Mathématiques en perspective : Desargues, la Hire, le Poîvre

Jean-Yves Briend

▶ **To cite this version:**

Jean-Yves Briend. Mathématiques en perspective : Desargues, la Hire, le Poîvre. Archive for History of Exact Sciences, 2021, 10.1007/s00407-021-00275-2 . hal-02925995v3

HAL Id: hal-02925995

https://amu.hal.science/hal-02925995v3

Submitted on 25 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mathématiques en perspective : Desargues, la Hire, le Poîvre

Jean-Yves Briend

12 février 2021

> Soit faict le plan ou Ignographie du quarré A.B.C.D. & pour l'autre plan qui doibt estre l'Orthograhie faut tirer une ligne de terre E.F. & marquer sur icelle un des costez du quarré aux poincts G.H. puis fault asoir le poinct d'eslongnement à volonté qui sera marqué O. puis tirer la ligne taillée I.L. apres faut tirer les rais visuels de chacun angle du quarré au poinct O. lesquels couperont la ligne taillée aux poincts 3.1.2.4. & apres faut eslever le poinct de hauteur sur la ligne de terre de l'Orthographie & qu'iceluy poinct soit aussi loing de la ligne taillée comme celuy d'eslongnement apres tirez les rais visuels des poincts G.H, audict poinct de hauteur marqué M. lesquels couperont la ligne taillée aux poincts aux 5.6. apres fauldra faire le transport des lignes racoursies qui sont sur les deux lignes taillées en ceste façon.
>
> Salomon de Caus, *La perspective avec la raison des ombres et miroirs,* 1612.

Résumé

Il est tentant de considérer l'œuvre mathématique de Girard Desargues, plus particulièrement son *Brouillon Project* sur les coniques, comme un travail de mathématiques appliquées à l'art de la perspective. Nous voudrions montrer dans cet article qu'il est sans doute plus pertinent de considérer que Desargues fait des mathématiques en *praticien de la perspective* ou, plus précisément, que son œuvre peut être lue comme un travail de perspective appliquée à la géométrie. Nous allons analyser quelques passages de l'œuvre du Lyonnais en adoptant ce point de vue perspectiviste afin de montrer comment ce parti pris permet d'éclairer les aspects novateurs d'un contenu mathématique parfois difficile à saisir dans le style touffu de l'auteur. Nous montrerons ensuite comment cette manière de faire de Desargues peut se retrouver chez Philippe de la Hire et Jacques-François le Poîvre, ce qui les a menés à l'idée nouvelle de considérer une *transformation* du plan dans lui-même comme objet explicite de la géométrie.

Abstract. It is tempting to consider Girard Desagues' mathematical work, more precisely his *Brouillon project* on conics, as a work of mathematics applied to perspective. We would like to show in this text that it is probably more pertinent to consider that Desargues does mathematics as a practitionner of the art of perspective. We shall analyze a few extracts of Desargues' work with this point of view in mind so as to shed light on his innovative ideas that could be hard to understand in his sometimes obscure style. We shall show how this way of doing geometry can be also be found in the works Philippe de la Hire and Jacques-Francois le Poîvre, leading them to consider a *transformation* of the plane into itself as an explicited mathematical object.

Introduction

Girard Desargues publie en 1636 un petit opuscule [1] sur la perspective intitulé *L'exemple de l'une des manières du S^r. G. D. L* [2]*. touchant à la pratique de la perspective, Sans employer aucun tiers poinct de distance ou d'autre nature qui soit hors du champs de l'Ouvrage.* Il y développe une méthode générale et rapide pour représenter une scène en perspective à partir de quelques données métriques. Dans un style qui n'appartient qu'à lui, il commence son texte par une clarification du vocabulaire, en explicitant certaines synonymies. Ainsi lit-on en première page la phrase suivante : « Les Mots *Perspective, Aparence, Représentation, & Pourtrait,* y sont chacun le nom d'une même chose. » Les onze premières pages, sur les douze que compte le texte, exposent sa méthode de manière concise et claire. À la page 11 il annonce qu'il va maintenant s'adresser aux « contemplatifs », qui y trouveront « quelques propositions lesquelles peuvent étre énoncées autrement pour diverses matières, mais elles sont accomodées ici pour la perspective, & la démonstration en est assez intelligible sans

1. Ce texte, [9], est disponible en ligne sur le site Gallica de la Bibliothèque nationale de France.
2. Sieur Girard Desargues Lyonnais.

figure, puisque toutes les lignes y sont encore entendues droites, & les tableaux toujours plats. (...) c'est une fourmilière de grandes propositions, abondantes en lieux. » Les seules propositions qu'il énonce concernent la représentation de droites parallèles, ou concourantes, c'est-à-dire, pour utiliser le vocabulaire du *Brouillon Project*[3] de 1639 sur les coniques, de « même ordonnance », dans une série de paragraphes dont la rédaction répétitive montre qu'il ressent dès cette époque les notions de parallèlisme et de concourance comme propres à être unifiées.

Les deux dernières phrases du livret ont une résonnance programmatique :

« La proposition qui suit ne se dévide pas si brièvement que celles qui précèdent.

Ayant à pourtraire une coupe de cône plate, y mener deux lignes, dont les apparences soient les essieux de la figure qui la représentera. »

Précisons ce que Desargues affirme ici être en mesure de faire. Soit une conique, située dans un certain plan et que l'on souhaite représenter en perspective dans un autre plan. Le résultat de cette représentation est encore une conique. On peut construire, dans le plan de la conique que l'on représente, deux droites dont les apparences[4] soient les axes principaux de la représentation de cette conique. Ce sont les méthodes mises en place dans le *Brouillon Project* sur les coniques qui lui permettront de répondre à ce problème.

L'article[5] que nous présentons ici a un double but : celui d'éclairer les échos[6] des conceptions du Lyonnais dans les travaux originaux de Philippe de la Hire et Jacques-François le Poîvre, mais aussi celui de montrer comment l'œuvre géométrique de Desargues peut être lue comme un essai de perspective appliquée à la géométrie, dont l'*impetus* originel se trouve dans la proposition programmatique énoncée ci-dessus. Certains auteur comme Morris Kline[7], Kirsti Andersen[8] ou encore Judith Field[9] ont exploré les liens entre la perspective et la géométrie chez Desargues, mais nous voudrions approfondir ces réflexions en allant au cœur des textes. Nous laissons de côté celui qui a sans doute le mieux reçu l'influence de Desargues, à savoir Blaise Pascal, et renvoyons pour cet aspect au récent article [8] d'Andrea del Centina.

Nous allons pour cela nous concentrer sur des énoncés, constructions ou démonstrations qui s'éclairent de manière remarquable si l'on admet que Desargues y fait appel à des méthodes issues de la pratique de la perspective. Nous verrons alors comment cela a pu mener de la Hire et le Poîvre à conceptualiser certaines constructions classiques de la pratique de la perspective en la notion de *transformation d'un plan dans lui-même*[10], sous la forme d'une *homologie*

3. Pour ce texte [10], *voir* l'édition de René Taton [20].

4. ou représentations

5. À paraitre en 2021 dans *Archive for History of Exact Sciences.*

6. Notons qu'il est très difficile aujourd'hui de démêler quelle *influence* a pu avoir le travail de Desargues sur quelqu'un comme Philippe de la Hire. On notera cependant que son père, Laurent, était un proche de Desargues, que son premier texte sur le sujet des coniques est paru dans un ouvrage d'Abraham Bosse, lui aussi proche de Desargues, et qu'enfin, dans ses *Nouveaux Éléments des Sections coniques* de 1679, il reprend une partie de la terminologie arboricole du Lyonnais. C'est pourquoi nous nous contenterons ici de simples échos, faute d'avoir en main le matériau permettant de confirmer ou d'infirmer une influence directe.

7. *Voir* par exemple [13], p. 144 *sq.*

8. *voir* [1].

9. *Voir* [11].

10. Ceci est un sujet controversé mais nous verrons que, par la présentation qui en est donnée par ces auteurs, il s'agit bien de transformations du plan dans lui-même et non de simples

que nous nommerons ici une *génération de la Hire.*

Afin de fixer un peu le cadre de cet article et un vocabulaire perspectiviste très élémentaire, nous commencerons par examiner la *première proposition géométrique* de 1648, parue en annexe d'un traité de Bosse[11] sur la « méthode universelle » de Desargues, et qui n'est jamais que le fameux théorème sur les triangles perspectifs. Nous nous tournerons alors vers quelques énoncés, preuves ou constructions que l'on trouve dans le *Brouillon Project* de 1639 et plus particulièrement sur les deux endroits où le Lyonnais utilise des conceptions propres à la perspective pour d'une part faire une synthèse de sa théorie de la *traversale,* ou polaire, et d'autre part donner une construction d'une conique dont les foyers sont les images par perspective de points prescrits, ce qui est un exemple de question en lien avec la conclusion de l'opuscule de 1636 sus-cité. Nous pourrons alors donner une analyse détaillée de la construction de la génération de la Hire dans son petit ouvrage intitulé *Les Planiconiques*[12] et de la même transformation, décrite un peu différemment dans le *Traité des sections du cylindre et du cône*[13] de le Poîvre. Nous reviendrons pour finir aux deux autres *propositions géométriques* de 1648 dont nous donnerons une analyse détaillée, car Desargues y donne l'idée d'une « réduction dimensionnelle » permettant, en s'affranchissant de l'idée de relief portée par un dessin en perspective, de donner naissance à une « correspondance » entre figures d'un même plan, correspondance qui n'est autre qu'une génération de la Hire dont il montre qu'elle préserve les birapports.

Introduction : english version

In 1636 Girard Desargues publishes a little booklet entitled *L'exemple de l'une des manières du S^r. G. D. L*[14]*. touchant à la pratique de la perspective, Sans employer aucun tiers poinct de distance ou d'autre nature qui soit hors du champs de l'Ouvrage*[15]*,* in which he presents a general and simple method to represent a scene in perspective, given a few metric data. True to his own inimitable style, he begins by clarifying the vocabulary he will use. On the first page for instance, he states that the words *perspective, aparence, représentation* and *pourtrait* have the same meaning. The first eleven pages are devoted to a clear and concise presentation of his method. Following this, he states that he will now write for the *contemplatifs,* and that they will find "some propositions which might be enunciated differently in other connections but are stated here in a manner relating to perspective ; and the proofs of these propositions can be understood well enough without figure because all the lines are again understood to be straight, and all the pictures flat,[16]" concluding that it is an "anthill[17]" of many great propositions, in which we find an abundance of "loci[18]". Only a few propositions are explicitely stated and they all deal with the representation

projections ou transformations d'une figure sur une autre.

11. *Voir* [7].
12. *Voir* [14].
13. *Voir* [16].
14. Sieur Girard Desargues Lyonnais.
15. *See* Judith Field's and Jeremy Gray's book [12] for an english translation and commentary of this text.
16. Translation by Field and Gray, *op. cit.*
17. « fourmilière » in Desargues' words.
18. « lieux », which probably means "geometric loci" in this context.

of parallel or straight lines. The careful repetition of the phrasing dealing with those cases shows that Desargues was probably already aware of the possible unification of parallelism and convergence for straight lines, a unification that he will complete in his 1639 treatise on conics, the *Brouillon Project*[19].

The last two sentences of the booklet sound like a program :

« The proposition which follows cannot be explained so briefly as the preceding ones.

Given to portray a flat section of a cone, draw two lines [in it] whose appearances will become the axles of the figure which will represent it[20]. »

So Desargues states that given a conic section which we want to represent in perspective in another plane, one can build two lines in the plane of this section which will be represented as the main axes of the *representation* of this conic section, which itself is a conic section. The *Brouillon Project* contains all the necessary tools to show such a construction is indeed possible.

The purpose of this article is twofold. First, we would like to shed light on the echoes[21] of Desargues' conceptions in the works of Philippe de la Hire and Jacques-François le Poîvre, and to promote the thesis according to which the geometrical work of Girard Desargues can be interpreted as an attempt of perspective applied to geometry. Many authors, like Morris Kline[22], Kirsti Andersen[23] or Judith Field[24] have explored the links between perspective and geometry in Desargues' work, but we would like to go further and deeper in this direction by a careful reading of the sources. We shall not study Desargues' influence on the one who directly received it, Blaise Pascal, and refer to Andrea Del Centina's article [8] for this topic.

To this end, we shall analyze a few propositions and their proofs which are highly enlightened if one admits that Desargues uses methods borrowed from the pratice of perspective drawing. We shall see how this way of doing geometry can have led de la Hire and le Poîvre to conceptualize some classical constructions of perspective ine the notion of a *transformation of a plane into itself*[25], in the form of an *homology* we shall name here, according to la Hire, a *generation.*

We begin by examining the *first geometric proposition* of 1648 which was published as an addendum to a book on Desargues *universal method* by Abraham Bosse. It is in fact the well known theorem on perspective triangles, and this will allow us to present the very basics of central perspective representation. We turn afterwards to two sections of the *Rough Draft* on conics of 1639 in which we can strongly feel the perspective inspiration. The first is the synthesis proposed by Desargues at the end of his development of the *traversale*, or *polar* theory. The

19. *See* Field and Gray, *op. cit.*, for a translation of this text, as well as commentaries and some details of its mathematical content.

