

# Décompositions structurelles et sémantiques

## Rapport préliminaire\*

Philippe Jégou

Cyril Terrioux

Aix Marseille Univ, Université de Toulon, CNRS, LIS, Marseille, France  
 {philippe.jegou, cyril.terrioux}@lis-lab.fr

### Résumé

Dans le cas des modèles graphiques, même les plus simples comme les CSP (réseaux de contraintes), les décompositions généralement proposées dans la littérature s'intéressent pour l'essentiel à la structure. Cela étant, afin de mieux appréhender un problème dans sa globalité, il serait souhaitable aussi de prendre en compte sa sémantique, au sens des domaines des variables, et des relations de compatibilité qui leur sont associées via les contraintes. Dans cette note, il est proposé une nouvelle approche de la problématique qui prend justement en compte ces deux aspects pour définir une nouvelle forme de décomposition et son paramètre associé. L'une des ambitions d'une telle démarche et qui peut d'ailleurs constituer un réel défi pour la communauté, est de dépasser les limites actuellement posées par les décompositions arborescentes de graphes de *tree-width* (ou largeur) bornée. On montre ainsi que le paramètre que nous proposons minore systématiquement la *tree-width* d'un réseau de contraintes binaires (cf. théorème 1) qui constitue "la" borne fondamentale actuelle pour le traitement de nombreux problèmes combinatoires, dès lors qu'ils s'expriment en termes de graphes et qu'il s'agit de les résoudre par des approches fondées sur leur structure. Toutefois, si ce premier résultat semble démontrer la pertinence d'une telle approche, cette contribution doit être considérée comme une contribution très préliminaire à une éventuelle nouvelle voie de recherches.

## 1 Introduction et notations

L'objectif ici est de proposer une nouvelle forme de décomposition qui prend en compte, outre la structure, les caractéristiques sémantiques des modèles graphiques considérés. Dans ce cadre, l'aspect structurel repose sur une décomposition de graphe

(mais aussi d'hypergraphe) qui n'est pas nécessairement arborescente. Cette décomposition permet de définir un graphe de clusters (un cluster étant un sous-ensemble de variables et définissant ainsi un sous-problème). Sur cette base, en considérant la résolution de chaque sous-problème induit par chaque cluster, on peut définir une instance de CSP binaire (ou de méta-CSP binaire) dont chaque variable correspond à un cluster dont le domaine est défini par les solutions locales associées à ce cluster. L'aspect sémantique va également considérer l'agencement des clusters, non pas au niveau structurel, mais au niveau sémantique. L'idée de base est d'exploiter au niveau du méta-CSP binaire les classes polynomiales de CSP définies en termes sémantiques. Il en existe un certain nombre [2], mais nous illustrons cette possibilité avec la classe polynomiale hybride *BTP* [3], ce qui permet déjà de proposer une décomposition dont la largeur sera toujours inférieure ou égale à la *tree-width*. Cela étant, toute classe polynomiale de nature sémantique est *a priori* envisageable, en repoussant la question de la reconnaissance, i.e. du méta-problème qui peut ouvrir sur de nombreuses difficultés.

Nous rappelons la définition d'un CSP d'arité quelconque, et donc les notations utilisées ici. Un CSP  $P$  sera noté par un triplet  $(X, D, C)$  avec  $X$  l'ensemble des variables que l'on note  $\{x_1, \dots, x_n\}$  avec donc  $n$  le nombre de variables.  $D = \{D_{x_1}, \dots, D_{x_n}\}$  représente l'ensemble des domaines avec  $D_{x_i}$  le domaine de la variable  $x_i$  ( $d$  notera la taille maximum des domaines).  $C$  désigne l'ensemble des contraintes  $\{c_1, \dots, c_e\}$  avec  $e$  le nombre des contraintes. Chaque contrainte porte sur un ensemble de  $r$  variables au maximum. Cet ensemble est appelé scope (ou portée) d'une contrainte et il est noté  $S(c_i)$ . Si l'arité d'une contrainte est égale à 2, la contrainte est dite

\*Ce travail est soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet DEMOGRAPH (ANR-16-C40-0028)

binaire et on notera par  $c_{ij}$  la contrainte qui porte sur  $x_i$  et  $x_j$ . Un CSP dont toutes les contraintes sont binaires est dit binaire. À chaque contrainte  $c_i$ , on associe une relation  $R(c_i)$  qui définit l'ensemble des valeurs, des tuples donc, qui peuvent être affectées simultanément aux variables de  $S(c_i)$  pour la satisfaire.

