf étoiles et onze étoiles ; dans la deuxième étape on demande aux élèves de trouver « *combien de boîtes de 6 œufs il faut pour ranger un certain nombre d'œufs* » avec un travail collectif dans les cas de neuf et quinze œufs.

Nous ne rendons pas compte de cette réunion ni des motifs des chercheurs qui proposent l'intervention dont nous observons ici les résultats : notre travail d'analyse se situe en amont, comme démonstration de la manière dont peut être conduite le premier temps d'une analyse didactique de l'action conjointe professeur-élève.

3.1 Analyse a priori, premier temps

Nous sommes en présence d'une question qui, du point de vue d'une modélisation mathématique standard, relèverait par exemple de la division euclidienne dans l'ensemble des nombres naturels. On peut cependant définir la division euclidienne des deux manières suivantes :

Etant donnés deux nombres naturels a et b ($b \neq 0$), il existe un nombre entier naturel n et un seul tel que :

$$nb \leq a < (n+1)b.$$

Le nombre a est le dividende, b le diviseur et n le quotient.

La division euclidienne peut aussi être caractérisée par les deux relations :

$$a = nb + r \text{ et } r < b, r \text{ étant le reste.}$$

La question n'est pas sans importance car cela correspondra peut-être à des stratégies différentes dans la résolution du problème, des stratégies que nous interpréterons en leur attribuant l'une des deux définitions, l'un des modèles ci-dessus.

Dans le problème des sapins, nous avons $a = 9$ et $b = 5$ dans le premier cas et $a = 11$ et $b = 5$ dans le deuxième. Nous avons alors : $1 \times 5 \leq 9 < 2 \times 5$. On remarque cependant que la réponse n'est pas le quotient 1 mais son successeur 2, vue la contrainte de prendre des bandes complètes en nombre suffisant pour disposer de 9 étoiles. On remarque aussi que la contrainte de prendre le nombre

⁴

minimum de bandes d'étoiles est implicite, ce qui est normal dans un énoncé de la vie courante mais peut faire problème puisque toute réponse supérieure à 2 pourrait être acceptée. Dans le deuxième cas, nous avons $2 \times 5 \leq 11 < 3 \times 5$, la réponse étant donc 3 (ou plus). Dans ce cas, nous pouvons anticiper une difficulté plus grande car des élèves pourraient être conduits à raisonner sur $11 = 10 + 1$ ou $11 = 5 + 5 + 1$ qui sont des décompositions plus « usuelles » et conduisent au quotient comme nombre de bandes complètes, ce qui correspond à une approximation par défaut à augmenter d'un reste d'étoiles.

Le problème des œufs n'est pas semblable du point de vue de la situation quotidienne qu'il évoque puisque l'on remplit des boîtes (on partage les œufs dans des boîtes) au lieu de faire des groupements de bandes à partir de la collection d'étoiles. Mais il se modélise aussi par la double inégalité : étant donné $a=9$ et $b=6$, on a : $1 \times 6 \leq 9 < 2 \times 6$; ici encore la réponse est 2 (successeur du quotient pour qui pense le modèle en termes de division euclidienne) au moins ; pour $a = 15$ et $b=6$, on a : $2 \times 6 \leq 9 < 3 \times 6$, et la réponse est alors 3 au moins.

Une même technique rassemble alors les deux situations, celle des sapins et celle des boîtes d'œufs, en un type de tâche mathématique unique : « *étant donné a et b trouver le nombre n tel que $(n-1)b \leq a < nb$* ». Le modèle « double inégalité » de la division euclidienne y est mobilisé dans un usage particulier que nous avons signifié en introduisant une légère variation dans son écriture (n note ici le successeur du quotient, qui est le nombre cherché) pour signifier que l'on ne peut pas penser directement le problème dans les termes de la division, le modèle culturel disponible dont on dit par abus de langage que le problème « relève ». Il serait donc sans doute possible de modéliser un tel problème par d'autres savoirs mathématiques : ce « problème de division euclidienne » deviendrait alors un problème d'un « autre type ». On peut considérer que la modélisation arithmétique, en tant que clé d'accès à une mathématisation de la situation proposée, appartient à la culture des professeurs et pourrait donc leur fournir des appuis conceptuels et des pratiques de référence pour anticiper sur la séance et imaginer des techniques accessibles à leurs élèves. Car ce n'est pas la pertinence d'un modèle mathématique formel qu'on veut faire travailler aux élèves de CP qui en ignorent tout. L'enjeu de la question qui leur sera posée n'est pas non plus la production d'une modélisation initiale. Notre mathématisation sert à montrer par exemple que le problème nécessite de penser un encadrement, qu'il y a une grande difficulté de penser cet encadrement et de désigner le terme de la relation qui fait réponse. Cette difficulté est un élément important de la situation rencontrée par les élèves et les professeurs. Nous nous attarderons à analyser par la suite comment ce problème a été pris en charge dans chacune des trois classes : comment les professeurs ont viabilisé la situation et comment ils ont imaginé un modèle à la portée des élèves de six ans. Ce faisant, nous considérons *a priori* que l'enjeu d'un enseignement autour de ces deux situations ne peut être que la constitution des premiers éléments d'une technique qui demeurera nécessairement locale et sera oubliée par les élèves (même s'ils auront à « s'exercer » dans la deuxième partie de l'enseignement prévu)⁵.

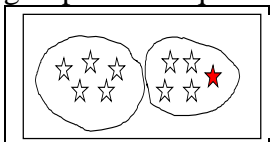
3.2 Analyse *a priori*, deuxième temps

Voyons quelques unes des techniques que les élèves pourraient mettre en œuvre pour produire une réponse.

Une première technique associe deux autres techniques connues, le dessin et les groupements : ainsi l'élève dessine le nombre d'étoiles, les groupe par cinq, complète le dernier groupe par des étoiles

⁵ C'est d'ailleurs le motif d'un professeur de ZEP impliqué dans notre recherche pour refuser d'entrer dans ce travail. Le programme ne comprend pas explicitement ce type de tâches, les rencontrer « pour voir comment ils saisissent l'occasion de mobiliser leurs connaissances dans un problème nouveau » mettrait inutilement ses élèves en difficulté, dit-il. La résolution exploratoire de problèmes semble impossible en zone protégée. Des études montrent pourtant (Erdogan et Mercier, 2006) que les problèmes de ce type ont une fonction didactique essentielle dans le travail du contrat didactique : ils permettent de déplacer les lignes du partage topogénétique et d'indiquer aux élèves le fil rouge du projet d'enseignement en leur désignant des problèmes à venir qu'ils peuvent attaquer et résoudre localement avec leurs moyens actuels. Ce ne sont donc pas seulement des « problèmes de réinvestissement » mais aussi des problèmes que l'on pourrait dire d'investissement, parce qu'ils motivent les apprentissages actuels en montrant leur bénéfice futur.

marquées d'une couleur différente, si des étoiles isolées demeurent, et compte le nombre de groupes de cinq. *Ci-dessous, le dessin pour neuf étoiles.*



Une deuxième technique utilise la bande numérique pour réaliser un compte double. Compte répété de groupes de cinq nombres de la bande et compte parallèle de ces comptes pensés comme bandes élémentaires jusqu'à dépasser le nombre d'étoiles demandé : le compte des comptes, gardé en mémoire, donne la réponse. Par exemple, pour neuf étoiles et l'élève compte en désignant les cases : un (1) deux (2) trois (3) quatre (4) cinq (5), une bande, un (6) deux (7) trois (8) quatre (9) cinq (10), deux bandes : comme il a dépassé neuf la réponse est « deux bandes ».

Une troisième technique consiste à compter sans utiliser la bande numérique, par exemple en utilisant les doigts ou mentalement. La complexité de l'opération devrait conduire à de nombreuses erreurs et décourager les élèves.

Une quatrième technique s'appuie sur une technique experte de comptage : compter « de 5 en 5 » jusqu'à dépasser le nombre d'étoiles, en comptant parallèlement les pas de compte. Ainsi, pour 11, l'élève compte 5 et 5, 10, deux bandes, 10 et 5, 15, trois bandes ; 15 est plus grand que 11, il faut donc trois bandes. La connaissance efficace de la suite des multiples de 5 permet de répondre par énumération « Cinq, dix, quinze » en comptant (par exemple, sur les doigts) les items qui représentent les bandes, quinze est le premier à dépasser onze et le troisième nommé, il faut donc trois bandes.

Une cinquième technique utiliserait une technique de décomposition additive du nombre mettant en évidence le 5, représentant une bande. Par exemple, pour 11 étoiles l'élève écrirait $11 = 5 + 5 + 1$, et répondrait qu'il faut trois bandes, deux complètes plus une troisième où l'on ne prend qu'une seule étoile.

Cette analyse permet d'imaginer certaines stratégies de réussite possibles et de suivre les tentatives des élèves pour en réaliser certaines. Elle devrait être reprise après coup si une stratégie nouvelle apparaissait, parce que cela montrerait soit, que les élèves disposent de techniques auxquelles nous n'avons pas pensé soit, que le problème relève pour eux d'un domaine de pratiques que nous n'avons pas imaginé, notre analyse étant orientée par l'analyse mathématique de premier niveau. Ainsi en serait-il si un élève représentait des bandes d'étoiles en grand nombre puis numérotait leurs étoiles jusqu'à en obtenir le nombre total cherché avant de compter les bandes usagées, dans une procédure qu'il faudrait peut-être rapprocher d'un raisonnement combinatoire.

3.3 Analyse *a priori*, troisième temps

Nous ne donnons pas ici l'analyse *a priori* conduite du point de vue du professeur. En effet, une des difficultés de notre mode de raisonnement (décrire *a priori* l'espace des possibles pour confronter notre construction théorique à la contingence et soit, confirmer notre idée première soit, l'invalider) a des effets secondaires importants : la description *a priori* fonctionne comme norme de jugement de la valeur des décisions prises dans l'action par l'acteur observé (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000). Dans le raisonnement systémique, ces décisions sont rapportées aux contraintes de l'institution à laquelle appartient l'acteur qui, dans le cas de l'école élémentaire appartient à la transposition institutionnelle, à l'épistémologie scolaire, aux conceptions sociales relatives aux propriétés culturelles des élèves, aux conceptions sociales relatives à la manière dont les enfants apprennent, etc. Car l'épistémologie courante organise un rapport premier à l'action qui conduit à l'interpréter comme effet d'une décision libre et à l'évaluer à l'aune des décisions imaginables du point de vue de l'observateur. La disponibilité d'une analyse *a priori* augmente le biais épistémologique pour son auteur même et comme notre visée n'est pas l'intervention d'ingénierie (qui a toujours un effet normatif pour le professeur qui la réalise comme pour l'ingénieur qui l'évalue) nous ne la conduisons donc qu'en dernière instance et après avoir confronté la réalisation contingente reconstruite au projet des acteurs tel que l'entretien avant l'observation nous le livre.