20. Translation by Field and Gray, *op. cit.*

21. It is very hard to state precisely what the influence of Desargues on Philippe de la Hire may have been. Note that Philippe's father, Laurent, had close a relationship with Desargues, that his first publication on conics was published in a book by Abraham Bosse, also a close relative of Desargues, and that in his *Nouveaux Éléments de Sections coniques*, published in 1679, he uses part of the "arboricultural" terms of Desargues. That is why we shall use the word of "echoes" instead of the stronger one of "influence".

22. see for instance [13], p. 144 *sq.*

23. see [1].

24. see [11].

25. This is a quite debated issue but we shall see that, according to the way the authors present things, it really is a transformation of the plane rather than a simple projection or transformation of a figure into another.

second is the last construction given in his treatise, which deals with a problem similar to the one addressed in the abovementioned proposition of 1636. We can then make a precise presentation of la Hire's construction of his *generation* in his *Planiconiques* and of the very same transformation as proposed by le Poîvre in his *Traîté des sections du cylindre et du cône.* We conclude this artcile by studying the last two geometric propositions of 1648 in which Desargues, by a kind of dimension reduction, describes a correspondance between points of the same plane which in fact is an homology which he shows preserves cross-ratios.

1 La perspective centrale et la *Première proposition géométrique* de 1648

À la fin de son traité [26] intitulé *Manière universelle de M^r Desargues, pour pratiquer la perspective par petit pied, comme le Géométral etc.* paru en 1648, Abraham Bosse fait reproduire l'opuscule de 1636 du Lyonnais, auquel sont ajoutées quelques pages clairement de la main de Desargues et contenant entr'autres trois *propositions géométriques* qui sont inspirées de la pratique de la perspective. La première, que nous allons examiner maintenant, n'est jamais que le célèbre théorème sur les triangles perspectifs.

Commençons par fixer le vocabulaire : soit $\mathcal{P}_0$ un plan dans lequel on dispose d'une figure $A_0, B_0, C_0 \ldots$ et soit $\mathcal{P}$ un autre plan, celui contenant la toile sur laquelle un peintre va dessiner par exemple, et dans lequel on veut *représenter* la figure $A_0, B_0, C_0 \ldots$. La manière la plus simple de définir une telle représentation est de se donner un point S hors de $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}$, point où l'on peut imaginer se trouver l'œil du peintre par exemple, et de représenter la figure $A_0, B_0, C_0 \ldots$ par une *perspective* de *but* S de $\mathcal{P}_0$ vers $\mathcal{P}$: on trace la droite (SA_0) et celle-ci coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point A qui *représente* le point A_0, *voir* la figure 1.

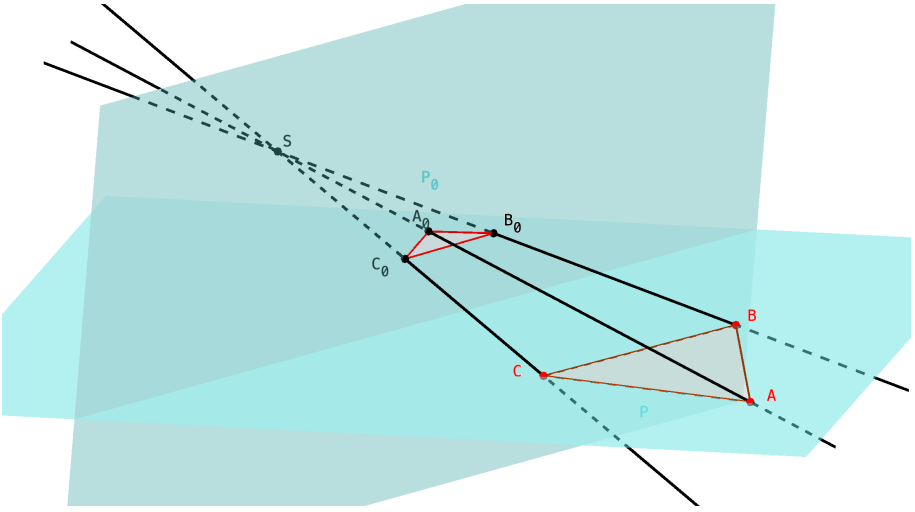

FIGURE 1 – La représentation de la figure $A_0, B_0, C_0 \ldots$ depuis le but S.

26. Texte disponible sur le site GALLICA de la Bibliothèque nationale de France.

La *Première proposition géométrique* de 1648 concerne une propriété remarquable de la représentation de la figure la plus simple, le triangle. D'après celle-ci, les droites $(A_0A), (B_0B)$ et (C_0C) étant concourantes en S, les points de concours des droites (A_0B_0) et (AB), des droites (A_0C_0) et (AC), et enfin des droites (B_0C_0) et (BC), sont alignés. Analysons plus en détail le texte du Lyonnais concernant cette proposition.

La rédaction de Desagues est concise et dense, mais on peut faire confiance à son sens de la « combinatoire » pour la comprendre. Il introduit, dans un certain ordre, des droites désignées par trois lettres nommant trois points qui sont sur icelles. En suivant l'ordre de leur introduction, on peut construire la figure correspondante au fur et à mesure (*voir* la figure 2).

Il commence par introduire HDa et HEb. Ainsi H est sur les deux droites (HD) et (HE), a est sur (HD) et b est sur (HE). La notation nous incite en outre à admettre une sorte de correspondance entre D, a d'une part et E, b de l'autre. Il introduit ensuite cED ; le point c doit donc être le but de (ED) et d'une autre droite, la seule possible à ce stade étant la droite correspondant à (ED), à savoir (ab). Il introduit ensuite les droites lga et lfb ; le point l doit donc être le but des deux droites (ga) et (fb), mais où sont les points f et g ? Passons pour le savoir aux trois dernières droites introduites par Desargues : HlK, DgK et EfK. Il en ressort que l est sur (HK), g sur (DK) et f sur (EK), donc g est sur (la) et (DK) et f est sur (lb) et (EK). Les deux triangles abl et DEK sont donc vues en perspective l'un de l'autre depuis le point H et les points c, g, f sont les intersections des côtés se correspondant dans cette perspective. Desargues donne alors deux démonstrations du théorème suivant :

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses précédentes, les points c, f et g sont alignés.*

La première démonstration concerne le cas où les deux triangles ne sont pas dans un même plan. Elle est très simple et repose entièrement sur l'incidence. En effet, les droites $(ab), (al), (bl)$ sont en un même plan, et les droites (DE), (DK), (EK) sont en un même autre plan elles aussi. Les points c, f, g étant dans ces deux plans à la fois, ils sont alignés.

La seconde démonstration concerne le cas où les deux triangles et donc toutes les droites de la figure sont en un même plan. On peut dès à présent s'interroger sur les motivations de Desargues à donner la démonstration dans un tel cas, puisque, soit disant, il parle de perspective. Nous verrons que cela ressort d'une idée de « réduction dimensionnelle », dont nous reparlerons plus loin et au fait que dans la pratique de la perspective, on est limité à des constructions qui doivent avoir lieu dans le plan du dessin. Dans le cas planaire, il va utiliser le théorème de Ménélaüs et sa réciproque. Desargues utilise une notation très pratique pour énoncer des égalités de raisons. Ainsi, p. 340 du traité de Bosse, lit-on quelque-chose comme

$$\mathrm{gD} - \mathrm{gK} \quad \begin{cases} \mathrm{aD} - \mathrm{aH} \\ \mathrm{lH} - \mathrm{lK} \end{cases}$$

ce qui signifie, a-t-il expliqué plus haut, que

$$\frac{g\mathrm{D}}{g\mathrm{K}} = \frac{a\mathrm{D}}{a\mathrm{H}} \frac{l\mathrm{H}}{l\mathrm{K}}$$

et qui est une conséquence du théorème de Ménélaüs, qu'il utilise exactement

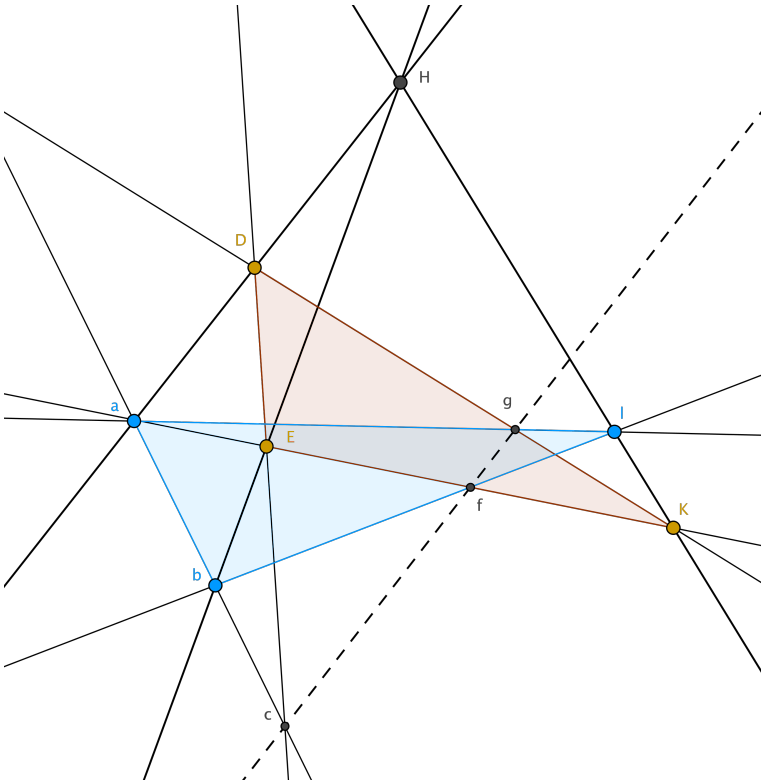

FIGURE 2 – La *Première proposition géométrique de 1648.*

sous la même forme que celle qu'il emploie dans le *Brouillon Project*[27]. Par le même argument, nous avons aussi les identités

$$\frac{l\mathrm{K}}{f\mathrm{E}} = \frac{l\mathrm{K}}{l\mathrm{H}}\frac{b\mathrm{H}}{b\mathrm{E}} \text{ et } \frac{a\mathrm{D}}{a\mathrm{H}} = \frac{c\mathrm{D}}{c\mathrm{E}}\frac{b\mathrm{E}}{b\mathrm{H}}.$$

Nous tirons de ces trois analogies que

$$\frac{c\mathrm{D}}{c\mathrm{E}} = \frac{a\mathrm{D}}{a\mathrm{H}}\frac{b\mathrm{H}}{b\mathrm{E}} = \frac{g\mathrm{D}}{g\mathrm{K}}\frac{f\mathrm{K}}{f\mathrm{E}}$$

ce qui, d'après la réciproque au théorème de Ménélaüs, entraine que c, f & g sont alignés.

Desargues énonce ensuite que la réciproque de son théorème est aussi vraie, mais il va la démontrer pour deux triangles différents de ceux considérés ci-dessus, et qui seront eux, en conclusion, perspectifs depuis le point l. Cela pose en fait problème et réclame une autre figure que celle donnée dans l'original. Pour simplifier la vie du lecteur, nous allons la donner avec les même triangles que ceux employés dans le sens direct, à savoir abl et DEK.

Théorème 1.2 *Si deux triangles* abl *et* DEK *sont tels que les points* c*, intersection de* (ab) *et* (DE)*,* g*, intersection de* (al) *et* DK*, et* f*, intersection de* (bl) *et* (EK) *sont alignés, alors les deux triangles sont perspectifs.*

27. *Voir* [4]

La preuve de Desargues quand les deux triangles ne sont pas en un même plan va ainsi : les intersections des droites (aD) et (bE), des droites (aD) et (lK), et des droites (bE) et (lK) sont simultanément dans les trois plans DEabc, KEblf et DKalg. Elles sont donc confondues en un point H depuis lequel les deux triangles abl et DEK sont en perspective l'un de l'autre.

Pour la preuve du cas où les deux triangles abl et DEK sont en un même plan, Desargues utilise habilement le sens direct de son théorème pour démontrer, par exemple, que si H est point d'intersection de (bE) et (lK), alors a, D et H sont alignés, évitant ainsi le recours au théorème de Ménélaüs. Remarquons qu'en usant du sens direct dans la démonstration de la réciproque, Desargues montre le lien géométrique fort qui unit ces deux énoncés : ils sont en fait duaux l'un de l'autre au sens de la géométrie projective et il n'est pas impossible qu'il ait eu une idée de cette dualité, puisqu'avec sa théorie de la traversale décrite dans le *Brouillon Project* il s'est déjà frotté à une correspondance points – droites [28].

Desargues examine ensuite une extension métrique de son théorème en introduisant une projection depuis un « but à distance interminée ». Fixons donc une direction de droite δ (correspondant au but à distance interminée, c'est-à-dire à un point sur le plan à l'infini de l'espace) et faisons passer par H, D, E & K des droites $\delta_{\mathrm{H}}, \delta_{\mathrm{E}} \ldots$ de même direction δ, donc parallèles entr'elles. Supposons de plus que les deux triangles abl et DEK ne sont pas en un même plan. La droite δ_{H} coupe le plan (abl) en h, δ_{D} le coupe en d, δ_{E} le coupe en e et δ_{K} en k. Le lettrage, toujours soigneusement construit chez Desargues, fait bien appaître une correspondance entre points. D'après le théorème 1.1, on a les alignements suivants : hlk, hda, heb, kgd, kfe, ced, *voir* la figure 3.