## 2 Une décomposition alliant structure et propriétés sémantiques

Nous donnons maintenant la définition de la nouvelle décomposition. Cette définition s'appuie sur une décomposition structurelle en clusters qui n'est pas nécessairement arborescente (comme dans [5]) couplée avec une classe polynomiale de CSP notée  $\mathcal{C}$  (pour *tractable Class*). Cela étant, autoriser une décomposition en clusters peut conduire à une explosion combinatoire car le nombre de ceux-ci peut potentiellement être exponentiel en le nombre de sommets du graphe considéré (jusqu'au nombre d'éléments figurant dans une frontière du treillis des parties de l'ensemble des sommets). Aussi, contrairement à [5], et pour conserver la capacité à définir des méthodes de résolution de complexité polynomiale, le nombre de clusters sera paramétré par une constante  $k$  correspondant au degré du polynôme associé à ce nombre. Nous parlerons donc ainsi de  $\mathcal{C}$ - $k$ -décompositions. Nous verrons qu'il existe d'autres points de divergence d'avec l'approche proposée dans [5], tant au niveau de la nature de la connectivité dans la décomposition qu'au niveau de la connexité interne imposée dans [5] au niveau des clusters mais non requise ici.

La suite de cette note considère aussi bien les CSP binaires (graphes de contraintes) que les CSP d'arité quelconque (hypergraphes de contraintes). Cela étant, même dans le cas des hypergraphes de contraintes, il est possible de considérer des décompositions de graphe (cf. par exemple [5]). Pour cela, il suffit de considérer la notion de  $2$ -section [1] également appelée *graphe primal* dans la communauté CSP.

Puisque l'objectif est de définir des décompositions de modèles graphiques, ici simplement de CSP, les décompositions devront prendre en compte les solutions associées aux instances. Cela passe par la conservation, dans l'objet décomposé, de l'ensemble des solutions de l'objet originel. Pour garantir cette condition, nous rappelons la définition de problème *dual* :

**Définition 1 (Dual d'une instance CSP)** *Le dual d'une instance de CSP  $P = (X, D, C)$  est un CSP binaire  $Dual(P) = (X^{Du}, D^{Du}, C^{Du})$  où chaque variable  $X_i^{Du} \in X^{Du}$  correspond à  $S(c_i)$  et son domaine est défini par les tuples de la relation  $R(c_i)$ ,*

*et une contrainte  $c_{ij}^{Du} \in C^{Du}$  relie deux variables  $X_i^{Du}$  et  $X_j^{Du}$  si celles-ci partagent au moins une variable d'origine, i.e. si  $S(c_i) \cap S(c_j) \neq \emptyset$ . La relation de compatibilité  $R(c_{ij}^{Du})$  est définie par les couples de tuples  $(t_i, t_j) \in D_i^{Du} \times D_j^{Du}$  tels que  $t_i[S(c_i) \cap S(c_j)] = t_j[S(c_i) \cap S(c_j)]$  (la notation  $t[\dots]$  désigne l'opérateur de projection).*

On peut démontrer très facilement qu'il existe une bijection entre l'ensemble des solutions du CSP originel et son dual car l'affectation des variables d'une solution correspond tout simplement à une collection de tuples (un par contrainte et donc relation) qui sont tous compatibles deux à deux (pour la satisfaction des contraintes binaires de  $Dual(P)$ ) [4]. Dans [4], il est également démontré que ce CSP dual peut posséder des contraintes (binaires) redondantes et que celles-ci peuvent donc être supprimées, tout en conservant une instance équivalente (au sens de l'existence d'une bijection entre ensembles de solutions). On parle alors d'*intergraphe de contraintes* associé à  $P$ , ou plutôt ici de *dual partiel* d'une instance de CSP :