Elle nous serait pourtant nécessaire pour comprendre *in fine* le choix du regroupement des professeurs : transformer une proposition donnée pour l'adapter à une commande d'enseignement « comprenant un problème et des exercices, à développer sur deux séances ».

Ce qui nous intéresse dans ce troisième temps de l'analyse *a priori* est de mettre en évidence les problèmes didactiques auxquels l'enseignant doit faire face pour organiser le jeu de l'élève.

Par l'analyse *a priori* du travail de modélisation que tout élève doit faire pour produire une réponse, nous avons identifié deux problèmes didactiques que le professeur aura à résoudre, pour imaginer un milieu propice à la réussite de l'action des élèves. Ces problèmes seront notre moyen d'interpréter l'observation des classes et plus précisément les interactions didactiques entre professeur et élèves. Nous sommes en effet dans le cas où les élèves ne peuvent réussir par la simple mobilisation immédiate d'une technique existante. Il s'agit alors d'une action conjointe qui ne peut aboutir sur la base des allant de soi d'un contrat didactique stable. L'analyse *a priori* montre que la tâche est certainement problématique et que le professeur va devoir analyser les tentatives des élèves pour les accompagner dans la production d'une stratégie de résolution et sa stabilisation en technique pouvant être décontextualisée d'un type de questions à l'autre. Ces deux problèmes sont :

- celui de la double inégalité : il faut trouver une manière de dire et de signifier - un mot, une notation, une phrase - le fait que la réponse attendue correspond à la meilleure approximation possible, car les notions de quotient et reste ou d'encadrement ne sont pas enseignées, les objets d'un modèle mathématique ne vont pas être nommés en CP. Comment ce problème va-t-il être défini et dévolu dans les classes ?
- celui de l'émergence d'une technique relative à la série de problèmes : quels sont les systèmes sémiotiques nécessaires à la mise en place d'une technique partagée - quelles sont les notations retenues -, dans un CP ?

Ces deux problèmes, que nous construisons à partir de notre description théorique de l'activité de mathématisation comme production progressive d'un système de notations et des notions permettant de les manipuler de manière régulière et réglée (les stratégies décrites ci-dessus relèvent de cette description) nous serviront de fil directeur pour analyser et comparer l'action conjointe professeur-élève dans les trois classes. En particulier, nous essaierons de mettre en évidence les règles constitutives du jeu tel qu'il va être proposé aux élèves. Par exemple, certaines de ces règles seraient, dans le cas des bandes d'étoiles : pas le droit d'avoir de bandes non utilisées, pas obligé d'utiliser toutes les étoiles mais on doit avoir au moins le nombre d'étoiles demandé, on ne demande que des bandes complètes et non des étoiles isolées.

4. DEUX TYPES DE REDUCTIONS

Deux types de réduction ont été produits en relation avec l'analyse *a priori* qui nous a permis de repérer les types de tâches et les techniques comme moyens de découpage des séances en unités. Nous allons présenter d'abord l'intrigue correspondant à chacune des trois classes en nous limitant à la première séance : cela suffit à une première comparaison des formes didactiques de chacune. Ensuite, nous présenterons un tableau synoptique où seuls seront indiqués les types de tâches, afin de comparer précisément les classes de Renée et Roger sur l'ensemble des deux séances⁶.

Intrigue de Renée, séance 1

Classe de CP. Au tableau, un sapin est dessiné, à côté, un tableau à double entrée dont la colonne de gauche comporte le nombre 9. Enfin, des bandes de cinq étoiles sont collées au tableau.

- Renée présente la situation et les objets (un sapin... avec les bandes d'étoiles je peux le décorer) et le problème TdP5, min 1-3 : « J'ai cinq étoiles par bande, pour décorer mon sapin je vais devoir commander un certain nombre de bandes, pour mettre sur le sapin le nombre d'étoiles qui est indiqué. » Elle demande aux élèves de réfléchir et d'écrire leur réponse.

⁶ L'organisation générale des classes de Renée et de Rita étant assez proche, nous avons choisi de comparer seulement les classes de Renée et de Roger.

- Renée, TdP 9, min. 4-12, engage un travail collectif de vérification en appelant les élèves à venir coller sur le sapin les étoiles des bandes commandées : d'abord Man qui a proposé trois bandes, et Lis qui vérifie. TdP16, min 8 : « Alors qu'est-ce que vous pensez de la commande de Man ? » Cla répond : « ... ça sert à rien d'en commander trois parce que ça, ça gâche les étoiles ». TdP18, min 9-12, elle appelle Ken à « venir mettre sa solution. » (il a commandé cinq bandes). A la question « à ton avis, est-ce que ta solution convenait ou pas ? » il répond « non... parce que j'en ai pris trop. » et est conduit à préciser « trois en trop. » TdP28, min 11, Renée fait évoluer la situation : « ... on l'a bien dit dans notre règle du jeu on n'aura pas le droit d'avoir des bandes en trop. » et appelle Noé, qui a demandé deux bandes. La solution est bonne « parce qu'il en reste qu'une (étoile) » dit-elle.
- Renée, TdP48, min 13-19, engage un travail nouveau pour 11 étoiles vers une technique, par une question : « Si on compte les étoiles qu'il y a sur deux bandes, combien y en a-t-il ? » et en ramassant les feuilles de travail des élèves. Elle s'appuie sur la recherche du nombre de bandes pour onze étoiles et demande de venir au tableau expliquer une idée. Via a proposé deux bandes, Renée colle et organise le comptage collectif, Via constate l'échec et demande « une autre étoile ». « ... faut commander des bandes » dit Renée. TdP 90 min 18 : « on pourrait ajouter une bande » propose Via.
- Renée fait alors évaluer les différentes réponses enregistrées, TdP97 min 20-25. Elle constate qu'avec trois bandes il reste quatre étoiles. « On est obligé que quelquefois il reste des étoiles sur une bande » conclut-elle TdP111, min 21 : La solution quatre bandes est étudiée au tableau par un élève, et invalidée. TdP167, min 27-28 : Le travail change en cours de route: il faut décider du nombre de bandes qui resteront intactes avec la réponse onze (sept, huit ou neuf?).
 1. Renée, TdP192, min 29-50, relance une phase individuelle d'action, en se proposant de distribuer à chaque élève le nombre de bandes qu'il demande pour son sapin pré dessiné. C'est semble-t-il le temps d'exercices demandé, avec douze étoiles comme question. Les interventions ne portent plus sur le problème mais sur la régulation de l'activité des élèves (TdP 195-259), y compris dans l'usage de savoirs anciens (compter avec la bande numérique, TdP 228) ou la relance sur une question nouvelle (TdP 244, min 46).
 2. Renée, TdP 260, min 50, constate la fin de l'heure proche et déclare qu'elle va « ... continuer à donner d'autres exercices aux élèves qui ont fini, après on arrêtera. » Arrêt en min 59.

Ainsi, on peut dire que la première moitié de la séance (29 min) a pour objet de mettre en place les conditions de bon fonctionnement de la deuxième (29 min) soit, le milieu d'un jeu que les élèves puissent jouer individuellement : un problème, des règles constitutives du jeu des élèves avec ce problème, une technique de vérification permettant l'évaluation autonome des stratégies essayées. La séance devant se poursuivre, il n'y a pas de conclusion. On remarque enfin les 260 tours de parole : Renée intervient longuement et dialogue peu, dans les moments mathématiques ; elle échange rapidement dans les temps de régulation.

Intrigue de Roger, séance 1

Classe de CP., les cours de mathématiques et de français n'y sont pas séparés par une pause. La lecture porte sur l'album « Fier de l'aile » et sa naissance, elle occupe la première demi-heure.

- Roger, TdP 362, min 33-37 : « Bien prenez l'ardoise et le crayon d'ardoise, attention ce matin c'est Ros qui compte.../... on sépare les nombres avec des tirets, on compte pas 1, 2, 3 mais de cinq en cinq... » Puis Roger fait calculer une somme en montrant des billets de 5 et 10 euros.
- Roger, TdP 378, min 38-40 : « La maman de Roe elle va faire des crêpes.../... elle prend le lait et qu'est-ce qu'il faut encore ? » des oeufs, disent les élèves, et un dialogue construit l'histoire. Elle n'a pas d'oeufs ! - Elle va en acheter! - Mais ils ne vendent que des boîtes complètes et ils en mettent cinq dedans et il lui en faut huit. Y'a pas le droit d'en retirer. Vous écrivez sur l'ardoise ce qu'elle doit faire. Les ardoises hautes, Roger corrige devant la classe en dialoguant avec un élève puis un autre: chacun des trois premiers élèves appelés voit discuter « sa technique ».
- Roger, TdP 436, min 41-50 : « Bon mais moi je ne peux pas vérifier, Co elle a dessiné des boîtes... » TdP 446 « ... alors puisque vous ne dessinez pas la réponse expliquez » « On fait l'opération » propose un élève. Roger propose alors de recommencer avec 12 oeufs et demande une explication. A la correction (min 49) il fait compter de cinq en cinq. Puis il annonce le nom de tous les élèves qui ont utilisé « la même technique » et compare « ceux qui ont rangé comme des dés » et « ceux qui ont fait des tas de cinq » et (TdP 480) celle « qui a fait des chiffres : au lieu de dessiner elle a écrit des nombres. »
- Dans le même tour de parole 480, min 51, Roger fait le tour des techniques écrites au tableau et conclut : « Bon. On efface. Vous reprenez Fier de l'aile. »

Le premier contact a duré dix-huit minutes dont treize sur le problème proprement dit et, comme on le voit, les valeurs choisies comme la situation convenue ont été transformées. La technique de comptage a été désignée par avance, et le procédé de l'ardoise permet un trilogue (professeur, élève particulier interpellé publiquement, classe) qui fait progresser le savoir collectif de la classe tandis que le professeur s'adresse toujours à un élève particulier. La présentation de la technique experte dure ainsi une minute. Le travail mathématique reprend, dans la même matinée, de la minute 85 min à la minute 110.

- Roger, TdP735, min 85-88 : « Alors c'est Ros qui compte » selon le rituel d'entrée en mathématiques, et Roger fait travailler les doubles: il faut répondre le plus vite possible. Ben est le champion.
- Roger, TdP 815, min 89 : « Prenez l'ardoise.../... tout à l'heure c'est la maman de Ros qui nous a fait des crêpes, cette fois-ci j'ai besoin d'étoiles pour mettre sur mon sapin et elles se vendent par paquets de cinq. Mais j'en veux huit moi, dans mon sapin ! » A la correction il fait remarquer que une boîte donne cinq, ce n'est pas assez et deux boîtes ça fait « Cinq et cinq... » « Dix ! » répondent en chœur les élèves. Donc c'est plus que huit il m'en restera deux.
- Roger, TdP837, min 92-95, change de problème : « Et l'an prochain j'aurai besoin de 11 étoiles... » Attention en plus du dessin on écrit la réponse. A la correction il montre comment Da a dessiné les boîtes sans dessiner les étoiles, ça va plus vite, et Mi qui a écrit les chiffres (et il écrit au tableau $5+5+5=15$).
- Enfin, TdP888, min 96-109, il pose un problème d'achat de bougies d'anniversaire en boîtes de quatre, pour dix ans puis pour vingt. Les erreurs sont nombreuses et il reprend les techniques de dessin de boîtes, de passage aux boîtes vides et aux nombres en expliquant une stratégie d'approche pas à pas avec vérification : « ça fait pas encore assez, j'achète encore un paquet est-ce que j'ai assez? » Les erreurs sont encore nombreuses.