En effet, les droites (Hh), (Kk), (HlK) sont en un plan, et les droites (abc), (bfl), (klh) sont en un autre. Les points h, l, k sont en chacun de ces deux plans et donc alignés, « et ainsi de chaque autre ternaire » conclut Desargues, qui laisse au lecteur le soin de faire jouer la « combinatoire » des points.

Il énonce alors les faits suivants :

1. toutes les droites ci-dessus, dont les points sont lettrés en minuscule, sont en un même plan ;
2. à chacune de ces droites « correspond » une autre droite par cette projection de direction δ. Ainsi par exemple hlk correspond HlK ;
3. chacune, du fait du parallèlisme, est divisée de manière égale à sa correspondante.

Et Desargues d'écrire : « Ainsi la figure que les parallèles ont fait achever de faire en un seul plan $hdabcedgfkl$ correspond droite à droite, point à point, & raison à raison, à celle abcEH$lkgf$ de divers plans ; Et l'on peut discourir de leurs proprietez sur l'une comme sur l'autre, & par ce moyen, se passer de celle du relief en luy substituant celle d'un seul plan. »

Dit autrement, il effectue là ce que l'on pourrait qualifier de *réduction dimensionnelle* comme on en trouvera chez la Hire puis le Poîvre : la construction de la correspondance entre points, si l'on oublie qu'elle est à l'origine une perspective tridimensionnelle, est valide *dans le plan du dessin* et ses propriétés s'y lisent. Nous ne sommes pas loin de la génération de la Hire : nous reviendrons sur ce dernier point et sur les deux autres propositions géométrique de 1648 un peu plus loin dans le texte, après avoir analysé quelques passages du *Brouillon Project* qui sont importants pour notre propos.

28. Nous renvoyons à [5] pour des arguments plaidant en la faveur de cette idée.

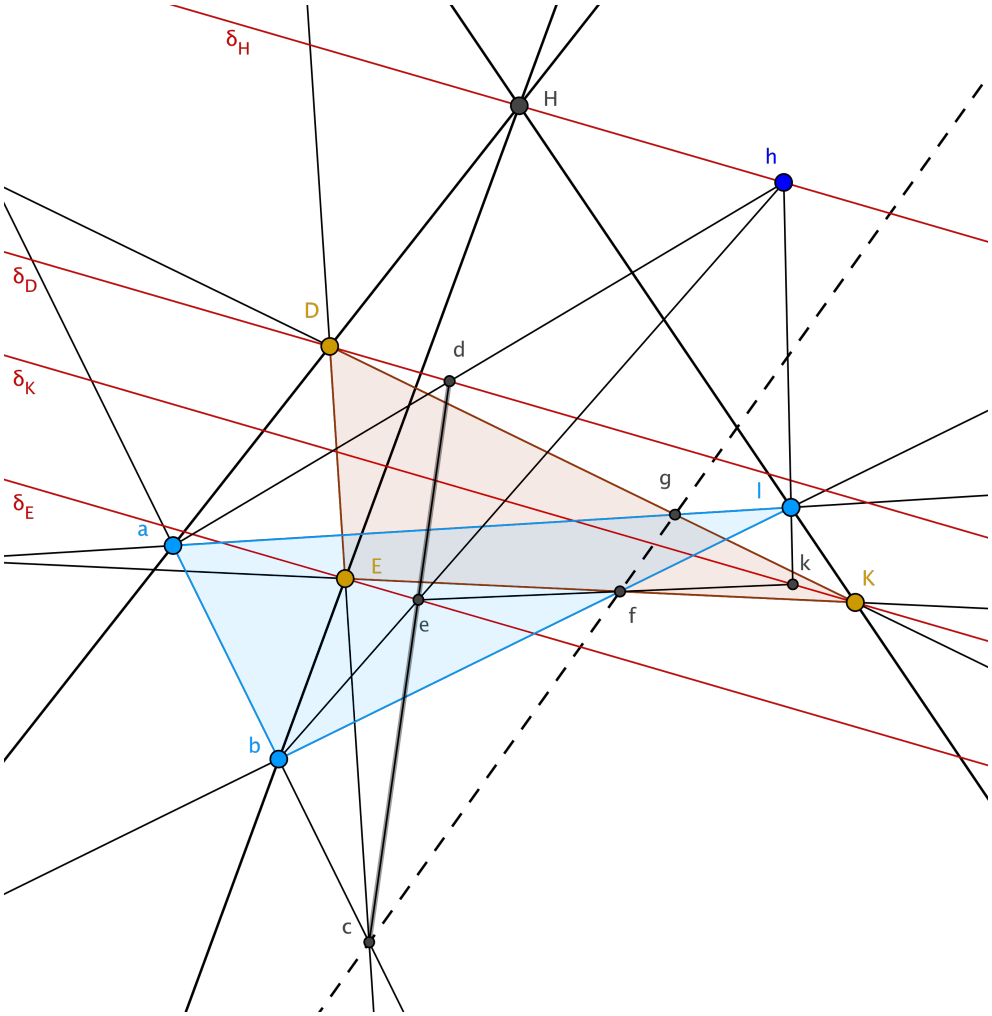

FIGURE 3 – La *Première proposition géométrique de 1648 : l'ébauche d'une correspondance.*

2 La perspective en action dans le *Brouillon Project*

Comme nous l'avons vu, Desargues pose très tôt, dès 1636, la question de démontrer des énoncés reliant les propriétés d'une figure et celles de sa représentation en perspective, ce dont la première proposition de 1648 est un exemple frappant concernant les triangles. La question posée [29] à la fin de la *Perspective* de 1636 concerne les coniques. Je n'ai pas connaissance que Desargues y ait jamais explicitement répondu, mais son *Brouillon Project* de 1639 contient tous les éléments pour y apporter une réponse complète, ce qu'illustrent les passages

29. *Voir* l'Introduction du présent article.

des lignes 47 à 55 de la page 22 et des lignes 7 à 13 de la page 29 de l'original [30].

On trouve dans le *Brouillon Project* plusieurs démonstrations ou constructions qui ressortent de méthodes inspirées de la pratique de la perspective et nous allons maintenant en examiner quelques unes.

2.1 Le théorème de la ramée

Le début du *Brouillon Project* est dédié à l'étude de la notion d'*involution* qui sera l'outil central de tout le texte de Desargues. Rappelons brièvement de quoi il s'agit. Étant donnée une droite $\mathcal{D}$, ou *tronc* comme l'appelle Desargues, considérons trois couples de points, ou *nœuds*, situés sur la droite $\mathcal{D}$: B, H; C, G; D, F. Ces six points sont dits former une *involution* si les identités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\text{GD.GF}}{\text{CD.CF}} = \frac{\text{GB.GH}}{\text{CB.CH}}, \quad \frac{\text{FC.FG}}{\text{DC.DG}} = \frac{\text{FB.FH}}{\text{DB.DH}}, \quad \frac{\text{HC.HG}}{\text{BC.BG}} = \frac{\text{HD.HF}}{\text{BD.BF}}.$$

L'importance de cette notion tient à deux faits : la configuration d'involution est *invariante par perspective* et toute conique induit sur toute droite du plan qui la contient une involution. le premier énoncé constitue ce que l'on appelle le *théorème de la ramée.* Il s'agit donc à proprement parler d'un théorème de géométrie plane relatif à la *représentation* d'une figure linéaire sur une autre.

Soient donc $\mathcal{E}$ une droite qui soit dans un même plan que $\mathcal{D}$ et S un point de ce plan pris hors de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{E}$. La perspective depuis S de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{E}$ permet de représenter les points B, H, ... par des points $b, h, \ldots$ de $\mathcal{D}$. Le théorème de la ramée, premier énoncé d'importance du *Brouillon Project,* affirme que si B, H; ... forment une involution sur $\mathcal{D}$, alors $b, h; \ldots$ en forment une sur $\mathcal{E}$. Comme pour la première proposition géométrique de 1648, l'outil principal de démonstration est le théorème de Ménélaüs [31].

Ce théorème n'est cependant pas celui où l'on perçoit le mieux l'influence de la pratique de la perspective chez Desargues (on trouve d'ailleurs un énoncé un peu analogue dans la *Collection* de Pappus, par exemple), mais il est à la base de toutes les notions et démonstrations que lui inspireront cette pratique dans son étude des coniques.

2.2 Le théorème d'involution de Desargues

Le théorème d'involution est à la base de sa théorie des *traversales*, qui est une théorie projective complète de la polarité associée à une conique [32]. Il tient une place importante dans ce dont nous traitons ici en ce que la méthode de démonstration utilise pleinement le fait qu'une conique est la vue en perspective d'un cercle.

Donnons-nous en un plan $\mathcal{P}$ quatre points B, C, D, E et une conique $\mathcal{C}$ passant par ceux-ci. Avec ces quatres points, ou *bornes,* nous pouvons former six droites ou *bornales* naturellement appairées : (BC), (DE); (BD), (CE); (BE), (CD). Soit

30. Nous renvoyons ici à l'unique exemplaire connu de l'original conservé à la Bibliothèque nationale de France dans la réserve des livres rares sous la référence RESM-V-276 et disponible sur le site Gallica.

31. *Voir* l'article sus-cité de Marie Anglade et Jean-Yves Briend pour les détails de cette preuve.

32. Pour une analyse complète de cette théorie, *voir* l'article de Marie Anglade et Jean-Yves Briend [5].

maintenant τ une droite générale du plan $\mathcal{P}$, qui en quelque sorte traverse la figure constituée des six droites et de la conique. Elle coupe les six bornales en six points accouplés $b, h; c, g; d, f$ ainsi que la conique en une paire de points l, m. Le théorème d'involution affirme que les quatre [33] couples $b, h; c, g; d, f; l, m$ forment une involution sur τ.

La preuve de Desargues se déroule en trois temps. Il commence par ne considérer que les droites engendrées par le quadrilatère $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$ et montre, grâce au théorème de Ménélaüs, que $b, h; c, g; d, f$ forment une involution. Il utilise ensuite la proposition 35 du livre III des *Éléments* pour démontrer le théorème quand $\mathcal{C}$ est un cercle. C'est la troisième étape qui lui permet, par perspective depuis ce sommet du cône dont $\mathcal{C}$ est coupe, de conclure que son énoncé est valide pour n'importe quelle conique. Soit $\mathcal{P}_0$ le plan assiette du cône de sommet S et de base le cercle $\mathcal{C}_0$ dont $\mathcal{C}$ est section.

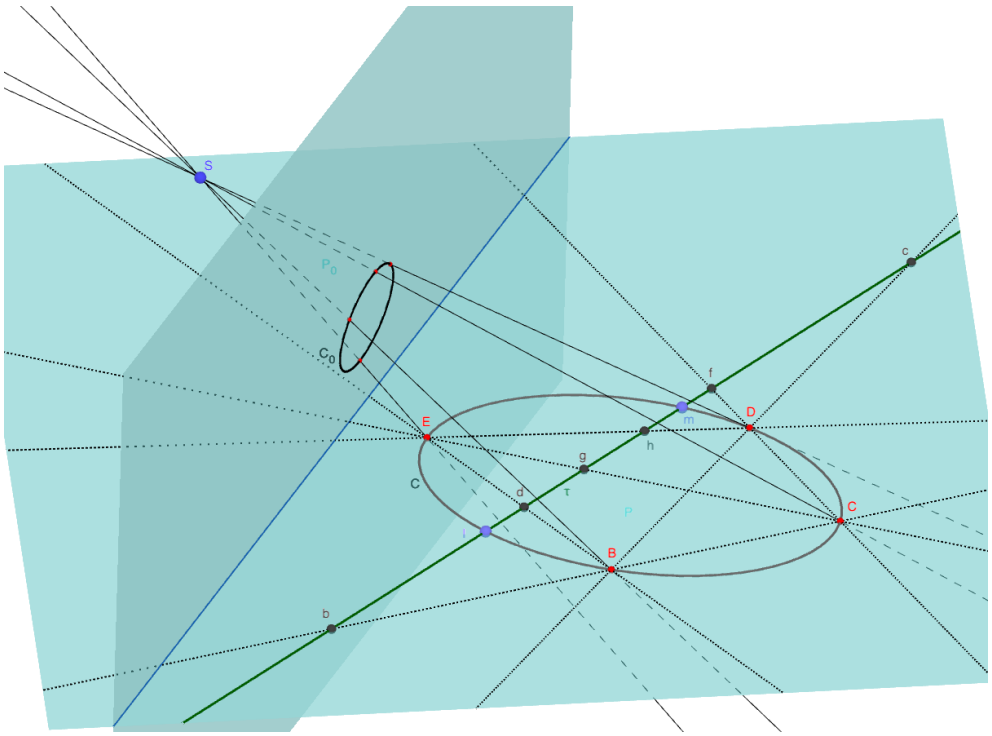

FIGURE 4 – L'étape perspectiviste dans la preuve du théorème d'involution.