### Définition 2 (Dual partiel d'une instance CSP)

*Étant donné un CSP d'arité quelconque  $P = (X, D, C)$  et son dual  $Dual(P) = (X^{Du}, D^{Du}, C^{Du})$ , un Dual Partiel de  $P$  est un CSP binaire noté  $Dual_p(P) = (X^{Du}, D^{Du}, C^{Du_p})$  où  $C^{Du_p} \subseteq C^{Du}$  et pour tout couple  $X_i^{Du}$  et  $X_j^{Du}$  tel que  $S(c_i) \cap S(c_j) \neq \emptyset$ , il doit exister un chemin dans le graphe de contraintes associé à  $Dual_p(P)$ , tel que pour toute variable  $X_\ell^{Du}$  figurant sur ce chemin de  $X_i^{Du}$  à  $X_j^{Du}$ , alors  $X_i^{Du} \cap X_j^{Du} \subseteq X_\ell^{Du}$ .*

Dans [4], il est montré que le calcul d'un dual partiel d'une instance de CSP dont le nombre de contraintes est minimum est réalisable en temps polynomial.

Avant de définir les  $\mathcal{C}$ - $k$ -décompositions, il nous faut introduire une autre notion, celle de *Sur-Dual* d'une instance de CSP. Intuitivement, étant donné un CSP d'arité quelconque, un Sur-Dual va consister en un CSP binaire qui recouvre l'ensemble de variables d'un CSP par des clusters (il s'agit donc d'une décomposition), et dont l'ensemble de solutions est le même (à une bijection près).

### Définition 3 (Sur-Dual d'une instance CSP)

*Un Sur-Dual d'une instance de CSP  $P = (X, D, C)$  est un CSP binaire  $SD(P) = (X^{SD}, D^{SD}, C^{SD})$  où :*

- $X^{SD}$  est une famille de sous-ensembles de  $X$  que l'on appelle *clusters*
- $\forall i \neq j$ , avec  $X_i^{SD}, X_j^{SD} \in X^{SD}$ , on a  $X_i^{SD} \not\subseteq X_j^{SD}$  et  $X_j^{SD} \not\subseteq X_i^{SD}$
- $\forall c_j \in C, \exists X_i^{SD} \in X^{SD}$  tel que  $S(c_j) \subseteq X_i^{SD}$

- tout domaine  $D_i^{SD} \in D^{SD}$  est l'ensemble des solutions  $s_i \in \times_{x_j \in X_i^{SD}} D_{x_j}$  du sous-problème de  $P$  induit par les variables  $x_j$  de  $P$  telles que  $x_j \in X_i^{SD}$  et par les contraintes  $c_j$  de  $P$  telles que  $c_j \subseteq X_i^{SD}$ .
- les contraintes  $c_{ij}^{SD} \in C^{SD}$  relient deux variables  $X_i^{SD}$  et  $X_j^{SD}$  si celles-ci partagent au moins une variable de l'instance du CSP d'origine, i.e. si  $X_i^{SD} \cap X_j^{SD} \neq \emptyset$ .
- les relations de compatibilité  $R(c_{ij}^{SD})$  sont définies par les couples  $(s_i, s_j) \in D_i^{SD} \times D_j^{SD}$  tels que  $s_i[X_i^{SD} \cap X_j^{SD}] = s_j[X_i^{SD} \cap X_j^{SD}]$