On remarque que le tout ne fait pas une heure et que l'enseignement sur la question semble terminé. Cependant et bien que, officiellement, l'ensemble des techniques disponibles ait été présenté en coopération avec les élèves, la réussite n'est pas assurée : au point que Roger est revenu en arrière, dans des explications sur la stratégie de mise en oeuvre des moyens qu'il avait montrés. On remarquera que la classe de Roger, qui donne l'impression d'un dialogue plus net, réalise comme celle de Renée près de 300 tours de parole en une heure.

Intrigue de Rita, séance 1

Cours double CP-CE1, huit élèves de CP. Les élèves de chaque groupe travaillent alternativement « en autonomie » et le professeur partage assez équitablement son temps entre eux.

- Rita, TdP1, min 00-16 : « [...] page 78 (aux CP) le premier exercice vous avez des égalités à calculer [...] vous savez qu'on a joué avec le cinq et le dix d'accord ? l'exercice numéro 2 [...] mesurer mes chemins [...] »
- Rita, TdP43, min 16-26 (elle a lancé un travail avec les CE1 pour porter toute son attention sur les CP, présence de l'observateur oblige) : « Bien les CP, aujourd'hui on change on remballé ça on le reprendra mardi. Hé ! Les CE1 page 60! Alors, je vous propose un sapin et nous allons le décorer [...] avec des étoiles [...] alors on va chez le marchand [...] mais il vend les étoiles par bandes de cinq et je voudrais neuf étoiles pour décorer mon sapin[...] je voudrais savoir combien je vais acheter de bandes... » et le premier élève interrogé, Wi, TdP 56, répond: « J'en veux cinq ensuite t'en reprends une autre t'enlève une étoile ça te fait neuf après »; « ha combien de bandes je vais acheter ? » Wi en veut deux, Ma une (vient au tableau compter, ça ne suffit pas), Ja deux et faut en enlever une, ce qui fera accord après vérification.
- Rita, TdP103, min 27-36 : « Bon alors on va refaire un exemple mais cette fois je vais vous donner une feuille de brouillon d'accord ? [...] Alors je veux cette fois onze étoiles. Je veux que chacun écrive sur sa feuille... » et elle passe dans les rangs pour réguler le travail. TdP113 : « tu m'écris 5 et 5 et moi je veux savoir combien de bandes. » L'impossibilité d'ajouter une bande à la demande fait problème et Rita TdP130 évoque l'achat par correspondance à « La Redoute ».
- Rita, Tdp154, min 37-43 : « alors vous allez venir avec votre brouillon me voir » et elle suit publiquement les réponses écrites, dans un trilogue avec l'élève et la classe. Les élèves qui ont dessiné, comme Li, représentent deux bandes complètes et une bande avec une étoile. « C'est une bande de cinq mais elle en a pris un » commente Rita, TdP192, min 40. Puis, TdP208, « Est-ce qu'on est obligé d'utiliser toutes les étoiles de toutes les bandes ? » C'est au tour de C-E puis de Ja TdP245, min 43, et on repart sur le cas de six étoiles TdP247, min 44.
- La réponse est cadrée par la fiche distribuée min 46, où figure le nombre d'étoiles, le nom de l'élève, la phrase incomplète « je commande bandes » et l'injonction « je dessine les étoiles qui ne servent pas ».

Puis, min 47, fiche avec sept étoiles. Et min 51, quinze étoiles. Le traitement du cas de Ra prend un temps important : TdP270 à 318, min 52 à 60, ce travail conduit Rita à poser la question : « Bon alors tu en as trop ou tu en as pas assez ? » en TdP 308. Mais cela restera entre Rita et Ra pour cette fois (fin de la séance).

On remarquera que Rita suit les élèves de plus près encore que Renée et qu'elle donne encore moins d'outils techniques. L'organisation générale des séances de Renée et Rita est cependant très proche, avec une moitié du temps sur la mise en place de la question (26 minutes) et une autre moitié sur son traitement individuel (34 minutes) sous la forme d'exercices.

Nous allons présenter maintenant un tableau synoptique qui montre d'une manière concise les différentes tâches proposées aux élèves.

Tableau comparatif de l'organisation de la première séance dans les classes de Renée et Roger⁷

Durée minutes	Classe de Renée Types de tâches	Organisation	Classe de Roger	Organisation																		
1	T1 : trouver le nombre de bandes de 5 étoiles nécessaire pour avoir un certain nombre d'étoiles T1.1 – 9 étoiles	Individuel	T-1 : compter de 5 en 5 jusqu'à 50	Collectif ardoise																		
2			Collectif		T-2 : additionner 3 ou 4 nombres (quantités données sous la forme de billets de 10 et 5 euros)	Collectif ardoise																
3		T3 : trouver le nombre de boîtes d'œufs de 5 œufs chacune pour avoir un certain nombre d'œufs T3.1 : 8 œufs		collectif ardoise																		
4					T3.2 – 12 œufs		collectif ardoise															
5								T1.2 – 11 étoiles	Collectif analyse de production d'élèves													
6										T-3 : trouver des doubles de nombres	collectif ardoise											
7												T1 : trouver le nombre de bandes de 5 étoiles nécessaire pour avoir un certain nombre d'étoiles T1.3 – 8 étoiles	collectif ardoise									
8														T1.2 – 11 étoiles	collectif ardoise							
9																T4 : trouver le nombre de paquets de 4 bougies pour avoir un certain nombre de bougies.						
10																		Plusieurs tâches du type T1 Nombres choisis : 9, 12, 15, 20, 18	Individuel avec des interactions entre la maîtresse et les élèves	collectif ardoise		
11																					...	
12																						
13		...																				
14	...																					
15		...																				
16	...																					
17		...																				
18	...																					
19		...																				
20	...																					
21		...																				
22	...																					
23		...																				
24	...																					
25		...																				
26	...																					
27		...																				
28	...																					
29		...																				
30	...																					
31		...																				
32	...																					
33		...																				
34	...																					
35		...																				
40	...																					
41		...																				
58	...																					

⁷ La référence de la numérotation des tâches est celle de la classe de Renée qui est la plus proche de la proposition de départ.

Plusieurs observations peuvent être faites à partir de ce tableau. Comme nous l'avons dit, la séance de Renée est plus longue que la séance de Roger (58 minutes et 41 minutes respectivement). Malgré une durée plus longue, la classe de Renée est confrontée à un seul type de tâches (T1) avec deux tâches (T1.1 et T1.2) collectives et ensuite des tâches de ce même type individuelles correspondant aux exercices tandis que la classe de Roger est confrontée à trois types de tâches (T1, T3 et T4) gérées collectivement (avec un certain nombre de tâches, deux tâches pour T1, deux tâches pour T3 et 5 tâches pour T4) et encore à trois types de tâches de calcul mental (T-1, T-2, T-3). Nous pouvons observer aussi que le type d'organisation dans la classe de Roger est toujours le même : collectif et en utilisant souvent l'ardoise, tandis qu'il est varié dans la classe de Renée entre le collectif et l'individuel. Le travail sur les erreurs des élèves est fait dans la classe de Renée et de Roger mais pas sur la même forme. Dans la classe de Renée, les élèves doivent analyser des productions d'élèves fictifs (certaines sont erronées) et pas seulement produire des solutions tandis que dans la classe de Roger les élèves doivent toujours produire la réponse et ensuite, le professeur ou un autre élève corrige les réponses erronées.

Tableau comparatif de l'organisation de la deuxième séance dans les classes de Renée et Roger

Durée (minutes)	Classe de Renée	Organisation	Classe de Roger	Organisation	
1	Reprise du type de tâche T1 (avec 12 étoiles)	Petit groupe	T3.3 – 9 oeufs	Collectif	
2			T3.4 – 11 oeufs		
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10	Reprise du type de tâche T1 avec 18 étoiles	Collectif	T2 – trouver le nombre de boîtes de 6 œufs pour avoir un certain nombre d'œufs	Collectif	
11			T2.2 – 11 oeufs		
12					
13			T2.1 – 9 oeufs		
14					
15					
16			T2.3 – 18 oeufs		
17					
18					
19					
20			Fin de la séance		
21 .../...	T2 – trouver le nombre de boîtes de 6 œufs nécessaire pour avoir un certain nombre d'œufs	Collectif			
27					T2.1 – 9 oeufs
28					
28 .../...	T2.2 – 11 oeufs				
32					
33 .../...	T2.3 – 23 œufs	Individuel en interaction avec la maîtresse			
	T2.4 – 19 œufs				
59	T2.5 – 16 œufs				

Nous pouvons faire la même observation pour la deuxième séance que celle que nous avons faite pour la première mais ici l'écart des durées est encore plus grand : 59 minutes pour la classe de Renée et 19 minutes pour la classe de Roger. Tous les deux reprennent des types de tâches de la première séance : Renée reprend le type de tâches T1 pendant 20 minutes avec un petit groupe d'élèves et Roger reprend le type de tâches T3 pendant 9 minutes en classe entière. Renée

consacrera 39 minutes pour le type de tâches T2 tandis que Roger prendra seulement 10 minutes pour T2.

5. DÉFINITION ET DÉVOLUTION DU JEU

5.1 Définir et dévoluer : invention d'un contexte et implication personnelle du professeur

Pour définir la situation, les trois enseignants introduisent un contexte supplémentaire pour le problème, une petite histoire qui leur permet en fait de ne pas le proposer dans sa dimension matérielle en distribuant par exemple un dessin de sapin et en demandant aux élèves de commander le nombre de gommettes nécessaire à sa décoration. Deux d'entre eux personnalisent l'énoncé en utilisant le pronom « je » et le troisième le transforme de manière importante, comme nous le verrons. Renée commence par dire : « *alors au tableau j'ai dessiné ++ un sapin + et ce sapin on peut le décorer + avec des bandes d'étoiles + je peux le décorer en commandant des bandes d'étoiles* ». Rita présente le problème en ces termes : « *Je voudrais savoir combien je vais aller chercher chez le marchand de bandes de cinq pour être sûre de mettre neuf étoiles sur mon sapin* ». Cette personnalisation pourrait venir de ce que les professeurs cherchent, par cette tournure personnelle, à évoquer une situation d'action à laquelle les élèves devront pourtant le plus souvent renoncer (ici, seule Rita donne effectivement des étoiles à coller sur un sapin). Les élèves peuvent ainsi, peut-être, s'identifier à l'acteur et s'impliquer en première personne dans la situation. Roger décide de partir de la situation des œufs : il présente la situation comme étant une situation familiale : « *La maman de Roëlle (élève de la classe) veut faire des crêpes pour la classe. Pour cela, elle a besoin de 8 œufs et le marchand ne vend que des boîtes de 5 œufs...* » Ce contexte transforme le problème des oeufs à ranger en problème semblable à celui des étoiles à obtenir par groupement, il permet aux élèves de s'impliquer tout en s'identifiant à quelqu'un de familier vivant une situation plausible (contrairement à l'histoire des étoiles : sur le sapin familial on met toutes les étoiles dont on dispose) mais il devrait rendre plus délicat le passage à la situation de rangement des oeufs puisque les objets de la situation ne désigneront plus l'existence possible d'une différence entre les problèmes.