La figure $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathcal{C}, \tau, b, h, c, g, d, f, l, m$ est la représentation depuis S de la figure analogue $\mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0, \mathrm{D}_0, \mathcal{C}_0, \tau_0, b_0, h_0 \ldots$ du plan $\mathcal{P}_0$. D'après ce qui a été démontré, les points $b_0, h_0; c_0, g_0; d_0, f_0; l_0, m_0$ forment une involution sur la droite τ_0. Le théorème de la ramée, appliqué dans le plan contenant S, τ_0 et τ permet alors de conclure que $b, h; c, g \ldots$ forment une involution.

Desargues voit cette propriété d'induction d'une involution sur toute droite

33. La notion d'involution a ceci de remarquable qu'elle est agrégative : une fois donnés trois couples de points en involution, on peut leur ajouter d'autres couples de points pour former une involution d'autant de couples qu'il est nécessaire, *voir* l'article de Marie Anglade et Jean-Yves Briend [3].

coupant la figure comme essentielle des plus importantes propriétés des coniques, car elle est à la base de sa théorie projective de la polarité, polarité qui est caractérisée par et caractérise une conique. Ainsi écrit-il dans les notes d'ajout au *Brouillon Project*, que « Les plus remarquables propriétés des coupes de rouleaux sont communes à toutes les espèces, et les noms d'Ellipse, Parabole et Hyperbole ne leur ont été donnés qu'à raison d'événements qui sont hors d'elles et de leur nature. »

Dit autrement, les propriétés intrinsèques aux coniques sont celles qui sont indépendantes de la manière dont on les réalise comme section d'un cône, c'est-à-dire sont indépendantes du *point de vue* que l'on adopte sur le cercle. Cette indépendance du point de vue l'amènera à considérer la possibilité de choisir le cône dont la conique est section, au travers du choix de son sommet. Cela lui permettra d'obtenir des résultats assez spectaculaires, comme nous le verrons plus bas.

2.3 La perspective comme outil de synthèse de la théorie de la polarité

À la fin de ce qui constitue le cœur du *Brouillon Project,* où est développée la théorie de la traversale ou polaire, Desargues effectue une sorte de synthèse par l'exemple pour montrer comment son approche inspirée de la perspective permet de reconstruire une bonne partie de la théorie classique des coniques. La polarité nous donne tout ce que nous voulons savoir d'une conique, indépendamment de la manière dont elle est réalisée comme coupe d'un cône, ou, dit autrement, indépendamment du point de vue que l'on adopte sur le cercle ou sur cette conique. Cependant, en prenant en compte des données qui sont « hors de la nature » de la conique, par exemple en prenant en compte un point de vue particulier, on peut montrer que les notions classiques peuvent s'insérer naturellement dans la théorie générale de la traversale. C'est ce que fait Desargues dans cet exemple avec la notion de *centre* d'une conique. Donnons quelques détails sur sa démarche.

Donnons-nous en un plan $\mathcal{P}$ la figure $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ constituée d'une conique et d'un point F situé hors de celle-ci. Soit S le sommet du cone dont $\mathcal{C}$ est une section. On peut alors trouver un plan $\mathcal{P}_0$ qui coupe ce même cone selon une conique $\mathcal{C}_0$ et tel que l'image par la perspective depuis S du point F dans $\mathcal{P}_0$ soit le *centre* F_0 de la conique $\mathcal{C}_0$. Le point clé de l'argument de Desargues est ici que la polarité étant affaire d'*incidence,* elle est invariante par perspective et se transporte donc d'un plan de coupe à un autre.

Un plan $\mathcal{P}_0$ coupe le plan $\mathcal{P}$ selon une droite δ et le plan parallèle à $\mathcal{P}_0$ passant par S coupe ce même plan $\mathcal{P}$ selon une droite δ' parallèle à δ. La droite δ' est la représentation de la droite à l'infini de $\mathcal{P}_0$ dans la perspective depuis S de $\mathcal{P}_0$ vers $\mathcal{P}$: c'est, en quelque sorte, une *ligne d'horizon*[34].

Ainsi, si l'on choisit $\mathcal{P}_0$ de sorte que δ' soit la polaire de F eu égard à $\mathcal{C}_0$, alors le point F_0 représenté par F depuis S est le pôle de la droite à l'infini de $\mathcal{P}_0$ et est donc le centre de la conique $\mathcal{C}_0$.

On le voit à la lecture de ce qui précède, Desargues, ayant mis en place des notions invariantes par représentation en perspective (involution, puis traversale), commence à remplir le programme qu'il s'est en quelque sorte fixé dans

34. Celle du plan $\mathcal{P}_0$ quand on le regarde depuis le point S.

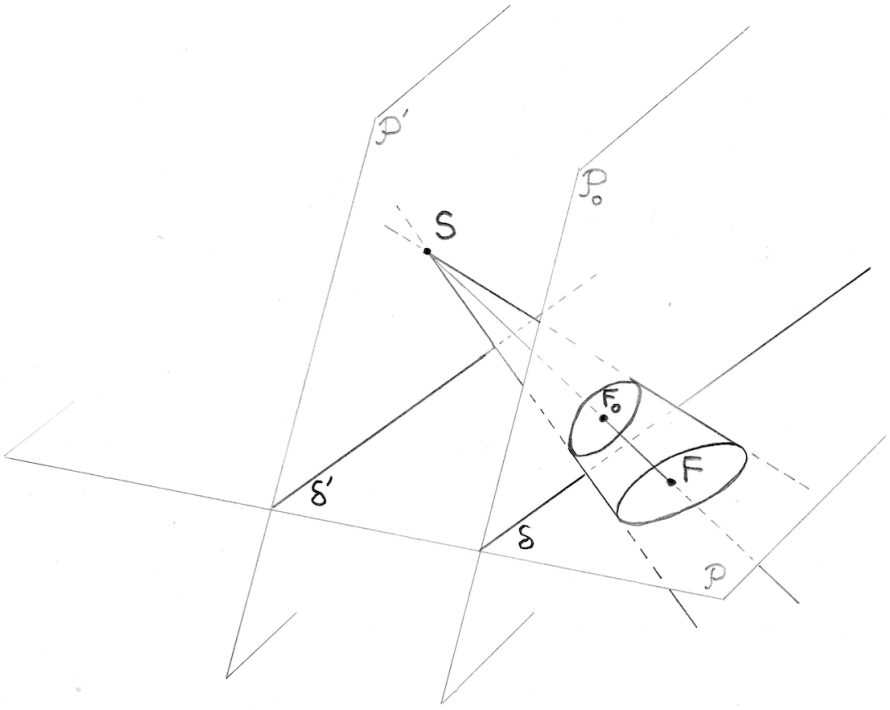

FIGURE 5 – Détermination par perspective d'une polaire.

la dernière phrase de sa *Perspective* de 1636. À la fin du *Brouillon Project* il va aller plus loin et, cette fois-ci, changer de perspective : il y considère en quelque sorte la représentation d'une représentation, préfigurant ce qui bien plus tard deviendra la cœur de la géométrie, la possibilité de composer des transformations formant alors un groupe.

2.4 Composition de perspectives et prescription des foyers

Le dernier long développement à proprement parler géométrique du *Brouillon Project* traîte, au moyen de méthodes projectives et de la polarité, des sujets classiques que sont le paramètre ou les foyers. Il s'achève par une très jolie construction qui est, encore une fois, en rapport étroit avec le texte de 1636 sus-cité, et que nous allons maintenant décrire.

Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{C}$ une conique dans ce plan. Donnons-nous un point X hors de $\mathcal{C}$ et une droite δ passant par X. Desargues va construire un cône de sommet θ dont $\mathcal{C}$ est section et un plan $\mathcal{P}'$ coupant ce cône selon une conique $\mathcal{C}'$ et dans lequel, par la perspective depuis θ, le point X sera représenté par un des *foyers* de la conique $\mathcal{C}'$ et la droite δ par son *grand axe.*

Voici comment il procède[35] : donnons-nous F un autre point sur δ et à l'intérieur de la conique. Soit Δ la polaire de F eu égard à $\mathcal{C}$ qui, de la sorte, ne coupe par la conique. La droite Δ coupe la droite δ en un point A et l'on choisit alors un point Q sur δ qui soit un conjugué harmonique du couple A, F. Pour

35. Le passage qui suit est un peu technique et nous incitons le lecteur à ne pas s'y attarder.

reprendre la terminologie du Lyonnais, les couples $A, F; X, X; Q, Q$ forment une involution dont X et Q sont des *nœuds moyens doubles*[36]. Soit P le milieu du segment [XQ] et soit 7 le centre de la conique $\mathcal{C}$. La droite (7P) coupe la droite Δ en un point C. Traçons par A l'une des tangentes à $\mathcal{C}$ et notons H le point de contact de cette tangente avec la conique ; traçons la droite (FH) et notons D son point d'intersection avec Δ. Donnons-nous enfin un autre couple R, Z de nœuds de l'involution ci-dessus, traçons par Z une tangente à $\mathcal{C}$, qui coupe Δ en un point B. Du point de contact G de cette même tangente menons la droite GR qui va couper Δ en un point E.

Le résultat central de tout ce passage est que les points $A, D; B, E$ sont des couples de nœuds d'un *arbre* de *souche* C, soit, dit autrement que l'on a l'identité de rectangles $CA.CD = CE.CB$. Remarquons au passage que si $\mathcal{C}$, X, δ et F sont donnés de position, alors toute la construction peut se faire à la règle et au compas.

Passons maintenant à la construction perspectiviste et donnons-nous un plan $\mathcal{P}_0$ passant par Δ et différent du plan contenant $\mathcal{C}$. Traçons dans ce plan la droite Λ passant par C et perpendiculaire à Δ. L'arbre $C; A, D; B, E$ donne naissance à un involution qui elle aussi a des nœuds doubles, nommons W l'un d'entre eux. Dire que c'est un nœud double signifie que $CW^2 = CA.CD = CE.CB$, soit encore que

$$\frac{CA}{CW} = \frac{CW}{CD}.$$

Ainsi CW est moyenne proportionnelle de CA et CD. Or la proposition 13 du livre VI des *Éléments* d'Euclide permet de construire une telle moyenne proportionnelle : traçons dans $\mathcal{P}_0$ un demi-cercle de diamètre AD et nommons θ le point d'intersection de ce demi-cercle avec Λ : $C\theta$ est moyenne proportionnelle de CA et CD et Desargues affirme que θ est le sommet du cône de base $\mathcal{C}$ recherché pour finir sa construction. Soit en effet $\mathcal{P}'$ un plan parallèle à $\mathcal{P}_0$ mais ne passant pas par θ. Il va couper le cône de sommet θ et de base $\mathcal{C}$ selon une conique $\mathcal{C}'$ qui est une vue en perspective de la conique $\mathcal{C}$. Les vues des points X et Q dans cette même perspective sont les points X′, Q′ intersections des droites (θX) et (θQ) avec le plan $\mathcal{P}'$. Desargues affirme que ces deux points *sont les foyers de la coniques* $\mathcal{C}'$. La démonstration ne se trouve pas détaillée dans le *Brouillon Project* mais il est assez facile de la retrouver avec les propriétés d'invariance par perspective des divisions harmoniques, le point clé étant que l'angle $\widehat{D\theta A}$ est droit, ce qui donne lieu, dans un faisceau harmonique, à des bissections d'angles.

Nous reproduisons, au sujet de cette très belle construction, la figure 6 qu'en donne Philippe de la Hire dans sa copie manuscrite du *Brouillon Project.* Sur celle-ci, la conique $\mathcal{C}$ est représentée par le cercle en haut de la figure, et le demi-cercle du bas de la même figure est à comprendre comme tracé sur le plan incliné $\mathcal{P}_0$.

Desargues répond ainsi à une question très proche de celle posée à la fin de sa *Perspective* de 1636. Pour cela, il change de perspective sur la conique $\mathcal{C}$, ce que l'on peut aussi voir comme une *composition* de perspectives, si l'on revient au cercle assiette du cône original donnant la conique $\mathcal{C}$. Philippe de la Hire va

36. *Voir* l'article de Marie Anglade et Jean-Yves Briend sur l'involution sus-cité. Nous n'utiliserons ici cette notion que parce qu'elle est reliée à celle de moyenne proportionnelle, voir un peu plus bas.