On peut constater d'une part que tout dual est un sur-dual, et d'autre part, avec le même procédé que dans [4], qu'il existe une bijection entre l'ensemble des solutions du CSP originel et tout sur-dual qui peut lui être associé. De plus, comme pour le cas d'un dual, on peut définir la notion de *Sur-Dual Partiel* d'une instance de CSP, en supprimant les arêtes redondantes, sous la réserve de conserver les mêmes propriétés de connectivité dans le graphe que pour le cas d'un dual partiel i.e. l'existence d'un chemin dans le graphe de contraintes associé tel que pour toute variable  $X_\ell^{SD}$  figurant sur ce chemin de  $X_i^{SD}$  à  $X_j^{SD}$ , alors  $X_i^{SD} \cap X_j^{SD} \subseteq X_\ell^{SD}$ . Un Sur-Dual Partiel de  $P$  sera noté  $SD_p(P)$  et il sera de la forme  $SD_p(P) = (X^{SD}, D^{SD}, C^{SD_p})$  avec  $C^{SD_p} \subseteq C^{SD}$  si le Sur-Dual dont il est issu est  $SD(P) = (X^{SD}, D^{SD}, C^{SD})$ .

On récapitule les liens (i.e. équivalences) entre ensembles de solutions de ces différentes représentations d'instances dans la propriété suivante qui est très simple à démontrer :

**Proposition 1** *Étant donné un CSP d'arité quelconque  $P = (X, D, C)$  :*

- les ensembles de solutions de  $Dual(P)$  et de tout dual partiel de  $P$  sont égaux
- les ensembles de solutions de tout Sur-Dual de  $P$  et de tout Sur-Dual Partiel de  $P$  sont égaux
- les ensembles de solutions de  $P$  et de  $Dual(P)$  sont en bijection
- les ensembles de solutions de  $P$  et de tout Sur-Dual (éventuellement Partiel) de  $P$  sont en bijection

Cette question d'équivalence entre l'ensemble des solutions d'une instance originelle  $P$  et celui d'un Sur-Dual (éventuellement Partiel) de  $P$  est requise pour s'assurer de la validité de la décomposition associée à ce Sur-Dual (éventuellement Partiel). On peut remarquer que si l'on considère une décomposition en clusters comme celle proposée dans [5], il n'existe alors plus de garantie, quand bien même ces décompositions incluent les décompositions arborescentes. En effet, comme pour les décompositions arborescentes,

la connectivité requise pour disposer d'une décomposition au sens de [5] impose qu'il existe au moins un chemin dans le graphe des clusters, tel que si deux clusters partagent une variable du graphe de départ (ici le CSP originel), alors cette variable figure sur tous les clusters de ce chemin, comme c'est d'ailleurs le cas pour les décompositions arborescentes. Cela étant, pour les décompositions arborescentes, cette condition est équivalente à l'existence d'un chemin contenant toutes les variables appartenant à l'intersection des deux clusters puisque le graphe considéré par la décomposition est un arbre. Par contre, si on prend par exemple  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  avec 4 clusters  $E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $E_2 = \{x_1, x_2, x_4\}$ ,  $E_3 = \{x_1, x_5\}$  et  $E_4 = \{x_2, x_6\}$  et une décomposition dont les arêtes sont  $\{E_1, E_3\}$ ,  $\{E_1, E_4\}$ ,  $\{E_2, E_3\}$  et  $\{E_2, E_4\}$ , il existera bien un chemin de  $E_1$  à  $E_2$  contenant  $x_1$ , celui passant par  $E_3$ , et un chemin de  $E_1$  à  $E_2$  contenant  $x_2$ , celui passant par  $E_4$ . Mais il n'en existera aucun contenant simultanément  $x_1$  et  $x_2$  alors que  $E_1 \cap E_2 = \{x_1, x_2\}$ . L'absence de ce chemin ne permet alors pas la conservation de la cohérence au niveau CSP, entre les clusters  $E_1$  et  $E_2$ . Mais elle serait garantie dans une décomposition arborescente car l'arête  $\{E_1, E_2\}$  serait imposée par la structure d'arbre.