5.2 Définir et dévoluer : diverses manières de construire une référence commune par explicitation progressive des règles du jeu

Pour définir les situations, comme nous l'avons vu dans l'analyse *a priori*, nous pouvons distinguer entre les règles constitutives du jeu qui définissent le milieu actif de l'action actuelle et les règles stratégiques⁸ (cf. Sensevy, dans cet ouvrage) qui font l'espace d'incertitude des élèves et définissent le problème qui leur sera peut-être dévolu. Par exemple, Roger précise d'emblée la règle des boîtes complètes, implicite dans l'énoncé initial : « *attention le marchand il ne veut vendre que des boîtes complètes.* » L'adjectif « complètes » qualificatif des boîtes est ici un indice de la règle constitutive. Mais Rita ne précise pas cette règle du jeu et cela va produire une incertitude très grande. Un élève, à propos de neuf étoiles, dialogue avec l'enseignante :

TP 56, min. 23	Prof	combien tu achèterais de bandes toi ?
TP 57	Wi	deux
TP 58	Prof	alors voilà je te donne deux bandes d'accord alors pour pouvoir le faire / comment ?
TP 59	élève	on peut pas
TP 60	élève	ça fait dix !
TP 61	Prof	ça fait dix [<i>brandissant les deux bandes de cinq étoiles devant les élèves</i>]
TP 62	élève	je sais
TP 63	élève	faut en enlever une

⁸

Dans ce texte, nous étudierons surtout les règles constitutives.

La règle n'est pas énoncée pourtant : les élèves n'apprendront donc pas le sens du geste d'avertissement du professeur brandissant ses deux bandes en annonçant le nombre de leurs étoiles et plus tard la difficulté va resurgir, comme nous pouvons le voir dans ce passage :

TP 194	<i>Prof</i>	un d'accord alors euh + (en chuchotant) c'est moi qui choisit [<i>tandis que les élèves lui tendent leurs travaux</i>] / Alors Ma <... ?> si je me souviens bien [<i>récupère le travail de Ma</i>] alors Ma tu nous as commandé combien de bandes toi ?
	Ma	euh deux bandes et une étoile
	<i>Prof</i>	est-ce qu'on le droit de faire ça ?
	Ma	nan
	<i>Prof</i>	ha alors on commande on commande combien de bandes Ma ?
	Ma	onze
	<i>Prof</i>	onze bandes ?!
	Ma	nan cinq
	<i>Prof</i>	combien de bandes regarde elles sont là les bandes [<i>pointe les bandes fixées au tableau</i>]
	Ma	deux
	<i>Prof</i>	deux bandes seulement ?
	Ma	trois
	élèves	quatre
	élève	trois
TP 207, min. 41	<i>Prof</i>	trois bandes mais est ce qu'on est obligé c'est ça qui a posé des soucis à certains + est ce qu'on est obligé d'utiliser toutes les étoiles de toutes les bandes ?
	élèves	<i>nan ::</i>
	<i>Prof</i>	hé non d'accord + / c'est ça qui t'a embêté toi Cl ?
	[M = Cl]	oui

Dans ce dialogue, nous pouvons observer que ce qui est une règle du jeu pour le professeur, implicite mais présente, ne l'est pas pour les élèves. Rita va dire « *est-ce qu'on a le droit de faire ça ?* », et la difficulté de l'élève va lui faire prendre conscience : « *c'est ça qui a posé des soucis à certains + est ce qu'on est obligé d'utiliser toutes les étoiles de toutes les bandes ?* ». Cet échange permet à l'enseignante de donner en passant une règle du jeu explicite. Plus tard, Rita précise : « *tu sais que je ne commande que des bandes hein ?* » mais là encore aucun qualificatif comme « bandes complètes » n'est proposé. Nous pouvons nous demander si ce professeur, tout en étant conscient de cette règle, attribue assez d'importance aux mots qui la disent d'une manière explicite. Lors de la situation des œufs, Rita ne va pas non plus utiliser un adjectif qualificatif : « *je répète j'ai neuf œufs [indique le tableau du doigt] + j'écris là + de travers mais enfin bon [écrit le chiffre 9 au tableau] neuf œufs à ranger dans mes boîtes je mets six œufs par boîte combien vous me commandez de boîtes pour être sûr de ranger mes œufs* » ; elle préfère semble-t-il se situer comme destinataire d'une commande de boîtes pour que, comme dans la vie courante, la règle du minimum de boîtes soit portée par le contrat relationnel d'une telle commande.

5.3 Dévoluer : produire collectivement les règles constitutives du jeu

Renée a adopté une autre stratégie. D'abord, elle pose le problème aux élèves sans préciser la règle du minimum de bandes : « *je rappelle ce qu'on cherche + combien de bandes d'étoiles me faut-il si je veux mettre + NEUF étoiles sur mon sapin* » ; ensuite, elle va choisir des élèves qui n'ont pas la réponse attendue pour que, à travers la correction, cette règle soit précisée. Elle envoie un élève au tableau qui a donné la réponse trois au lieu de deux, un autre élève vérifie qu'il y a bien neuf étoiles sur le sapin. A ce moment, la règle est énoncée par un élève et précisée par le professeur :

TdP 16, min xx	<i>Prof</i>	on est d'accord + tu vas te rasseoir [<i>Lis retourne à sa place</i>] + alors + qu'est-ce que vous pensez de la commande de Man : + est-ce que c'était une commande juste ou pas ? + et vous expliquez pourquoi si vous levez le
----------------	-------------	--

		doigt + Man avait commandé TROIS BANDES d'étoiles + Cla ?
TdP 17	Cla	<.. ?> parce que <.. ?> trois bandes <.. ?> elle en a mis + <.. ?> ça sert à rien d'en commander trois + parce que parce que ça :: ça : ça ça gâche les étoiles
TdP 18, min. 09	Prof	en quelque sorte + il est inutile de commander trop d'étoiles + et même dans la règle du jeu qu'on va faire + on a pas le droit + quand on commande + on a pas le droit + au final d'avoir une bande d'étoiles qu'on a pas utilisée + ça ça sera une règle à retenir + donc + la solution de Man + et ben c'était quand même pas mal hein + puisqu'elle a garnie son sapin + mais + elle avait commandé TROP de bande d'étoiles

Cette analyse collective du travail de Man permet à Cla d'expliquer pourquoi trois n'est pas une bonne réponse tout en permettant de garnir le sapin de neuf étoiles. Cet élève précise : « *ça sert à rien d'en commander trois + parce que parce que ça :: ça : ça ça gâche les étoiles* ». A travers le verbe « gâcher », l'élève donne à la règle une fonctionnalité contextuelle : l'inégalité est devenue une question d'économie domestique. Cela permet à Renée de préciser la règle, dans l'intervention dix-huit. Par la suite, en corrigeant collectivement la réponse de Ken qui a répondu cinq bandes, elle revient sur cette règle : « *eh oui : + il a trois bandes de trop + et ça on l'a bien dit + dans notre règle du jeu + on aura pas le droit d'avoir des bandes en plus* ». On voit ici comment le professeur résout le problème en imposant une règle du jeu de type « éviter le gaspillage » : « *d'une certaine manière il a répondu au problème* » mais avec la règle imposée dorénavant, la réponse n'est pas la bonne : « *dans notre règle du jeu + on aura pas le droit d'avoir des bandes en plus* ». La règle semble appartenir à la situation sociale évoquée, d'où elle tire une grande légitimité.

La définition de la situation se fait ainsi par une action conjointe professeur-élèves à travers un travail *d'analyse des premières réponses* des élèves, qui ne sont des erreurs que si la règle est explicitée. Par élimination des réponses dans un dialogue avec la classe, l'explicitation des règles constitutives du jeu en précise les contours au fur et à mesure des besoins. Lors de la situation des œufs, Renée présente tout de suite cette règle en termes de boîtes vides (aucune) boîtes incomplètes (une au plus) et boîtes complètes (toutes les autres, juste le nombre qu'il faut) :

« on va commander des boîtes d'œufs très bien [l'enseignante se dirige vers le fond de la classe] + alors vous avez vu les boîtes je les ai rangées à droite sur mon tableau + alors la question est la suivante + de combien de boîtes d'œufs ai-je besoin (00 :24) + pour ranger + mes neuf + œufs ++ comme pour les sapins j'ai pas le droit de me retrouver avec des boîtes vides + par contre j'ai le droit de me retrouver avec une boîte qui va pas être complète + donc des petites cases où il y a pas d'œufs + donc vous réfléchissez à la question + et quand vous avez une idée + précisez + vous levez le doigt ».

On remarquera que la situation est rapportée à celle des sapins, bien que les bandes à défaire ne soient pas équivalentes aux boîtes à remplir. Il y a donc, dans ce rapprochement, une *indication* subtile du fait que les deux tâches appartiennent au même type et doivent être traitées mêmement. On remarquera aussi qu'une des principales règles pérennes du contrat didactique (Mercier, 1986) est ainsi retrouvée : un problème scolaire n'a qu'une seule réponse.

5.4 Réduire l'incertitude, redéfinir pour dévoluer : production de règles du jeu, économie des moyens langagiers

Pendant les premières vingt minutes de la deuxième séance, Renée reprend le travail fait pendant la première séance autour des situations des étoiles, avec un groupe d'élèves qui n'avaient pas réussi. Dans ce cadre, un travail langagier original va permettre la dévolution du problème à ces élèves, son enjeu est de les amener à tenir compte de la double inégalité. Les élèves sont en train de chercher le nombre de bandes nécessaire pour douze étoiles. Renée veut que les élèves expliquent comment ils ont trouvé la réponse. Noé donne la réponse « trois » et l'enseignante demande pourquoi. L'élève répond alors : « c'est pas beaucoup et quand même ça fait assez », ces expressions sont reprises par le professeur : « C'est pas beaucoup et puis quand même ça fait assez + alors là + j'suis un peu d'accord avec Noé + c'est à ça qu'on veut arriver + juste le bon nombre d'étoiles + ni trop + ni pas assez ».