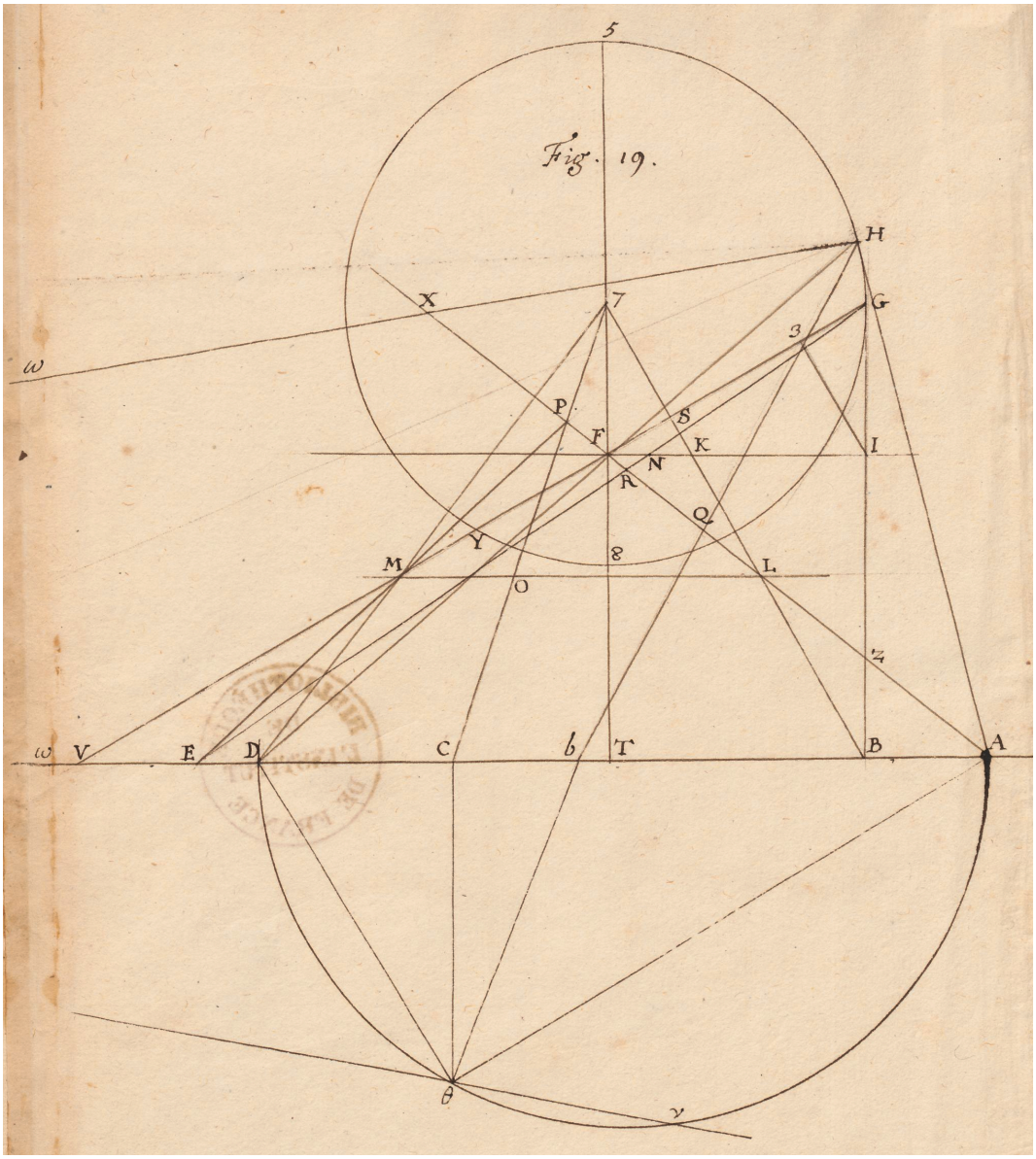

FIGURE 6 – La figure de la Hire illustrant la construction de Desargues.

pousser tout cela un peu plus loin en montrant comment un tel changement de perspective peut se lire au sein d'un seul et même plan, qui contiendra ainsi l'objet représenté et sa représentation. Sa construction, la *génération* de la Hire, se trouve donc en germe dans le *Brouillon Project*, comme le montre la figure ci-dessus entièrement réalisée dans un plan mais aussi, comme nous le verrons plus loin, dans les deux dernières *propositions géométriques* de 1648. C'est la lecture oublieuse de l'impression de relief donnée par la figure planaire, donc une *réduction dimensionnelle,* qui permet un tel passage de l'espace au plan. Nous allons maintenant donner plusieurs descriptions équivalentes de la génération

de la Hire, avant d'analyser comment elle est traitée chez cet auteur et chez le Poîvre.

3 Trois descriptions perspectivistes d'une homologie projective

Comme nous l'avons dit plus haut, la génération de la Hire est la première occurence explicite d'une transformation d'un plan dans lui-même. Celle-ci s'avère être ce que l'on appelle une *homologie,* qui est un cas particulier d'homographie, c'est-à-dire de transformation projective du plan dans lui-même. Que l'apparition de la notion de transformation du plan se fasse sous la forme d'une homographie et non, par exemple, d'une transformation plus commune comme une translation, une rotation ou une similitude, tient au fait que l'inspiration de la Hire, comme de son devancier Desargues ou de son suivant le Poîvre, trouve sa source dans la pratique de la perspective. Avant de nous intéresser de plus prêt au texte de la Hire où apparait cette innovation fondamentale, nous allons donner trois descriptions d'une homologie inspirées de la perspective.

Nous n'utiliserons qu'une version très naïve de la géométrie projective : nous travaillerons dans l'espace, auquel nous imaginons rajoutés des points à l'infini représentant les diverses directions de droites. L'ensemble de ces points forme ce que l'on peut considérer comme un plan, le plan à l'infini. Si l'on se donne un plan usuel, les points à l'infini de celui-ci forment comme une droite dans le plan à l'infini de l'espace, et toute droite rencontre le plan à l'infini en un point, et toute droite parallèle à la précédente rencontre le plan à l'infini en le même point qu'elle.

Cependant, le lecteur qui serait mal à l'aise avec les éléments à l'infini peut tout à fait s'en passer et raisonner dans l'espace usuel.

3.1 Une homologie comme changement de perspective

Soit $\mathcal{P}_0$ un plan dans lequel est tracé une certaine figure $\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0, \ldots$. Soient $\mathcal{P}$ un autre plan et S, S' deux points de l'espace pris hors des plans $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}$. On peut imaginier représenter la figure $\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0, \ldots$ dans le plan $\mathcal{P}$, selon des perspectives de but S ou de but S', obtenant ainsi deux figures $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ et $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \ldots$ dans le plan $\mathcal{P}$.

La transformation du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui permet de passer du point de vue depuis S au point de vue depuis S', c-à-d. de la figure $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ à la figure $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \ldots$ s'appelle une *homologie* et nous allons maintenant la décrire.

Il est utile pour cela de procéder à une formalisation élémentaire. Notons $p_{\mathrm{S}} : \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application de représentation en perspective de sommet S de $\mathcal{P}_0$ vers $\mathcal{P}$, et $p_{\mathrm{S}'}$ celle de sommet S'. Notons Δ la droite intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}_0$ et O le point d'intersection de la droite (SS') avec le plan $\mathcal{P}$. Dans les cas particuliers où surgiraient des parallèlismes, cette droite ou ce point se retrouveraient à l'infini, mais on peut ignorer ces cas pour ce qui nous concerne. La transformation de $\mathcal{P}$ dans lui-même permettant de passer du point de vue de S à celui de S' sur la figure $\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0 \ldots$ peut se décomposer ainsi :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots \xrightarrow{p_{\mathrm{S}}^{-1}} \mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_0, \ldots \xrightarrow{\mathrm{P}_{\mathrm{S}'}} \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \ldots$$

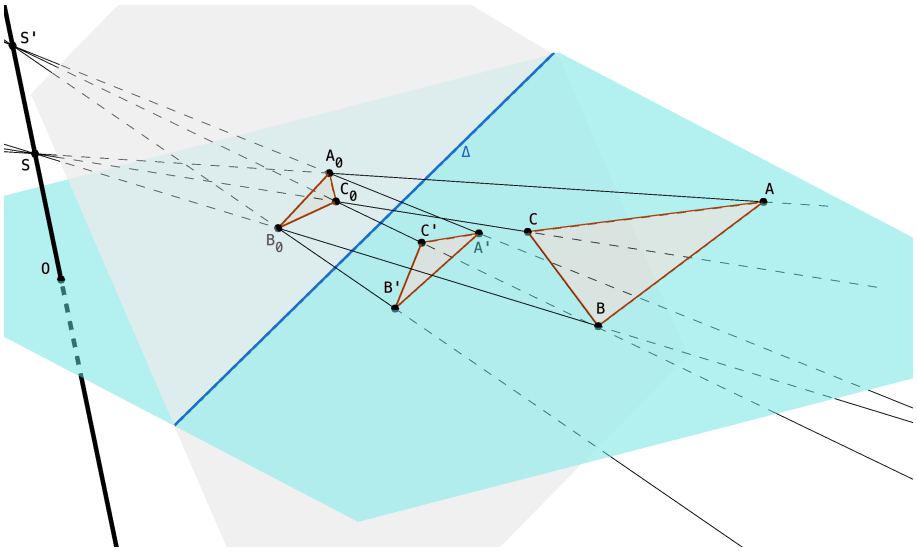

FIGURE 7 – Une homologie comme changement de perspective.

et il est donc naturel de définir cette transformation que nous noterons ϕ comme la composition de l'inverse de la transformation p_S par la transformation $p_{S'}$: $\phi = p_{S'} \circ p_S^{-1}$. Il est clair que si z est un point de Δ, alors $\phi(z) = z$ et donc ϕ laisse la droite Δ fixe point par point. De même, ϕ laisse le point O fixe, puisque (OS) = (OS′).

On dit que ϕ est une *homologie* d'*axe* Δ et de *centre* O. Des arguments d'incidence simples montrent que les perspectives (comme $p_{S'}$ ou p_S^{-1}) préservent les alignements, c-à-d. envoient trois points alignés sur trois points eux aussi alignés et donc qu'une homologie telle que ϕ elle aussi envoie des points sur des points et des droites sur des droites : c'est une *homographie* du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même. De manière générale, une homologie est une homographie admettant exactement comme ensemble de points fixes l'union d'une droite et d'un point, l'un de ces éléments pouvant éventuellement se trouver à l'infini, et toute homologie peut se décrire comme la composition de deux perspectives comme nous l'avons fait ci-dessus.

Notons pour conclure cette section que si l'on appelle Δ_0 la droite intersection du plan $\mathcal{P}_0$ et du plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par S′, et Δ' la droite intersection du plan contenant Δ_0 et S avec le plan $\mathcal{P}$, alors les points de la droite Δ' son envoyés à l'infini de $\mathcal{P}$ par la transformation ϕ. Nous laissons à la lectrice le plaisir de déterminer de la même manière les images par ϕ des points à l'infini de $\mathcal{P}$.

3.2 Une homologie simple pour la perspective : passer de la représentation d'un plan à celle d'un plan parallèle

Une manière en quelque sorte duale de celle décrite ci-dessus pour comprendre ce qu'est une homologie consiste, non à changer de point de vue sur une figure, mais à changer de figure en gardant le même point de vue. Donnons-en un exemple particulier, mais très classique.

Considérons deux plans parallèles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, que l'on peut imaginer comme étant « horizontaux ». Supposons tracée, dans un autre plan $\mathcal{P}_0$, la représentation en perspective d'un solide ayant deux faces parallèles, l'une située dans $\mathcal{P}$, et l'autre dans $\mathcal{P}'$. Ce solide peut être, par exemple, un bâtiment parallèlipédique. Le problème est alors le suivant : étant donné un point H de $\mathcal{P}_0$ représentant un certain point h situé sur $\mathcal{P}$, comment trouver le point H' représentant le point h' situé dans $\mathcal{P}'$ immédiatement à la verticale de h ? Cela peut-être utile pour tracer des colonades, comme aimaient à le faire les peintres du XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle, *voir* à ce sujet la figure 8, tableau de Laurent de la Hire, père de Philippe et ami de Desargues.

FIGURE 8 – Laurent de la Hire, *La Mort des Enfants de Béthel,* 1653, musée des Beaux-Arts d'Arras.

Dans le plan $\mathcal{P}_0$ du tableau, supposons donnés :
— le point H, représentant un point de $\mathcal{P}$;
— une droite Hor, à laquelle il faut penser comme une ligne d'horizon ;
— un point A représentant un point de $\mathcal{P}$, et le point A' représentant le point de $\mathcal{P}'$ à la verticale de A ;
— un point O où les représentations des droites verticales se rencontrent, qui est donc un point de fuite.

On obtient le point H' comme suit : il représente un point à la verticale de H, donc il est sur la droite (HO). Mais il représente aussi un point sur une droite représentant la droite à la verticale de la droite (AH). Notons $\mathrm{Q_H}$ l'intersection de (AH) avec Hor, alors $(\mathrm{A'H'})$ doit couper ce même horizon en $\mathrm{Q_H}$ et donc H' est à l'intersection de $(\mathrm{A'Q_H})$ et de (OH).

Dans cette construction, il est clair que si H est situé sur l'horizon, alors $\mathrm{H}' = \mathrm{H}$, et qu'il en est de même si $\mathrm{H} = \mathrm{O}$: la transformation $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}'$ est donc une homologie d'axe Hor et de centre O. La donnée de Hor, O, A & A' détermine entièrement cette homologie.

De plus, quand (OH) est parallèle à $(\mathrm{A'Q_H})$, alors H' est un point à l'infini.