La définition des  $\mathcal{C}$ - $k$ -décompositions peut maintenant être présentée :

**Définition 4** *Étant donnée une instance CSP d'arité quelconque  $P = (X, D, C)$ , une constante entière  $k$ , et une classe polynomiale de CSP notée  $\mathcal{C}$ , une  $\mathcal{C}$ - $k$ -décomposition de  $P$  est un graphe  $G = (X^{SD}, F)$  associé à  $SD_p(P) = (X^{SD}, D^{SD}, C^{SD_p})$  qui est un sur-dual partiel de  $P$  et qui vérifie :*

1.  $|X^{SD}| \leq n^k$ , avec  $n = |X|$ ,
2.  $F$  est l'ensemble d'arêtes associées aux portées des contraintes binaires figurant dans  $C^{SD_p}$ ,
3.  $SD_p(P) = (X^{SD}, D^{SD}, C^{SD_p})$  appartient à la classe  $\mathcal{C}$ .

La largeur d'une  $\mathcal{C}$ - $k$ -décomposition est égale à  $\max_{X_i^{SD} \in X^{SD}} |X_i^{SD}| - 1$ . La  $\mathcal{C}$ - $k$ -largeur  $b$  de  $P$  est la largeur minimum pour toutes les  $\mathcal{C}$ - $k$ -décompositions de  $P$ .

On peut remarquer que si  $G = (X^{SD}, F)$  est un arbre, il s'agit tout simplement d'une décomposition arborescente du graphe 2-section associé au CSP  $P$ .

Si on considère une  $\mathcal{C}$ - $k$ -décomposition d'une instance  $P$  de CSP, sa résolution est réalisable en un temps de l'ordre de  $n^k d^{b+1}$  pour la première phase pour le calcul de  $SD_p(P)$  et donc notamment la résolution des clusters de  $X^{SD}$  produisant  $D^{SD}$ , suivi d'un temps polynomial en  $d^{b+1}$  pour la phase consistant en l'exploitation de la classe polynomiale  $\mathcal{C}$ .

### 3 Une illustration avec la classe BTP

Pour illustrer cette décomposition, on peut considérer la classe polynomiale *BTP*. Ainsi, si on a  $\mathcal{C} = \mathcal{BTP}$ , nous montrons que l'on dispose d'une décomposition dont la largeur est inférieure à la treewidth du CSP. Nous rappelons d'abord la définition de la classe *BTP* et ses propriétés utiles ici.

#### Définition 5 (Broken-Triangle Property [3])

Un CSP binaire  $P$  satisfait la Broken Triangle Property (BTP) par rapport à un ordre sur les variables  $<$  si, pour tout triplet de variables  $(x_i, x_j, x_k)$  tel que  $x_i < x_j < x_k$ , si  $(v_i, v_j) \in R(c_{ij})$ ,  $(v_i, v_k) \in R(c_{ik})$  et  $(v_j, v'_k) \in R(c_{jk})$ , alors soit  $(v_i, v'_k) \in R(c_{ik})$ , soit  $(v_j, v_k) \in R(c_{jk})$ .

La propriété BTP permet de définir une classe polynomiale sur les instances de CSP binaires, classe que nous noterons *BTP*. D'une part, les instances de cette classe peuvent être reconnues en temps polynomial en  $O(nd^3)$  (cf. Corollaire 7.5 de [3]), et d'autre part, elle peuvent être résolues en temps polynomial en  $O(nd^2)$  (cf. Théorème 3.1 de [3]).

Notons que BTP englobe un certain nombre de classes polynomiales existantes, certaines de nature sémantiques, et une autre, d'origine structurelle. En particulier, la proposition 4.5 de [3] montre que pour tout CSP binaire arborescent, il existe un ordre qui vérifie BTP.