Le professeur profite des expressions de l'élève « *pas beaucoup et assez* » pour reformuler la contrainte de la double inégalité d'une manière concise et très économique : « *juste le bon nombre d'étoiles, ni trop, ni pas assez* ». C'est une manière de définir la situation : une règle constitutive du jeu est ici formulée d'une manière économique ; c'est une manière d'en faire dévotion: la règle a été formulée par un élève au terme d'un travail collectif. Ce travail des élèves assure la construction d'un espace commun de référence, mais comme toujours en classe il est conduit sous la responsabilité institutionnelle du professeur.

5.5 Définition de la situation et indication d'une technique, par le professeur

Roger, quant à lui, introduit tout de suite les mots « boîtes complètes » et lors de la première mise en commun sur les réponses à la question « Combien de boîtes complètes de 5 œufs faut-il acheter pour avoir 8 œufs ? », le mot « *assez* » est utilisé par le maître : « *est-ce qu'elle a assez avec une boîte, ma ?* » et à propos de la réponse d'un autre élève il insiste immédiatement : « *est-ce qu'il y a assez pour faire 8 ?* » Les mots « *assez* » et « *pas assez* » permettent au maître non seulement de définir la règle constitutive du jeu mais aussi (et cela est assez différent des deux autres enseignantes) de commencer à mettre en place une technique pour produire la réponse. Ces mots apparaissent comme un élément d'une technique : celle-ci utilise le comptage de 5 en 5 comme moyen de donner successivement le nombre d'œufs avec 1, 2, 3,... boîtes, et les mots « *pas assez* » et « *assez* » permettent de contrôler l'encadrement du nombre d'œufs donné au départ par rapport au nombre d'œufs des boîtes. Remarquons encore que Roger ne s'est pas contenté de transformer le problème des bandes en problème d'œufs et que le problème d'œufs qu'il donne n'est pas le problème prévu : on n'a pas à ranger les œufs dans les boîtes mais à obtenir suffisamment d'œufs en achetant des boîtes. Cela nous conduit au deuxième problème que nous avons identifié dans l'analyse *a priori*.

6. LE PROBLÈME DES TECHNIQUES

Nous avons vu qu'un deuxième problème didactique est celui de l'émergence et du travail d'une technique qui permette d'accomplir les tâches proposées comme des cas d'un type de tâches, que l'étude de la portée de la technique conduit à identifier. Nous avons prévu un certain nombre de techniques possibles qui pourraient vivre dans les classes de CP, mais que se passe-t-il dans les trois classes observées ? Quelle est l'importance des techniques dans leur travail ? Quel est le rôle des systèmes sémiotiques dans la mise en place et l'identification de ces techniques ? Peut-on observer, dans les classes, l'émergence d'un type de tâches ? Quelle est la part respective du professeur et des élèves dans ce processus ?

6.1 Techniques invisibles, techniques faibles et techniques fortes

Dans la classe de Renée, pendant toute la première séance, les élèves donnent la réponse sans expliciter la ou les techniques utilisées pour produire ces réponses : ce sont des techniques de production *invisibles*. Par contre, l'enseignante insiste sur les techniques de contrôle de la validité de la réponse donnée : la technique du comptage un à un (les étoiles) permet aux élèves de contrôler si le nombre d'étoiles qui est sur le sapin est bien le nombre de départ. Ce ne sont pas des techniques de validation mais de vérification, ce qui n'est pas du tout équivalent car les élèves n'ont à étudier que le milieu de l'action et jamais leurs manières d'agir dans ce milieu. Des manières de faire ont commencé à être explicités mais pendant la première séance, ces embryons de techniques ne sont pas exploités par le professeur pour faire émerger dans la classe une technique *faible* qu'un élève explicite et que le professeur pourrait désigner à un travail d'institutionnalisation. Comme nous l'avons déjà dit, suite au fait qu'un certain nombre d'élèves n'ont pas réussi à accomplir la tâche demandée, l'enseignante décide de travailler en particulier avec ces élèves au début de la deuxième séance, pendant vingt minutes environ. Le passage à une technique faible devient alors un élément essentiel du travail collectif. A propos de douze étoiles, Noé produit la réponse trois bandes et l'enseignante reprend cette réponse pour insister sur le discours de la technique : « *alors Noé pense que + trois bandes d'étoiles c'est ce qui convient pour faire + douze + et elle me dit + c'est*

ni trop ni pas assez + c'est juste ce qu'il me faut + et moi je lui demande + POURQUOI + pourquoi par rapport au nombre + pourquoi c'est juste ce qu'il me faut + [MT= l'enseignante va se placer un peu plus loin après avoir fini de coller les bandes] essaie de nous expliquer maintenant avec les bandes ? »

Noé explicite sa technique en utilisant le discours suivant : *cinq et cinq et deux, plus que deux*. Cette expression « plus que deux » est un élément important de notre observation. Nous l'interprétons comme indiquant la nécessité de prendre un nombre de bandes supérieur à deux. Car ce discours peut avoir une autre interprétation : l'enseignante reprend la première partie, cinq et cinq et deux pour faire douze mais elle n'entend pas « plus que deux » pour signifier plus de deux bandes... Ce travail pour passer à une technique faible, fait en petit groupe, *n'est donc pas repris dans la classe entière* à propos de la situation des œufs où la seule technique explicite est le moyen de vérification du résultat : les élèves demeurent dans une activité qui signe une *situation d'action* au sens de Brousseau.

Dans la classe de Rita, les techniques sont tout aussi invisibles, même si certains embryons de techniques sont explicités. Il n'y a pas vraiment de prise en charge d'une technique de production, pas de mise en place d'une technique collective. Mais la première situation d'action est en revanche bien présente, avec des sapins et des étoiles. Elle permet d'obtenir un milieu offrant la possibilité de vérifier son action ; elle permet donc une activité autonome des élèves, ce qui est indispensable dans une classe à deux niveaux même si cela ne se produit pas dans cette séquence.

Dans la classe de Roger, le problème des techniques est explicitement posé dans la classe. Les élèves utilisent plusieurs techniques personnelles pour trouver le nombre de boîtes de cinq nécessaire pour avoir huit œufs. Ensuite, un travail collectif est fait pour mettre en évidence ces différentes techniques : « *bien différentes techniques la première technique y a que la réponse* ». Il insiste sur le fait qu'il ne veut pas seulement la réponse et insiste sur les techniques faibles : « *pour vérifier ce que vous faites j'aimerais bien vous voir faire des dessins on dessine la réponse puisque vous ne dessinez pas la réponse expliquez il faut que je comprenne ce que vous faites en voyant sur l'ardoise/ si vous n'écrivez que la réponse je ne peux pas vérifier je ne sais pas si vous avez regardé sur le voisin ou la voisine d'accord* » et encore un petit peu plus loin : « *je ne veux pas que la réponse vous m'expliquez comment vous faites + + vous m'expliquez comment vous faites* ». Plusieurs manières de réussir apparaissent mais le maître insiste sur la technique utilisant le comptage de cinq en cinq, qui apparaît donc comme la seule technique reconnue.

6.2 Discours de la technique, discours qui rassemble

Ainsi, pour que les techniques naissent au moins sous leur forme faible, un discours d'explicitation est nécessaire. Ce discours est fermement travaillé dans la classe de Roger. La technique qu'il met en avant est la suivante : le comptage de cinq en cinq est le moyen de donner successivement le nombre d'œufs avec une, deux, trois,... boîtes, et les mots « pas assez » et « assez » permettent de contrôler l'encadrement du nombre d'œufs donné au départ par rapport au nombre d'œufs des boîtes. Voilà un exemple :

	<i>Prof</i>	la technique de Co elle a dessiné les boîtes d'accord elle <... ?> je dessine les boîtes [<i>dessine une boîte remplie de 5 œufs</i>] d'accord tu as vu que tu n'avais pas assez alors tu a dessiné une deuxième boîte [MT = <i>dessine une deuxième boîte de cinq œufs</i>] et elle en a dessiné cinq dedans encore parce qu'il y en a cinq dans la boîte cinq et cinq ?
	élèves	dix
	<i>Prof</i>	Est-ce qu'elle en a assez ?
	élèves	Nan
	<i>Prof</i>	Donc elle a dessiné une troisième boîte + [<i>dessine une troisième boîte</i>] cinq et cinq
	élèves	dix
	<i>Prof</i>	Et cinq
	élèves	quinze
	<i>Prof</i>	est-ce qu'elle aura assez avec douze ?

	élèves	oui
	Prof	ta technique est bonne Co

Nous avons déjà parlé de l'importance du mot « assez » comme élément organisateur du discours relatif à cette technique, qui permet de contrôler la recherche d'un encadrement par tâtonnements en proposant des valeurs croissantes de cinq en cinq. Ce discours est répété plusieurs fois mais reste dans le lieu de l'enseignant : lui seul pose les questions.

On pourrait dire que le professeur *accompagne* ainsi l'élève dans l'explicitation de la technique, mais dans le cadre de ce discours répétitif qui met en évidence ce que les techniques personnelles ont en commun, le professeur produit une progression et crée l'espace d'une institutionnalisation (« ... au lieu de dessiner elle a écrit... » puis « ... c'est plus facile en faisant des tas de dix... »), ce qui fait qu'il leur désigne et dessine la technique officiellement attendue : « *La technique de Ro c'est celle de Go c'est celle d'El et ++ (00 :50) et c'est celle de Ben (...)* Ils ont dessiné des tas de cinq [dessine des tas de cinq œufs au tableau] + cinq et cinq dix onze douze /oh oh/ treize j'en ai quinze [dessine des œufs au tableau] c'est la même technique que là sauf que là ils sont rangés comme des dés d'accords + et je vous montre la technique de Mo (...) Au lieu de dessiner elle a écrit les nombres + elle a écrit pareil elle a écrit « 5 » et « 5 » elle a entouré ici pour dire que ça faisait « 10 » c'est plus facile en faisant les tas de « 10 » [recopie la façon dont Mo a effectué l'exercice] (00 :51) d'accord et la dernière elle a mis « 5 » ici + donc elle a écrit l'opération d'accord ». Est-ce qu'un élève a les moyens d'utiliser ce discours ? Nous ne pouvons pas le dire mais c'est au moins un discours qui va pouvoir être partagé, même si c'est le professeur qui montre la bonne technique à la classe : « *Voilà la technique de Co la technique de presque toute la classe + Da il dit lui c'est trop long ! On peut dessiner que les boîtes la technique de Da lui c'est (01 :35) on peut dessiner que les boîtes et dans sa tête il dit cinq [dessine une boîte vide au tableau] dix [dessine une boîte vide au tableau] et il en manque encore une et <... ?> [dessine une troisième boîte vide au tableau] et la technique de Mi c'est pareil que Da sauf qu'au lieu de dessiner des boîtes il écrit les chiffres il fait « 5 » [écrit 5 au tableau sous la première boîte] + plus « 5 » plus « 5 » est égal à « 15 » [écrit l'équation « 5+5+5=15 » au tableau] ». Cet exemple nous permet de montrer que le discours organisé par l'enseignant dans une formulation qui n'est pas nécessairement le fait des élèves, est un moyen pour lui de rassembler les diverses manières de faire dans ce qui devient la technique de la classe. La classe est ainsi rassemblée par le discours de la technique porté par l'enseignant. On remarquera rapidement ici comment ce mouvement s'appuie à la fois sur l'institution d'un lexique conceptuel « ... il doit y en avoir assez mais pas trop... » relatif aux encadrements et sur une évolution du système des objets sémiotiques mobilisés « ... sauf qu'au lieu de dessiner des boîtes il écrit des chiffres... » Et sans discussion, l'enseignant donne la préférence aux notations normalisées et manipulables.*