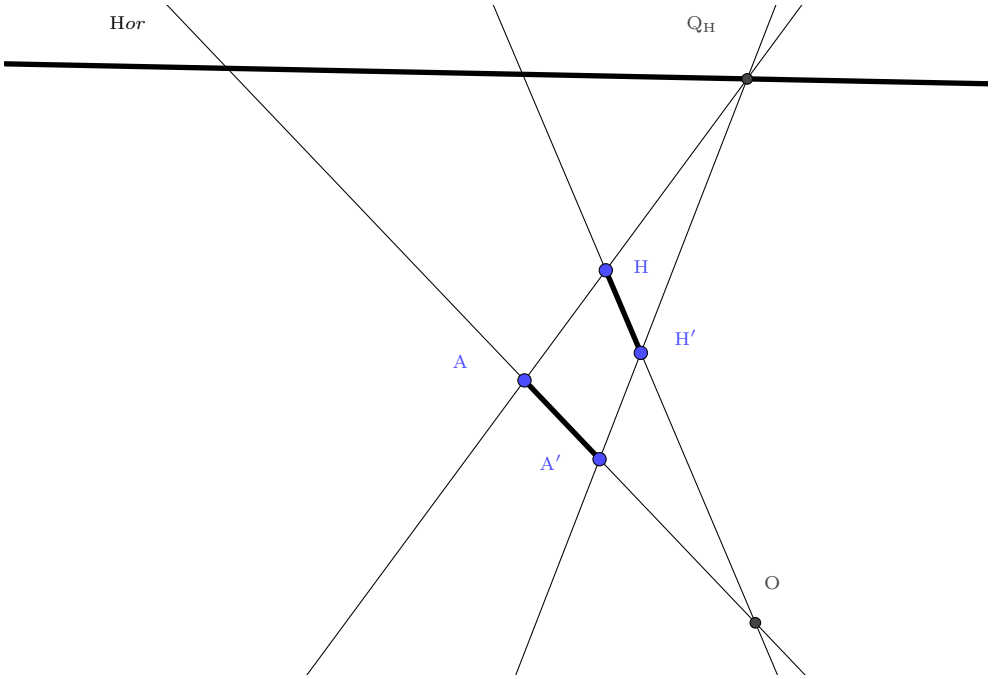

FIGURE 9 – Construction de points en surplomb.

Traçons une droite Δ parallèle à (QA′), passant par O, où Q est un point mobile sur Hor. Alors (QA) coupe Δ en un point h de sorte que (AQ_h) est parallèle à (Oh). Lorsque Q varie sur Hor, h décrit une droite que nous noterons Dir, qui est parallèle à Hor et dont les points sont ceux qui sont envoyés à l'infini par l'homologie.

3.3 Une homologie comme redressement perspectif d'un rabattement.

Nous finissons ce chapitre avec une construction que nous allons retrouver chez la Hire. Donnons-nous un plan $\mathcal{P}$ en lequel on représente une certaine figure d'un plan $\mathcal{B}$ en perspective depuis le but S : nous noterons $p : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}$ cette transformation de perspective (une projection centrale). Soit $\mathcal{A}$ la droite intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{B}$.

On peut également représenter une figure de $\mathcal{B}$ dans le plan $\mathcal{P}$ par un *rabattement* de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{P}$, c'est-à-dire en employant comme transformation une *rotation* ρ d'axe $\mathcal{A}$ envoyant $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{P}$.

La question que nous nous posons maintenant est de savoir comment, dans le plan $\mathcal{P}$, on passe de la représentation d'une figure par rabattement à la représentation de la même figure par perspective. Par un raisonnement très analogue à celui fait sur le changement de perspective, il est clair que ce changement se fait par une transformation ϕ que l'on peut décomposer ainsi : $\phi = p \circ \rho^{-1}$, composée de l'inverse du rabattement ρ, envoyant $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{B}$, puis de la perspective p, renvoyant le résultat de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}$. Tâchons de décrire un peu plus précisément cette transformation ϕ.

Soit $\mathcal{Q}$ le plan orthogonal à $\mathcal{A}$, et donc perpendiculaire aux deux plans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$, et passant par S. Dans ce plan, les deux plans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ tracent deux droites **B** et **P** et le plan bissecteur de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ trace la bissectrice β de **B** et **P**, et ces droites se coupent en un point qui est la trace de la droite $\mathcal{A}$ dans le plan $\mathcal{Q}$.

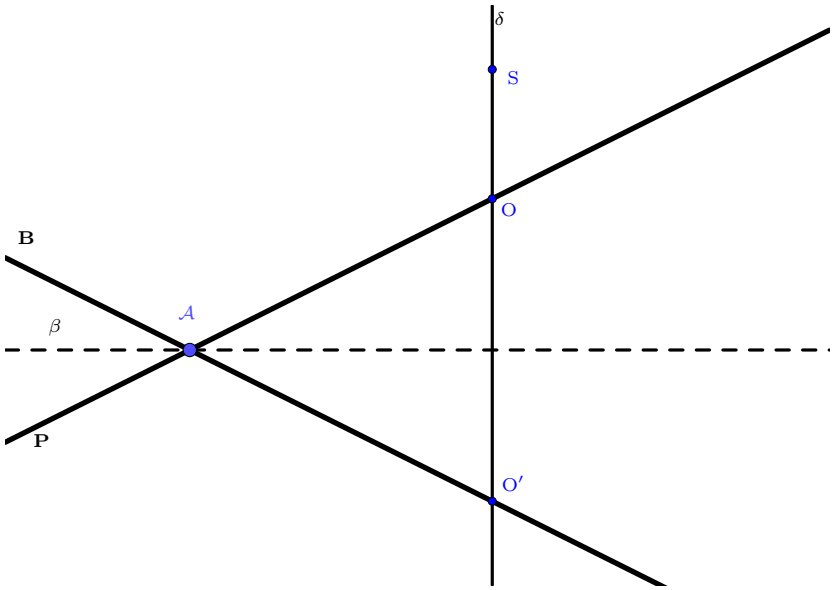

FIGURE 10 – Les plans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ vus de profil.

Soit Alors δ la droite passant par S et perpendiculaire à β, et notons O son point de rencontre avec **P**, O′ son point de rencontre avec **B**. Il est alors clair que $\rho^{-1}(\mathrm{O}') = \mathrm{O}$ et que $p(\mathrm{O}') = \mathrm{O}$, de sorte que $\phi(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$. Enfin, puisque p et ρ laissent $\mathcal{A}$ fixe point par point, nous avons aussi $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ et ϕ est donc l'homologie de centre O et d'axe $\mathcal{A}$.

Notons dès maintenant l'intérêt de cette manière de voir une homologie pour la théorie des coniques : si S est le sommet d'un cône dont la base est un cercle du plan $\mathcal{B}$, le rabattement de ce cercle dans le plan $\mathcal{P}$ est encore un cercle et ϕ permet donc de transformer ce cercle en la conique section du cône par le plan $\mathcal{P}$. C'est par cette méthode, très exactement, que Philippe de la Hire génère des coniques à partir de cercles dans un même plan, dans son traité *Les Planiconiques.* La figure de la copie manuscrite du *Brouillon Project* par la Hire que nous avons montré plus haut (*voir* la figure 6) illustre parfaitement cette idée, qui se trouve donc en germe dans le texte du Lyonnais : en y représentant par un cercle du plan $\mathcal{P}$ le cercle du plan $\mathcal{P}'$ utilisé pour trouver le sommet θ du nouveau cône, la Hire *effectue* le rabattement.

4 La *Génération* de la Hire

Philippe de la Hire est fils de Laurent, qui fût un proche de Desargues. C'est un géomètre, un astronome et un ingénieur dont les grandes qualités sont reconnues. Il a beaucoup écrit sur les coniques et dans certains petits traités il a été sur le sujet d'une grande originalité même si, sans doute trop prudent, voire

pusillanime, il n'est jamais allé au profond de ses conceptions. Nous renvoyons à la thèse de doctorat de Zbyněk Šír [18] pour une analyse très complète de l'œuvre de la Hire sur les coniques.

Notons que c'est à Philippe de la Hire qu'on doit ce qui, de 1845 [37] à 1950 [38], a constitué notre unique source fiable concernant le *Brouillon Project* de Desargues, sous la forme d'une magnifique copie manuscrite du texte du Lyonnais, agrémentée de nombreuses et belles figures [39].

En 1673, ajouté à la fin d'un assez long traité sur les coniques [40], la Hire publie un court opuscule d'une vingtaine de pages ayant pour titre *Les Planiconiques.* Il y introduit de manière explicite une *transformation du plan dans lui même* et cela constitue, à notre connaissance, une première. Il appelle cette transformation une *génération de point* et il en donne deux descriptions, l'une, strictement planaire, occupant le début de l'ouvrage et la seconde, passant par le relief, lui permettant de montrer comment d'un cercle on peut générer une conique quelconque. Nous allons voir que la génération de la Hire est en fait une homologie et nous allons analyser en détail ses deux manières de la définir.

Il nous semble, même si la Hire le contestait, que l'influence de Desargues est patente dans ce traité. Il y présente, comme son titre l'indique, une manière d'aborder la géométrie des coniques sans faire appel au relief, mais, comme nous allons le voir, profondément inspirée de la pratique de la perspective et des idées de Desargues, en particulier celle de *réduction dimensionnelle.*

4.1 La génération de la Hire : première version

Dans les premières pages des *Planiconiques,* Philippe de la Hire décrit explicitement une transformation du plan dans lui-même en lui donnant le nom de *génération.* Nous allons respecter la terminologie et le lettrage des points adoptés par la Hire afin de permettre à la lectrice curieuse de se reporter, si elle le souhaite, à l'original, disponible par exemple sur le site Gallica de la Bibliothèque nationale de France.

Plaçons-nous dans un plan en lequel sont données deux droites parallèles, l'une appelée la *directrice*, l'autre la *formatrice,* ainsi qu'un point A pris hors de la directrice et nommé *pôle.* Prenons maintenant un point h dans le plan et traçons une droite δ passant par h, coupant la directrice en un point x et la formatrice en un point z [41]. Traçons maintenant par le point z la droite parallèle à la droite (Ax) : elle coupe la droite (Ah) en un point L appelé le *point formé* à partir du point h.

La hire note immédiatement deux choses :

— deux points distincts forment deux points distincts ;

— les points de la directrice ne peuvent former aucun point.

Le premier point signifie en termes modernes que la transformation ainsi définie est injective. Le second par contre montre que la Hire n'a pas faites siennes les conceptions projectives de Desargues sur les points à l'infini : dans la génération

37. Date de sa découverte par Michel Chasles.

38. Date de la redécouverte d'un exemplaire de l'original, *voir* [19].

39. Manuscrit Ms. 1595 de la bibliothèque de l'Institut de France.

40. *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques, qui ont pour bases des cercles, ou des Paraboles, des Elipses, & des Hyperboles,* par Ph. de la Hire, Parisien, chez Thomas Moette, Paris, 1673.

41. Remarquons que plutôt qu'une droite par h, la Hire choisit un point x sur la directrice pour former (hx).

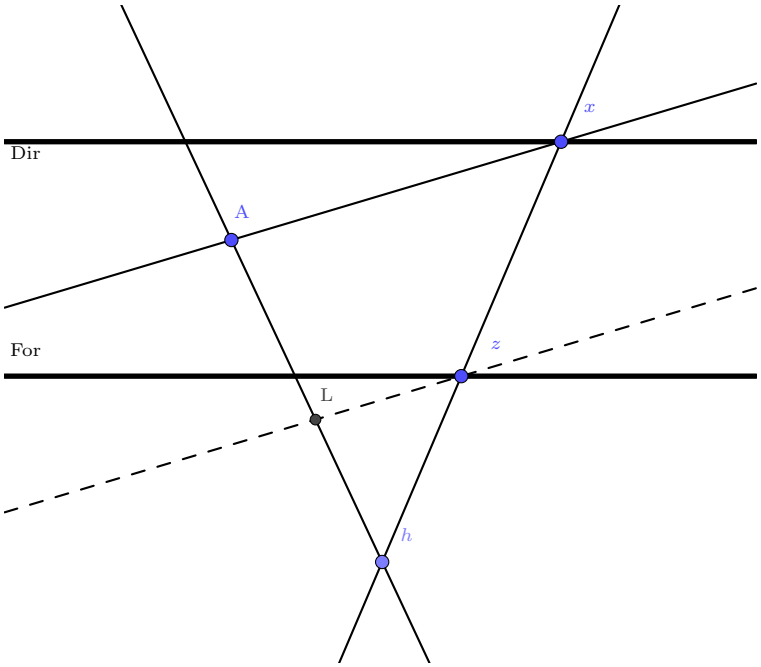

FIGURE 11 – La génération de la Hire : L est formé à partir de h.

de la Hire, les points de la directrice sont envoyés sur les points à l'infini du plan.

Il s'attaque alors immédiatement au problème principal posé par sa manière de définir la formation des points : celle-ci pourrait dépendre de la droite δ passant par h choisie au début de la construction, ou, dit autrement, du point x sur la directrice pris pour tracer $\delta = (hx)$. Cela est en fait une conséquence simple du théorème de Thalès, et nous n'en donnerons par le détail ici mais renvoyons au lemme 21 du texte de la Hire. Il n'a cependant pas vu que c'était aussi une conséquence simple de la proposition 12 du livre VI des *Éléments* d'Euclide, ce que le Poîvre saura exploiter avec intelligence.