Cette propriété permet de justifier l'approche proposée par la  $\mathcal{C}$ - $k$ -décomposition. En effet, dans le théorème qui suit, nous montrons qu'elle offre une décomposition qui est systématiquement meilleure que la décomposition arborescente, en ce sens que si la classe polynomiale considérée est *BTP*, i.e. si  $\mathcal{C} = \mathcal{BTP}$ , on dispose alors d'une décomposition dont la largeur est toujours inférieure à la treewidth du CSP :

**Théorème 1** *Pour tout CSP binaire  $P = (X, D, C)$ , on a alors  $b \leq w$  avec  $w$  la treewidth du CSP binaire, et  $b$ , la  $\mathcal{C}$ -1-largeur de  $P$  avec  $\mathcal{C} = \mathcal{BTP}$ .*

**Preuve 1** *On remarque au préalable que pour le cas des décompositions arborescentes, le nombre de clusters peut être majoré par  $n$  (sous l'hypothèse où aucun cluster n'est inclus dans un autre cluster). Ainsi, on peut fixer  $k = 1$ . Ensuite, il suffit de constater que pour toute instance de CSP binaire  $P$ , on dispose d'une  $\mathcal{C}$ -1-décomposition pour laquelle le graphe  $G = (X^{SD}, F)$  est une décomposition arborescente de l'instance  $P$ , car tout CSP binaire arborescent appartient à la classe *BTP*. On en déduit que la  $\mathcal{C}$ -1-largeur de  $P$  est au plus égale à  $w$ .*

### 4 Discussion et conclusion

Si le théorème 1 peut inciter à l'optimisme dans la démarche qui fonde ce travail, cette proposition de décomposition alliant structure et propriétés sémantiques que constitue la  $\mathcal{C}$ - $k$ -décomposition conduit cependant à plusieurs questions ouvertes.

Déjà concernant la complexité du calcul de ces décompositions, la tâche est conséquente car il s'agit d'analyser les différentes classes polynomiales de CSP de nature sémantique, pour étudier la question en profondeur et il en existe un certain nombre [2]. Cela étant, en se limitant à *BTP*, il a été montré que pour une instance de CSP binaire, calculer un sous-ensemble de variables  $S \subseteq X$  de taille maximum dont le sous-problème induit vérifie BTP est NP-difficile (cf. Théorème 9.1 de [3]). Ce résultat semble offrir un premier éclairage sur la complexité de cette question, déjà pour *BTP*, éclairage qui peut conduire au pessimisme. En effet, si vérifier l'appartenance d'un sur-dual partiel  $SD_p(P)$  d'une instance  $P$  à la classe *BTP* est réalisable en temps polynomial, la question de la détermination, pour une instance  $P$ , d'un sur-dual partiel idoine peut s'avérer extrêmement combinatoire. Une voie pour contourner cette difficulté peut cependant consister en l'étude de cette question en s'appuyant sur l'hypothèse d'un paramètre  $k$  constant.

Deux autres interrogations sont aussi légitimes. Ce type de décomposition peut-il admettre des mises en œuvre effectives, et donc opérationnelles en pratique? La difficulté qu'il y a eu déjà pour rendre efficaces en pratique les approches basées sur la décomposition arborescente pose ici question. Et au-delà, concernant des modèles graphiques plus riches que les seuls CSP, comme les WCSP par exemple, ce type d'approche est-il seulement envisageable?

**Remerciements** Nous remercions Mamadou Kanté qui nous a informé de l'existence de l'article [5].

#### Références

- [1] C. BERGE : *Graphes et Hypergraphes*. Dunod-France, 1970.
- [2] C. CARBONNEL et M. C. COOPER : Tractability in constraint satisfaction problems : a survey. *Constraints*, 21(2):115–144, 2016.
- [3] M. COOPER, P. JEAVONS et A. SALAMON : Generalizing constraint satisfaction on trees : hybrid tractability and variable elimination. *Artificial Intelligence*, 174:570–584, 2010.
- [4] P. JÉGOU : *Contribution à l'étude des problèmes de satisfaction de contraintes : Algorithmes de propagation et de résolution – Propagation de contraintes dans les réseaux dynamiques*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, January 1991.
- [5] I. SCHIERING : A Hierarchical Approach to Monadic Second-Order Logic over Graphs. In *Proceedings of CSL*, pages 424–440, 1997.