Nous allons donner un exemple où ce discours qui rassemble fait défaut, lorsque Renée travaille avec les élèves qui étaient en difficulté pendant la première séance. Nous avons déjà présenté la manière de faire de Noé (§6.1) en montrant comment l'élève commence à compter de cinq en cinq et comment elle utilise « plus que deux » pour montrer qu'on a besoin de plus de deux bandes. Cela est repris par Mar et le professeur encourage l'élève à continuer dans cette voie-là : « *Alors + continue a compter comme ça de cinq en cinq + ça m'intéresse bien ça* ». Cet encouragement ne s'arrête pas là car Renée pense qu'elle va accompagner l'élève dans sa mise en oeuvre en lui disant : « *cinq + dix + et avec la troisième bande ça fait comment ? +++ combien d'étoiles sur les trois bandes* ». Mais la réponse montre qu'ici encore, un élève est en train de raisonner sur le nombre de bandes tandis que le professeur pense à majorer le nombre d'étoiles : « *là y'en a cinq cinq et cinq* » dit l'élève, « *Oui mais je voudrais que tu me dises + combien d'étoiles sur les trois bandes au total* » répond le professeur ; « *trois* » dit l'élève, « *Ah non + moi je vois beaucoup plus que trois étoiles là* ». On observe un décalage important entre l'élève (qui raisonne sur le nombre de bandes, la réponse attendue) et l'enseignant (qui voudrait désigner à l'élève un élément de la technique, le nombre d'étoiles qui majore le nombre d'étoiles demandé). Le discours de l'un ne rencontre pas le discours de l'autre : il a manqué en ce point un mot ou une expression qui tienne

compte de l'inégalité ; par exemple le mot « assez » permettrait de dire que « trois bandes donnent juste assez d'étoiles, plus de douze ». C'est pourtant dans cette classe que l'expression « juste le nombre qu'il faut, ni trop ni pas assez » a été utilisée, mais elle n'est pas devenue notion identifiée en devenant partie intégrante d'une technique. Le discours oppose ici la position de l'enseignant à celle des élèves ; faute, entre autres, des outils sémiotiques (notion et notation) qui nomment et désignent la contrainte à satisfaire et qui la rendent manipulable.

6.3 Emergence d'une technique et mesogénèse

Les deux exemples précédents montrent qu'enseigner n'est pas seulement construire une référence commune, comme dans une situation de communication, puisque le savoir que les élèves cherchent à produire par leur activité (orientée par le professeur) est plus que le contenu d'un échange permis par cette référence, c'est aussi une production personnelle en réponse aux problèmes que leur posent leurs interactions avec un milieu. Ainsi, un discours comme « trois bandes c'est ni trop ni pas assez » peut signaler l'émergence d'une technique mais si le professeur n'organise pas le travail à ce niveau et renvoie les élèves à la répétition de l'action, le travail mésogénétique insuffisant ne permet pas que l'action devienne l'objet d'un jeu de formulation qui l'évoque. Cela peut interdire l'apparition d'une technique faible. Certes le type de tâches est le même en principe, puisque dans les trois classes un même modèle théorique est pertinent pour produire des techniques efficaces. Mais les fonctions possibles des éléments de référence commune auxquels aboutit le travail initial sont différents, la situation de l'action conjointe est donc épistémologiquement différente dans les trois classes.

Nous pouvons identifier trois éléments qui sont entrés en jeu, dans la mésogénèse. En premier lieu, le fait que les mots ou expressions qui tiennent compte de la double inégalité puissent ou non faire partie de la règle du jeu et aussi d'un discours de la technique. En deuxième lieu, le fait qu'un accent explicite soit mis sur les techniques faibles pouvant remplacer les premières techniques, invisibles, ce qui suppose un jeu de formulation. En troisième lieu, le fait que la technique du comptage écrit de cinq en cinq soit ou non disponible, car c'est elle qui va permettre l'émergence rapide d'une technique faible.

Rappelons en effet que la première étape du travail dans la classe de Roger concernait le comptage de 5 en 5 en utilisant l'ardoise, jusqu'à cinquante. Cette technique faisait ainsi partie des moyens d'attaque du problème des œufs ou des étoiles, elle aidait à faire de ces problèmes les germes d'une *situation didactique fondée sur un milieu*⁹ en réduisant l'incertitude créée par le problème. Elle orientait les élèves vers une stratégie outillée de cette technique, installée comme élément constitutif du jeu, développée en technique faible que Roger a pensé à intégrer dans son schéma prévisionnel d'enseignement, ce qui n'a pas été le cas des deux autres professeurs. Ceci ne veut pas dire que les élèves de ces classes n'ont pas rencontré auparavant cette manière de compter mais que les professeurs ne l'ont pas activée à ce moment où elle se trouvait pertinente.

Le travail de définition d'un milieu est non seulement le travail explicite du professeur, qui par exemple prévoit de rappeler le comptage de 5 en 5, mais il peut contenir certains éléments qui font aussi partie de la mémoire didactique et qui sont portés par des élèves de la classe. Par exemple, dans la classe de Rita un élève va utiliser le mot « paquet » pour désigner les bandes. Il nous semble voir là un indice que cet élève rapproche la situation d'une autre, vécue précédemment, sur la numération décimale et les *paquets* de dix : l'élève convoque ce mot pour désigner les bandes d'étoiles par un rapprochement qui pourrait effectivement rendre service à tous. Faire des paquets de 5 comme on fait des paquets de 10, et partir de là pour aller vers une technique semblable à celle qui donne l'écriture décimale d'un entier (on rappelle que l'écriture d'un nombre en base n suppose une suite de divisions par la base n , l'écriture elle-même étant la suite des restes : le modèle mathématique est le même, le rapprochement pertinent). Or l'enseignante rejette ce mot au profit du

⁹ Au sens de Brousseau, un milieu objectif c'est-à-dire, capable de fonder une suite de jeux dont le professeur puisse faire dévolution aux élèves.

mot « bande » : « *il faut qu'on emploie bien le terme parce que sinon on va se mélanger si on emploie pas les mêmes termes chacun.* »

Ce terme va pourtant réapparaître plus tard, à la fin de la deuxième séance, lorsque les élèves sont en train de travailler sur les boîtes d'œufs. Un élève dit, à propos du travail de quelqu'un d'autre : « *elle a fait des paquets* » et l'enseignante reprend ici le terme de « paquet » : « *elle a fait n'importe quand comment ces paquets ou est ce qu'elle a choisi quelque chose ?* » et l'élève répond « *elle a choisi des paquets de six* ». Mais l'analogie ne va conduire à aucun travail de formulation, alors qu'elle donnait, à qui aurait cherché comment faire, les moyens d'utiliser les connaissances de la numération pour développer une technique à partir de l'idée de « faire des paquets » et lui donner un sens nouveau en généralisant son usage. Mais sans doute cela aurait-il supposé une interprétation « combinatoire » du problème, probablement non disponible.

Les classes ne sont donc pas confrontées à la même situation, alors même que le type de tâche est identique, puisque les jeux qu'elles ont à jouer pour résoudre un même ensemble de problèmes ne sont pas de même nature (ce qui se voit aussi au fait qu'ils ne contiennent pas les mêmes éléments symboliques et langagiers). Le milieu dépend à la fois du passé de la classe, de la mémoire du professeur et des élèves sur ce qu'ils ont fait auparavant, et du devenir de la classe tel qu'il peut être anticipé par les élèves, mais surtout tel qu'il l'a été par le professeur. L'anticipation, par Roger, de l'importance des techniques dans le rapport des élèves aux tâches proposées, et de l'efficacité différente des techniques possibles, l'a amené à proposer un travail sur le comptage qui va devenir un élément essentiel du milieu d'un jeu de formulation, mais l'action qu'il a proposée est demeurés sous son contrôle absolu ; Renée en revanche ne propose pas ce mouvement vers la formulation d'une technique, alors même que le travail qu'elle organise lui aurait donné sens et que les élèves s'y essaient. Rita enfin aboutit à un travail graphique complexe, dont on ne sait pas s'il aurait pu donner, dans un temps de formulation ultérieur, une forme et une technique pouvant faire mémoire.

7. PHÉNOMÈNES DIDACTIQUES

Nous avons voulu mettre à l'épreuve de la contingence certaines des catégories de description (triple analyse *a priori*, types de tâches, techniques, systèmes sémiotiques, mésogenèse, topogenèse, chronogenèse) de l'action conjointe professeur-élèves que nous partageons avec les auteurs de cet ouvrage. Cette mise à l'épreuve est double : d'une part elle permet de montrer la pertinence ou la non pertinence de telles catégories pour analyser des séances de classe telles qu'on peut les observer, d'autre part elle permet d'analyser la résistance de certaines de ces catégories lorsqu'on les confronte à d'autres outils théoriques.

7.1 L'analyse *a priori* comme méthode

L'analyse *a priori* (dans sa dimension plurielle, relative aux instances du système didactique) est l'une de ces catégories. Notre hypothèse est que cette analyse est pertinente pour caractériser l'action conjointe professeur-élève et nous pensons avoir montré, à travers nos analyses, qu'elle permet de rendre visibles un certain nombre de phénomènes didactiques en confrontant l'observation contingente à la construction anticipée selon les catégories théoriques. C'est donc une technique d'observation expérimentale qui suppose de disposer d'une théorie partielle c'est-à-dire, de la possibilité de décrire par avance certains caractères du système observé. Dans le cas qui nous intéresse, l'identification du problème conceptuel posé par la double inégalité en est le bénéfice le plus important. L'analyse permet d'anticiper un problème d'apprentissage mais nous le posons du point de vue du professeur. L'analyse rend compte de certaines difficultés des professeurs à faire vivre un jeu où l'action soit sous la responsabilité des élèves puis, à passer à un jeu de formulation. Alors, le chercheur observe comment les élèves tentent de jouer (avec les objets matériels et intellectuels à leur disposition) un jeu que le professeur puisse reconnaître comme celui qu'il avait imaginé et inversement, comment le professeur tente de faire vivre des règles du jeu permettant aux élèves de développer le jeu attendu (dont le savoir est la clé).