Il démontre par la suite quelques propriétés fondamentales de sa transformation, en particulier qu'elle préserve les alignements. C'est donc une homographgie, que nous noterons ϕ en référence au prénom de son inventeur. Il est bien évident que $\phi(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et que si h est sur la formatrice, alors $\phi(h) = h$. La génération de la Hire est donc une homologie de pôle A et d'axe sa formatrice. Pour qu'elle soit bien définie, on se donne ici la droite Dir qui n'est autre que l'ensemble des points dont l'image est à l'infini.

Les quelques autres lemmes démontrés par la Hire concernant sa génération illustrent bien son inspiration perspectiviste, mais nous ne attarderons pas sur ceux-ci. Ce qui est intéressant, c'est que cette inspiration a d'autres manifestations, comme le montre la deuxième description qu'il donne de sa formation de points pour générer des coniques à partir de cercles.

4.2 La génération de la Hire : deuxième version

La deuxième section des *Planiconiques* a pour titre *Les sections de superficies coniques sont des lignes courbes formées par un cercle selon cette méthode.* Nous allons voir que la Hire y décrit sa génération comme le redressement perspectif d'un rabattement.

Soit $\mathcal{C}_0$ un cercle dans un plan $\mathcal{B}_0$ et soit a un point pris hors de $\mathcal{B}_0$, permettant de considérer le cône de sommet a et de base $\mathcal{C}_0$. Soit maintenant $\mathcal{P}$ un plan coupant ce cône selon la section conique $\mathcal{C}$: le but est de construire un cercle dans $\mathcal{P}$ et une homologie de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui transforme ce cercle en la conique $\mathcal{C}$. La construction adoptée par la Hire est très proche de celle utilsée par Desargues pour prescrire les foyers et que nous avons décrite plus haut.

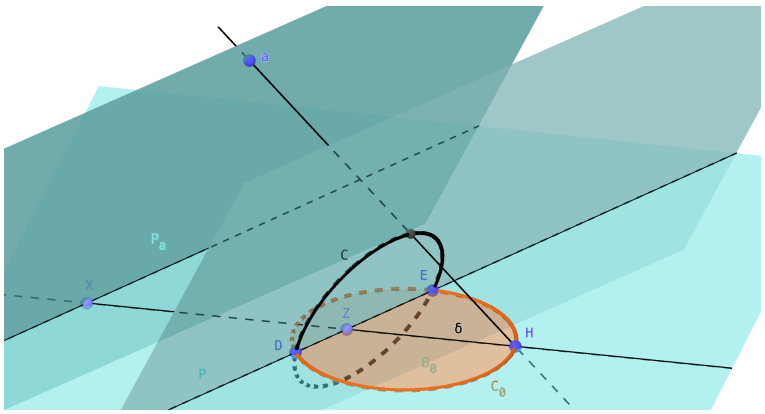

FIGURE 12 – La génération de la Hire : générer une conique à partir d'un cercle.

Afin d'être fidèle au texte original de la Hire, nous allons respecter sa manière de lettrer les points. Ainsi le plan $\mathcal{P}$ coupe-t-il le plan de base $\mathcal{B}_0$ selon une droite (DE). Soit $\mathcal{P}_a$ le plan passant par a et parallèle à $\mathcal{P}$, coupant le plan de base $\mathcal{P}_0$ selon la droite (bc) (et non (BC) comme écrit dans l'original [42] : cela est d'ailleurs corrigé dans les errata de la fin des *Planiconiques*).

Soit H un point du cercle de base $\mathcal{C}_0$ et traçons par H une droite δ qui va couper (DE) en z et (bc) en X. Considérons le rabattement du plan $\mathcal{B}_0$ sur le plan $\mathcal{P}$ autour de leur droite commune (DE), dit autrement, considérons la rotation ρ d'axe (DE) envoyant $\mathcal{B}_0$ sur $\mathcal{P}$. Le cercle $\mathcal{C}_0$ est envoyé par cette rotation sur un cercle $\mathcal{C}'$ inclus dans $\mathcal{P}$. Une fois les éléments qui précèdent mis en place, la Hire démontre que l'on peut, au sein du plan $\mathcal{P}$, générer la conique $\mathcal{C}$ à partir du cercle $\mathcal{C}'$. Sa démonstration, comme sa construction, est un peu confuse, mais nous allons essayer d'en donner une description aussi claire qu'il soit possible de le faire.

Nommons h le rabattu de H. L'angle $\widehat{Dzh}$ est égal à l'angle $\widehat{DzH}$ et la longueur zh est égale à la longueur zH. Nous renvoyons à la figure 13, où le point z' est le projeté orthogonal commun de H et h sur la droite (DE), axe de la rotation.

Nommons maintenant B le rabattu de b, C celui de c et x celui de X. Traçons

42. Šír, dans sa thèse, n'en a pas tenu compte, ce qui rend sa descritption de cette partie du texte de la Hire à la fois confuse et non conforme à l'original.

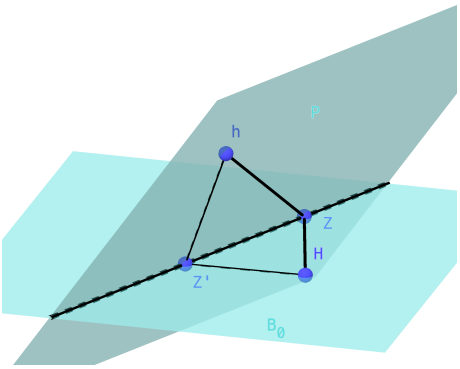

FIGURE 13 – Angles et distances préservés par le rabattement.

dans $\mathcal{P}$ la droite (xA) de sorte que les angles $\widehat{\mathrm{B}x\mathrm{A}}$ et $\widehat{b\mathrm{X}a}$ soient égaux et que les longueurs xA et Xa soient elles aussi égales (noter ici combien la Hire est moins soigneux que Desargues dans son lettrage). Comme le rabattament est obtenu par la rotation ρ qui est une isométrie, qui laisse fixe son axe (DE) qui est parallèle à la droite (bc), nous pouvons affirmer que :

— X$z = xz$;
— l'angle entre (Xz) et (DE) est égal à celui entre (xz) et (DE) ;
— l'angle entre (Xz) et (bc) est égal à celui entre (xz) et (BC) ;
— (xA) est parallèle à (Xa) ;
— (bc) est parallèle à (BC).

Comme la Hire, nous pouvons maintenant récolter les fruits de cette construction, en affirmant que la conique $\mathcal{C}$ est formée par le cercle $\mathcal{C}'$ selon la génération de pôle A, de directrice (BC) et de formatrice (DE).

Traçons la droite (aH), qui va couper le plan $\mathcal{P}$ en un point que nous noterons L qui est sur $\mathcal{C}$, puisque H est sur le cercle de base du cône de sommet a dont $\mathcal{C}$ est section. Nommons enfin ℓ le point formé par le point h selon la génération décrite ci-dessus. Il nous suffit de démontrer que L $= \ell$. Or, des assertions énumérées ci-dessus et du théorème de Thalès, il découle que

$$\frac{\mathrm{HX}}{\mathrm{H}z} = \frac{\mathrm{X}a}{z\mathrm{L}} \text{ et } \frac{hx}{hz} = \frac{x\mathrm{A}}{z\mathrm{L}}$$

et, comme $\mathrm{HX} = hx, hz = \mathrm{H}z$ et $x\mathrm{A} = \mathrm{X}a$, il vient que $z\ell = z\mathrm{L}$ ce qui entraine, les trois points z, ℓ et L étant sur la même droite, que $\ell = \mathrm{L}$.

La Hire dit alors que le cercle $\mathcal{C}'$ est le *générateur* de la conique $\mathcal{C}$ et il affirme que, selon la position de celui-ci par rapport à la directrice, la conique $\mathcal{C}$ sera :

— une parabole si $\mathcal{C}'$ est tangent à la directrice ;
— une ellipse s'il ne la coupe pas ;
— une hyperbole s'il la coupe en deux points.

Dans la suite de son petit traité, la Hire montre comment on peut avec sa génération construire les diamètres d'une conique et leurs ordonnées, son centre etc. Hormis la méthode, radicalement nouvelle par la considération d'une transformation du plan dans lui-même, la Hire n'y démontre rien d'original. On y ressent une profonde influence des méthodes perspectivistes, puisque nombre de ses considérations sont basées sur le redressement du rabattement décrit ci-dessus.

Cependant, comme il n'a pas faites siennes les idées projectives de Desargues concernant les points à l'infini, son traitement des coniques n'est pas unifié et il manque l'occasion d'une refondation complète de la théorie des coniques comme l'a fait Desargues en 1639, refondation qui serait basée non sur la polarité mais sur l'utilisation des homologies [43]. On y ressent néamoins l'influence du Lyonnais, par exemple dans sa description des asymptotes à une hyperbole comme à la fois tangentes en l'infini et diamètres conjugués, reprise presque mot pour mot du *Brouillon Project.*

5 La *Correspondance* de le Poîvre

En 1704, Jacques-François le Poîvre, de Mons, fait paraitre un petit traité [44] des sections du cylindre et du cône qui, bien que quelque peu méconnu, présente un intérêt certain dans l'histoire de la géométrie en faisant, comme l'écrivit René Taton, le lien entre Desargues et Poncelet. Il nous intéresse ici car l'inspiration perspectiviste y tient une place importante en tant qu'organisatrice et clarificatrice du propos. Notons qu'il existe une deuxième édition de ce traîté, datée de 1708, et ne contenant pas la version planaire de la correspondance ici décrite, *voir* l'article [15] de Jean-Pierre le Goff.

Dans la préface, faisant référence à la lettre de Descartes à Desargues du 19 juin 1639 [45] où il lui reproche d'avoir tenté de parler aux doctes aussi bien qu'à ceux qui ne le sont pas, le préfacier affirme que l'auteur est parvenu à concilier ces deux exigences, en donnant « une nouvelle projection de nouvelles propriétez » des sections coniques. Pour ce faire, celui-ci choisit de présenter les coniques non comme section d'un cône, mais comme *ombre portée* par une figure. Ainsi écrit-il :

« J'ay crû qu'il étoit nécessaire de donner icy un avis au Lecteur touchant mes figures ; car quoyque les figures d'Optique puissent produire leur effet dans l'œil du Spectateur, sans qu'il fasse attention aux règles de l'art, cependant il sera d'un fort grand usage, de s'imaginer celles de ce Livre, lesquelles représentent differens plans, produites par des parallèles tombant de tous les points de l'objet sur le plan de la projection qui est celuy du papier. Ces parallèles seroient les raïons mêmes par lesquels l'œil verroit cet objet, s'il en étoit infiniment éloigné ; c'est pourquoy on pourroit les nommer Raïons. »

Il est clair qu'il parle ici de ses sections du cylindre, mais ces lignes s'appliquent aussi bien aux sections du cône, où les *raïons* sont à imaginer concourants. Nous y voyons clairement à l'œuvre l'influence de la pensée perspectiviste, qui doit guider le lecteur et a donc dû guider l'auteur dans sa découverte des preuves simples et nouvelles qu'il va présenter. Notons cependant que, comme la Hire, le Poîvre n'a pas adoptée les conceptions projectives de Desargues. Aussi traite-t-il séparément du cône et du cylindre. Nous nous concentrerons ici sur son étude des sections du cône plutôt que du cylindre.

Contrairement à la Hire qui débute ses *Planiconiques* par une construction planaire quelque peu obscure, le Poîvre commence par une construction tridi-

43. Notons que ces deux voies seront toutes deux mises en œuvre lors de la mise en place de la géométrie projective au début du XIX^{e} siècle.

44. *Traité des sections du cylindre et du cone, considérées dans le solide, & dans le Plan, avec des Démonstrations simples & nouvelles,* chez Barthélémy Girin, Paris, 1704.

45. *Voir* pour ce texte le livre de Taton [20].

mensionnelle de nature perspectiviste. En exploitant la représentation en perspective de cette construction dans le plan du dessin, il opère alors une réduction dimensionnelle qui fournit une homologie permettant de former des coniques à partir de cercles.

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans, que le Poîvre nomme respectivement le *premier* et le *second.* Ces deux plans se coupent selon une droite qu'il nomme la *base* et que nous noterons $\mathcal{F}$. Supposons donné, hors de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$, un point s appelé *sommet.* Les droites qui en émanent sont nommées par la Hire des *verticales.* Si f est un point de $\mathcal{P}_1$, la verticale (sf) passant par f coupe le second plan en un point F qui est dit *répondre* à f. Il perçoit clairement qu'il crée ainsi une correspondance entre plan puisqu'il l'explicitera, contrairement à ce que faisait la Hire, dans sa notation :

« Je marquerai les points du second plan par les grandes lettres, & tous les autres points qui seront au dehors de ce plan, par les petites. (...) Je donnerai aux points répondans des lettres répondantes. Ainsi F répondra à f, & Ff sera une verticale. »

Soit $\mathcal{P}_1'$ le plan parallèle à $\mathcal{P}_1$ et passant par s. Il coupe le plan $\mathcal{P}_2$ selon une droite appelée la *directrice du second plan.* De même, si $\mathcal{P}_2'$ est le plan parallèle à $\mathcal{P}_2$ passant par s, celui-ci coupe le plan $\mathcal{P}_1$ selon la *directrice du premier plan.* Nous noterons ces deux droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1$.