7.2 Réduction de la complexité conceptuelle

Nous avons choisi d'effectuer une analyse *a priori* selon deux axes principaux : le premier axe est celui du modèle formel mathématique qui nous pouvons identifier dans les situations, le second axe est celui des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour attaquer le problème posé. Nous avons commencé à donner quelques éléments du troisième axe – celui des problèmes didactiques rencontrés par un professeur -, au fur et à mesure de nos besoins. Nous aurions pu travailler sur les variables didactiques les changements induits par ces variables, mais nous aurions alors pris le risque d'interpréter nos observations comme les effets de décisions du professeur sur les valeurs données aux variables. Nous avons préféré mettre l'accent sur un modèle formel mathématique pour souligner les difficultés conceptuelles que les élèves pouvaient rencontrer. En essayant de trouver des techniques fondées sur les savoirs et connaissances que nous pouvons attribuer aux élèves d'un CP, nous montrons en revanche les connaissances nécessaires pour que la situation induite par les interactions du professeur et des élèves puisse être abordée par ces derniers. Le modèle formel nous permet donc d'analyser comment professeurs et élèves transforment et créent des *milieux différentiels* en ouvrant à certains élèves l'accès au type de tâches visé et en les laissant inabordable pour d'autres. Nous entendons ici *milieu différentiel* comme l'ensemble des différents milieux qui correspondent à des variations (dont les écarts peuvent être assez importants) produites à partir du même *type de tâche*. Les systèmes sémiotiques et les organisations praxéologiques mathématiques sont donc pour nous un des moyens d'étudier et d'analyser la transformation d'un modèle formel définissant une situation possible en un modèle fonctionnel où l'on observe comment les élèves se confrontent en situation à un problème mathématique mis à leur portée ou demeuré hors d'atteinte, et ainsi de décrire à la fois, le milieu différentiel de leur activité et la manière dont il a été produit.

L'analyse *a priori* identifie ainsi un phénomène didactique qui s'applique à ces cas particuliers mais peut-être aussi à d'autres classes et autres professeurs. Ce phénomène est celui de la *réduction de la complexité conceptuelle* : il y a une réduction de la complexité conceptuelle des problèmes proposés d'autant plus importante que le modèle mathématique qui les définit dans la classe peut y être porté par des systèmes sémiotiques experts, c'est-à-dire d'une grande technicité. Il nous semble avoir montré par exemple que la contrainte de la double inégalité qui caractérise les problèmes des étoiles et des œufs doit être portée par un système sémiotique que les élèves puissent inventer ou dont ils puissent s'emparer, par exemple le discours « juste ce qu'il faut, ni trop ni pas assez ». Cette forme rhétorique délicate réduit la complexité du problème que les élèves ont à traiter sans tuer le problème lorsqu'elle vient comme une solution aux difficultés rencontrées lors des premières tentatives de résolution, parce qu'elle permet aux élèves de guider leur tâtonnement en évaluant leur position dans un jeu qui se simplifie progressivement. Mais on observe aussi, chez René, comment des éléments techniques donnés par avance ont tendance à tuer le problème avant même que de nombreux élèves l'aient identifié.

7.3 Les outils, les techniques et les milieux

Un deuxième phénomène didactique est celui du *rôle des techniques dans la production des milieux* de la situation et dans l'organisation des rapports des sujets à ces milieux. Le type de tâche proposé aux élèves est le même dans les trois classes mais les situations créées ne sont pas les mêmes. L'une des différences tient à la présence ou l'absence des types d'outils que les interactions avec les objets du milieu conduisent à mobiliser, et donc à la présence possible de telle technique que ces outils aident à inventer par productivité du système sémiotique ou à appeler en mémoire et travailler dans un nouveau contexte. L'analyse des outils sémiotiques disponibles est ainsi un moyen pour imaginer les diverses manières dont les élèves peuvent s'attaquer à un type de tâche ; c'est donc un moyen pour décrire différents types de rapport des élèves aux milieux, dans les situations didactiques. Un troisième phénomène didactique est celui du *discours différenciant* qui pourrait alors être formulé de la manière suivante : le type, la présence, ou l'absence d'un discours qui accompagne la production d'une réponse est un élément différentiel des milieux auxquelles les élèves sont confrontés. Ainsi, le milieu relatif à un type de tâche identifié dans l'analyse *a priori* conduisant à

un modèle mathématique est très variable, selon que les techniques sont invisibles (l'élève produit la réponse), faibles (l'élève produit la réponse et met en place un discours associé à la technique) ou fortes (l'élève produit la réponse, explicite un discours associé à la technique et le valide comme technologie). L'analyse *a priori*, qui porte alors sur la *transposition didactique*, montre encore que les différentes techniques ne sont pas toutes de la seule responsabilité de l'élève ou du professeur. Non pas que les techniques invisibles soient dans le topos de l'élève et les techniques fortes dans le topos du professeur, car nous avons pu montrer comment les élèves, dans les classes observées, peuvent avoir un rôle important pour proposer des embryons de techniques (qui ne sont pas forcément repris par le professeur), et comment tel professeur prend la responsabilité du discours de la technique en indiquant aux élèves, par un discours répétitif, des systèmes sémiotiques constitutifs d'une technique à partager (nous retrouvons ici des éléments qui correspondent à ce que Brousseau (2005) nomme les *représentations*) tandis que d'autres laissent leurs élèves développer des embryons techniques qu'ils n'institueront jamais.

Enfin, la présence ou non de techniques de vérification de la réponse produite est un élément qui peut faire varier la direction de développement d'une situation dans les conditions de sa vie ordinaire. C'est là un phénomène didactique important. Par exemple, la vérification produite spontanément par les élèves comme contrôle de la pertinence de leurs stratégies dans un jeu peut devenir un élément essentiel du milieu. Mais inversement, le renvoi systématique des élèves aux procédures de vérification interdit l'évolution d'un jeu d'action en jeu de formulation et le développement collectif d'une technique faible.

7.4 Rythmes des séances et économie temporelle

D'autres éléments que les techniques peuvent être pris en considération pour mettre en évidence les différents milieux produits à partir du même type de tâche. Par exemple, la présence ou l'absence de règles constitutives du jeu, et lorsque ces règles sont présentes le moment et la manière dont elles sont indiquées peuvent avoir un effet différentiel dans les rapports des élèves à ces milieux. Mais si nous nous intéressons maintenant à la troisième dimension de l'activité didactique, la production d'une progression officielle du collectif qu'est la classe, alors nous pouvons remarquer que ce que nous avons dit dans les analyses précédentes nous donne des éléments que nous pourrions confronter à ce que donne, à un autre grain d'analyse, le découpage de l'intrigue didactique en épisodes constitutifs d'un synopsis (Schubauer-Leoni, Leutenegger et Mercier, 1998 ; Schubauer-Leoni, 2000 ; Assude et Mercier, et Sensevy soumis), tel que nous l'avons proposé plus haut.

La production de l'intrigue didactique des trois séquences observées permet de situer dans le temps les épisodes choisis dans notre travail comme représentatifs de l'introduction de techniques nouvelles ou du développement de techniques invisibles ou faibles. Les synopsis rendent évidente la pression temporelle sur le professeur et le labeur du professeur pressé. Car le travail sur les techniques que nous avons fait permet de voir que les élèves ne suivent pas toujours le rythme imposé par le professeur : si leur progression s'arrête alors le temps didactique avance à vide et le professeur doit revenir en arrière (Mercier, Schubauer-Leoni, Donck, Amigues, 2005). Mais si le professeur n'organise pas de progression officielle en n'instituant pas même une technique faible, alors tous les élèves piétinent. La voie sur la crête entre les deux dangers est fort étroite.

Comment analyser la progression du savoir ? Nous appelons *rythme d'une séance* le rapport entre le temps didactique et le capital-temps (Assude 2005). Les rythmes des séances des trois classes observés sont différents. Le rythme des séances dans la classe de Roger est beaucoup plus rapide que ceux des deux autres classes, par exemple que le rythme des séances de la classe de Renée. Dans cette dernière classe, pendant 29 minutes la classe a abordé deux tâches T1.1 et T1.2 tandis que dans la classe de Roger pendant 28 minutes la classe a abordé non seulement T1.2, T1.3 mais aussi T3.1, T3.2 et en plus les tâches T-1, T-2, T-3 (tâches de calcul mental). Ces rythmes différents indiquent que le travail fait dans la classe n'est pas le même, et le tempo¹⁰, qui rend compte de la

¹⁰ *MUS., JAZZ*: Ensemble des éléments rythmiques d'un morceau qui lui donnent son style particulier, son caractère. Synon. *rythme, cadence. Tempo rapide. Sur le tempo lent, Hawkins, depuis 1929, s'est fortement inspiré de Louis Armstrong (PANASSIÉ, Jazz hot, 1934, p. 143). LITT., THÉÂTRE*: Allure particulière qu'un auteur donne au déroulement

manière dont le rythme engage les élèves dans une progression personnelle, caractérise l'action conjointe professeur-élèves (cf. Schubauer-Leoni et al dans cet ouvrage). Roger, dans l'entretien, indique explicitement : « *j'aime bien moi que ce soit euh... très rythmé* », mais nous avons vu qu'il est conduit à reprendre son travail, faute d'avoir entraîné les élèves dans son mouvement.

Une des stratégies de gestion temporelle de ce professeur est bien celle de ne pas passer trop longtemps dans la définition et dans la dévolution du problème. D'ailleurs, il le dit explicitement :

« *j'évite de proposer des situations + ou de mettre en place des situations + euh... style celle d'Ermel où euh... où y a beaucoup de temps de mise en place* ». Comment va-t-il s'y prendre ?

L'une des stratégies, comme nous l'avons vu auparavant, est celle d'impliquer personnellement les élèves par des situations placées dans leur contexte personnel ou familial. Le professeur parle de « simplifier les situations » et cette simplification pour lui consiste à contextualiser : « *on simplifie au maximum pour avoir une situation de... de classe la maman d'untel + le papa d'untel + les crêpes qui ont été amenées euh... euh + untel qui a des bonbons euh... euh... <... ?> qu'a des couettes sur la tête + on fait des calculs avec tout ça et on joue avec euh... avec les nombres* ».

Le rythme des séances de la classe de Roger est particulièrement rapide à cause du mode de travail choisi : les élèves travaillent avec l'ardoise et très vite on passe au collectif. Le temps des activités collectives est plus important que le temps de travail individuel, ce qui est possible car le professeur veut qu'ils travaillent sur le calcul mental et sur ce qu'il appelle le « raisonner dans la tête » :

« *maintenant c'est... dur pour les enfants c'est que... je travaille beaucoup sur le... calcul mental + sur euh... euh les stratégies de calcul euh... pas forcément un raisonnement euh... les forcer à s-raisonner dans la tête et... y vont d'moins en moins s'appuyer sur de l'écrit* ». Le rythme des séances de Roger est fondé sur plusieurs stratégies de gestion temporelle :

- une définition du jeu qui s'appuie sur un contexte connu de la classe, proche des élèves, présenté de manière à ce qu'ils puissent s'impliquer personnellement ;
- un travail qui s'appuie sur le raisonnement oral et mental accompagné par des questions du professeur ;
- un travail collectif plutôt qu'un travail en petits groupes ou individuel, un rythme accéléré par le renvoi des moments de la construction du temps personnel des élèves à l'extérieur de la classe.

En revanche, le rythme de la séance de Renée est plus lent. Elle propose aux élèves de manipuler les bandes d'étoiles et les boîtes d'œufs : cette phase de manipulation ralentit le rythme de la séance car le capital-temps dépensé est assez important par rapport à l'avancement du temps didactique.

Renée, lors de l'entretien, dit explicitement l'importance qu'elle accorde aux manipulations dans ce contexte : « *quand j'ai préparé ça, je me suis beaucoup basé sur Ermel mais je me suis beaucoup basé sur l'idée qu'il fallait les faire absolument vérifier leurs anticipations par manipulation concrète donc c'est pour ça que tu as vu, tous, toutes les manip au tableau plus les collages sur feuille, etc., je voulais absolument les imprégner, on va dire, de différentes manipulations.* » La phase de manipulation, étant une phase de dépense importante de capital-temps, peut être questionnée.

D'ailleurs, Renée dit dans l'entretien que si elle avait fait de changements elle aurait « fait un raccourci sur les boîtes d'œufs : « *Je n'aurais pas refait de manipulation sur les boîtes d'œufs et je leur aurais peut-être proposé les exercices boîtes d'œufs directement avec une valeur d'évaluation* ». Ainsi, une stratégie de gestion temporelle pour Renée serait alors de réduire le temps des manipulations. Le rythme plus lent de cette classe est effectivement fondé sur une alternance de travail individuel et collectif et une importance du travail individuel de manipulation.

de son œuvre et qui a pour effet le développement (et le dénouement) plus ou moins rapide de l'action. Synon. *rythme*. LING., PHONÉT. Allure de l'énoncé (lente, rapide, saccadée) qui est donnée par la fréquence de l'accent rythmique. PSYCHOL., lang. cour. Rythme naturel et spontané, propre à chaque individu, qui se traduit par une vivacité plus ou moins grande dans les gestes, la parole, l'écriture, etc. *Je remarque encore un autre trait de cet « impetus » de l'enfance à la vieillesse: c'est son rythme, je dirais mieux son « tempo »; il n'y a aucune absurdité, sinon dans les mots et par rapport aux notions physiques de vitesse et d'accélération, à dire que la vie ne va pas aussi vite à tous les âges* (RICŒUR, Philos. volonté, 1949, p. 406). CNRS et Université de Nancy, 1971-1994. Trésor de la Langue Française informatisé, Paris: CNRS éditions.

Un quatrième phénomène didactique est donc celui de *l'économie temporelle* de la classe, qui peut être formulé de la manière suivante : la gestion temporelle dans la classe est faite en partie en estimant la valeur temporelle des situations de manière à économiser le maximum de capital-temps tout en faisant avancer le temps didactique. En d'autres termes, le rythme d'une séance doit être ni trop lent ni trop rapide. Si le rythme est trop lent, le professeur va mettre en œuvre des stratégies pour économiser le capital-temps (exemple des manipulations) si le rythme est trop rapide les élèves ne suivent plus et le professeur est obligé de revenir en arrière, le tempo est heurté.

CONCLUSION

Ainsi que la reconstruction proposée par le synopsis le montre, l'impression première donnée par un enseignement est trompeuse parce que l'observateur prend inconsciemment un point de vue : celui du savoir officiellement présenté, celui du professeur, celui des élèves, ou même celui de tel élève. De chacun de ces points de vue le paysage apparaît différent. Il est donc nécessaire d'apprendre à suspendre notre jugement jusqu'au terme de cette reconstruction c'est-à-dire jusqu'au moment de sa validation par le croisement des points de vue. Le leçon est encore une fois édifiante : les techniques les plus efficaces sont proposées très vite par Roger mais elles ne semblent pas apprises par tous les élèves, leur usage met en difficulté de nombreux élèves, tandis que la faiblesse du travail technique chez Rita semble maintenir les élèves dans une activité sans objet. Cependant, Rita et Renée comme Roger montrent bien aux élèves, par des procédés pourtant fort divers, qu'ils abordent là un type de tâches nouveau : plusieurs questions semblables sont posées et la répétition des cas montre la généralité de la question. Ces professeurs sont expérimentés et leurs élèves savent tout de suite ou presque qu'il y aura, là, matière à étudier encore.

Enfin, nous pouvons revenir sur le phénomène que nous avons nommé la réduction de la complexité conceptuelle. Car on peut voir dans la comparaison des synopsis comment le système des objets que les élèves manipulent contribue aux problèmes qu'ils se posent. Les élèves de Roger ne semblent pas, dans le premier moment du travail, rencontrer de difficultés avec la question des oeufs ou étoiles surnuméraires qui encombre les élèves de Rita. C'est que cette dernière a constitué le « reste » en objet et donc en problème potentiel, parce qu'elle demande de « dessiner les étoiles en trop » mais aussi parce qu'elle laisse les élèves s'affronter au problème initial par un *dessin* des bandes qui conserve les propriétés d'une représentation des objets sans devenir schéma d'un traitement symbolique du problème (Mercier et Tonnelles, 1993) comme c'est le cas par exemple chez Renée, qui engage à une représentation des boîtes sans dessin de leur contenu. Nous comprenons alors mieux comment Roger a, en donnant une technique experte à étudier, déplacé le problème bien plus qu'il n'y paraissait à première analyse : ses élèves travaillent plus le sens d'un modèle culturel que constituent les nombres et l'écriture additive, que le problème de la production d'un encadrement comme réponse à un problème.

L'un de ces professeurs est-il plus efficace et si c'est le cas, tous les élèves profitent-ils également des interactions que ce professeur propose ? Répondre à une telle question suppose à la fois une analyse des mathématiques effectivement enseignées dans ces classes, analyse qu'il faudrait conduire sur un empan mathématique plus large, mais cela demande aussi un suivi à long terme de la progression individuelle et collective des élèves et un suivi personnel de leur biographie didactique. Ce n'est pas l'objet de cet article mais c'est le sens de la recherche dont il rend partiellement compte : engager ce type d'études.

Nous avons montré ici que les situations didactiques au sens de Brousseau (1986 ; 1998) peuvent se réduire soit, à un jeu sans enjeu déclaré soit, à un jeu dont l'enjeu est déclaré trop tôt ; nous avons montré aussi que c'est, toujours, *un jeu* que chacun des sujets de l'institution tente de faire vivre, chacun attendant de l'autre qu'il aide à le définir et à le réguler, parce que du savoir en est l'enjeu partagé. C'est ainsi que des élèves apprennent. Pas tous les élèves, et ils n'apprennent pas exactement ce qui était attendu parce que, déjà, ce qui est enseigné n'est pas exactement ce que nous attendons. Une analyse de cet écart supposerait encore un tour du travail que nous avons montré, avec une étude de la position de l'équipe de recherche permettant de rendre compte de son intervention dans le processus. Cela est de fait hors de portée : notre intervention avait pour but la

création d'une petite instabilité du système permettant d'observer la manière dont il retrouve son point d'équilibre (Schubauer-Leoni et Leutenegger, 2002) et de ce point de vue, nous avons rendu compte de la manière dont notre intervention a rempli son rôle.

RÉFÉRENCES

Assude T (2005), Time Management in the Work Economy of a Class, A Case Study : Integration of Cabri in Primary School Mathematics Teaching, *Educational Studies in Mathematics*, 59.1-3, 183-203.

Assude T & Mercier A (2006), *Relations entre techniques, ostensifs et milieux*, Actes du Premier Congrès International sur la théorie anthropologique du didactique, Baeza.

Assude, T., Mercier, A., Sensevy, G., (accepté), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. Une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32 pages.

Bartolini-Bussi, M.G., et Mariotti, A., (1999), Semiotic mediation: from history to the mathematics classroom. *For the learning of mathematics*, 19-2, 27-35.

Bosch, M., et Chevallard, Y., (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19.1, 77-124.

Bolea, P.; Bosch, M., Gascón, J., (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21.3, pp. 247-304.

Brousseau G (1987). Fondements et méthodes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7.2, 33-115.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau (2004). Les représentations: étude en théorie des situations didactiques. *Revue des Sciences de l'Education*, XXX 2, 241-278.

Chevallard, Y., (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12.1, 73-112.

Chevallard, Y., (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19.2, 221-266.

Contreras, A., Font, V., Luque, L., Ordonez, L., (2005), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25.2, 151-186.

Duval R (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Matheron, Y., (2002), Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21.3, 207-246.

Matheron, Y., et Mercier, A., (2005), Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels. *Revue des Sciences de l'Education*, XXX 2, 355-378.

Mercier, A., (1995) La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, , .

Mercier, A., (1998), La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18.3, 279-310.

- Mercier, A., Schubauer-Leoni, M-L., Donck, E., & Amigues, R.r (2005). The Intention to Teach and School Learning: The Role of Time. In A-N. Perret-Clermont (Ed.), *Thinking Time A Multidisciplinary Perspective on Time*. USA, Canada, Switzerland: Hogrefe & Huber, pp. 141-154.
- Schubauer-Leoni, M.L. (2000) Comprendre l'éducation depuis la psychologie en passant par une approche de didactique comparée, *Carrefours de l'éducation*, 9, 65-94.
- Schubauer-Leoni, M-L., Leutenegger, F., et Mercier, A., (1998), Interactions didactiques dans l'apprentissage des „grands nombres“. In M. Gilly, J-P. Roux, A. Trognon, (Ed) *Apprendre dans l'interaction*. Nancy: PUN. 301-328.
- Schubauer-Leoni, M-L., et Leutenegger, F., (2002), Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique „ordinaire“. In F. Leutenegger et M. Saada-Robert (Ed), *Expliquer et comprendre en Sciences de l'Education*. Bruxelles: De Boeck Université, pp. 227-251.
- Schubauer-Leoni, M-L., et Leutenegger, F., (2005), Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue Suisse des Sciences de l'Education*, 27, 2005/3, 409-427.
- Sensevy, G., (2001), Modèles de l'action du professeur: nécessités, difficultés. In A. Mercier, G. Lemoyne, A. Rouchier (Ed), *Le génie didactique*. Bruxelles: De Boeck Université, pp. 209-231.
- Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M-L., (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la Course à 20, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 20.3, 263-304.
- Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M-L., Ligozat, F., & Perrot, G., (2005). An attempt to model the teacher's action in mathematics, *Educational Studies in mathematics*, 59 (1),153-181.
- Serfati, M., (2005), *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris: Editions Pétra, 427p.
- Steinbring, H., Sierpinska, A., Bartolini-Bussi, M.G., (Ed) (1998), *Language and communication in the mathematics classroom*, Reston, VA.: NCTM.
- Tiberghien, A., (1994), Modeling as a basis for analyzing teaching-learning situations. *Learning and Instruction*, 4, 71-87.
- Vergnaud, G., (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne: Peter Lang.