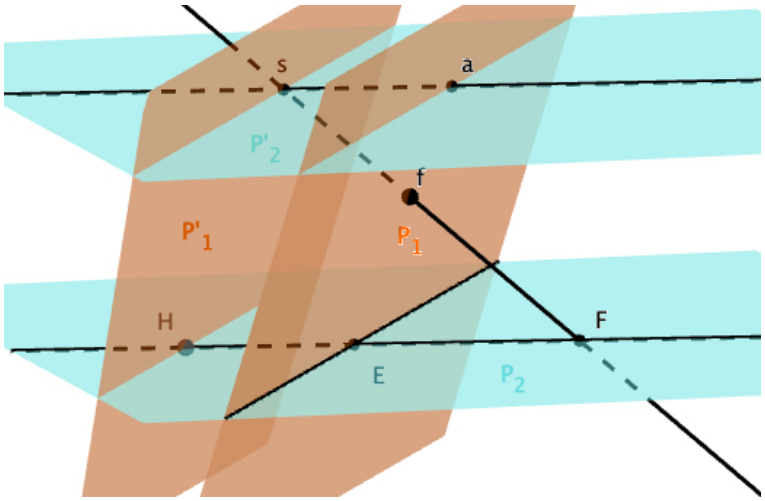

FIGURE 14 – La correspondance de le Poîvre par le relief.

Le Poîvre note que les points de la base se répondent à eux mêmes, mais qu'un point de la directrice de l'un des deux plans « n'a pas de point qui luy réponde dans l'autre. » Les points qui répondent à ces derniers se trouvent en effet à distance infinie. Afin de préparer à l'introduction de sa correspondance strictement planaire, il donne une méthode de construction permettant, étant donné un point f du premier plan, de trouver son correspondant F dans le second. Prenons pour cela un point a quelconque sur la directrice du premier plan et traçons la verticale (sa). Traçons maintenant la droite (fa), qui va couper la base $\mathcal{F}$ en un point E. Par E, traçons la parallèle à la verticale (sa) : cette droite est incluse dans le second plan et coupe la directrice de ce plan en un

point H. Les points H, s, f, a, E sont coplanaires et la droite (HE) coupe la droite (fs) en le point F qui répond au point f.

Notons que, dans la figure que nous avons faite, cette construction se fait dans la feuille du dessin et n'y utilise que des propriétés d'incidence et le parallèlisme. Le Poîvre va donc pouvoir opérer une réduction dimensionnelle pour donner une version entièrement planaire de sa correspondance. Cela est bien illustré par le passage suivant :

« Il sera aisé de faire l'application du reste à la méthode des plans. Tout le discours suivant, & même toutes les figures serviront également aux deux méthodes [46]. Il faudra seulement dans celle des plans s'imaginer, que les ellipses qui représentent le cercle générateur sont de véritables cercles, ce qui est facile. »

La construction de la correspondance faite ci-dessus par le relief doit avoir convaincu le lecteur que la méthode planaire de le Poîvre donnera finalement une homologie semblable à la génération de la Hire, de directrice $\mathcal{D}_1$, de formatrice $\mathcal{F}$ et de pôle s (dans le plan de la figure). Cependant, et c'est là une idée très fructueuse de le Poîvre, celui-ci va définir sa correspondance planaire en se basant sur la proposition 12 du livre VI des *Éléments* d'Euclide, qui, comme nous l'avons dit plus haut, sert à construire une quatrième proportionnelle. Voici comment est tournée la définition de la correspondance de le Poîvre pour des points d'un même plan :

« Deux parallèles ab, De, dont je nomme *Directrice* la première, & *Base*, la seconde, étant données dans un plan, avec un point fixe s pris au dehors d'elles, lequel je nomme sommet : je dis, qu'un point F répond à un autre point f, si la distance du premier au second est quatrième proportionnelle à la distance de la directrice, à celle de la base, & à celle du sommet. »

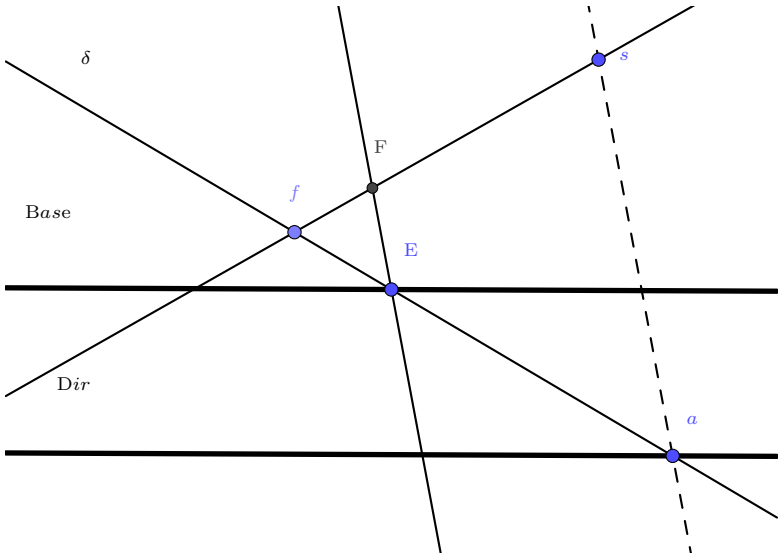

FIGURE 15 – La correspondance de le Poîvre par le plan.

Il donne alors la construction du répondant F de f en paraphrasant la preuve de la proposition 12 du sixième livre : il renverse donc la manière de faire de

46. c-à-d. par le relief et par le plan.

la Hire, ce qui lui permettra une bien plus grande simplicité dans ses démonstrations concernant les coniques. Rappelons comment cela fonctionne : traçons (fa), qui va couper la base en E, et par E traçons la parallèle à (sa). Cette dernière droite coupe alors (fs) en F. Ainsi F répond à f, car, d'après le théorème de Thalès, nous avons

$$\frac{sf}{f\mathrm{F}} = \frac{af}{f\mathrm{E}},$$

c'est-à-dire que fF est quatrième proportionnelle de af (distance à la directrice), fE (distance à la base) et sf (distance au sommet).

Le travail de le Poîvre est donc très proche de celui de la Hire. Il y suit les mêmes inspirations trouvant leur source dans la pratique de la perspective, mais il va plus loin que son devancier en percevant tout de suite le fait qu'il a sous la main une véritable correspondance entre points du plan, ce qu'il met en valeur par ses notations. Le traité de le Poîvre mériterait, à n'en pas douter, une étude approfondie.

6 Retour à Desargues : les deux dernières *Propositions géométriques* de 1648

Nous allons clore ce texte en faisant un retour à Desargues, et plus particulièrement aux deux dernières des trois propositions de 1648, la première ayant été anlaysée plus haut. Ces deux propositions sont des développements de la première et nous y verrons surgir l'idée de réduction dimensionnelle déjà citée, ainsi que celle de correspondance entre points.

6.1 La deuxième proposition

Comme toujours avec Desargues, la rédaction est extrêmement « tendue » et réclame une grande attention pour comprendre son propos. On se donne quatre points[47] d'un plan $\mathcal{P}$, τ une droite quelconque du même plan, et enfin un autre point K, qui peut être du même plan ou non. Ces quatre points $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{B}$ définissent six diagonales, ou « bornales », et Desargues nous demande d'en considérer trois parmi elles, celles passant par l'un des quatre points, O par exemple. Il s'agit donc des droites $(\mathrm{OA}), (\mathrm{OB}), (\mathrm{OD})$. Ces trois droites coupent τ en trois points $5, 2$ et 3 respectivement (*voir* la figure 16).

Donnons-nous maintenant un point o auquel il faudra penser comme l'image de O par l'homologie que Desargues est en train de construire : selon sa terminologie, o et O se *correspondent.* Traçons les droites $(5o), (2o)$ et $(3o)$; elles coupent respectivement (AK) en a, (DK) en d et (BK) en b. Ainsi à chaque point en majuscule, comme D, correpond un point en minuscule de même lettre, comme d, et cette correspondance n'est jamais qu'une homologie de centre K et de formatrice τ, bien définie grâce à la connaissance de l'image o du point O.

La seconde proposition de Desargues est alors la suivante : à chaque bornale du quadrangle en majuscules correspond une bornale du quadrangle en minuscules, et deux bornales ainsi correspondantes se coupent en un point sur

47. Comme « bornes ou liens » comme l'écrit Desargues, reprenant là une terminologie qui n'est pas sans rappeler celle des arpenteurs ou des architectes, terminologie qu'il employait déjà dans le *Brouillon Project.*

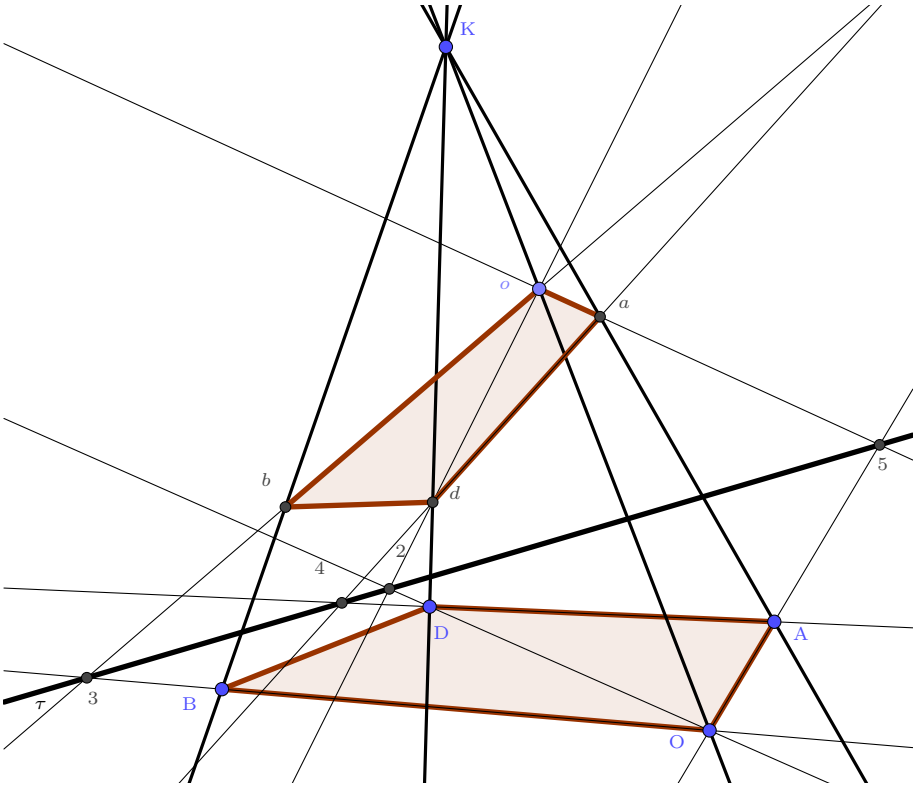

FIGURE 16 – la deuxième proposition géométrique de 1648.

la droite τ. Ainsi, par exemple, (AD) coupe (ad) en un point noté 4 qui est sur la droite τ. La démonstration est faite par incidence quand K n'est pas du même plan que les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots$, et par application de la première proposition sur les triangles perspectifs quand la figure est entièrement plane. Comme pour la première proposition, il remarque qu'il y a tout à fait avantage à réduire mentalement la dimension de la figure considérée, contenant une idée de relief, à une figure plane, et que l'énoncé y reste valide.

6.2 La troisième proposition

Le Lyonnais étend encore un peu son étude de la correspondance entre points qu'il a définie avec la seconde proposition en précisant les rapports métriques qu'elle laisse invariants. Tout d'abord, manquant du langage ensembliste élémentaire qui pourrait lui permettre de définir explicitement sa correspondance comme une transformation du plan définie en tous les points, il va, comme il l'a fait dans le *Brouillon Project* au sujet de l'involution, introduire une foule de points (*autant qu'il en est besoin,*, pourrait-il écrire) qui lui permet de donner l'idée d'une telle correspondance. Il apparait dans le texte, quoiqu'implicitement, le fait que sa correspondance préserve les alignements (c'est une conséquence de la deuxième proposition) : si B, H et O sont alignés, et si (BH) coupe τ en 3, alors b, h et o sont alignés et (bh) coupe τ aussi en 3.

Il écrit alors des identités de rapports sous la forme que nous avons évoquée

plus haut et que nous allons traduire dans une écriture plus familière au lecteur contemporain. Tout d'abord, il est clair que

$$\frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{H3}}\frac{\mathrm{H3}}{\mathrm{HB}}.$$

Ensuite, on peut appliquer le théorème de Ménélaüs et trouver les deux identités suivantes :

$$\frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{H3}} = \frac{\mathrm{KO}}{\mathrm{K}o}\frac{ho}{h3} \text{ et } \frac{\mathrm{H3}}{\mathrm{HB}} = \frac{h3}{hb}\frac{\mathrm{K}b}{\mathrm{KB}}.$$

Comme par ailleurs on a aussi

$$\frac{ho}{h3}\frac{h3}{hb} = \frac{ho}{hb},$$

on en déduit que

$$\frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{KO}}{\mathrm{K}o}\frac{\mathrm{K}b}{\mathrm{KB}}\frac{ho}{hb}.$$

Si l'on répète le même raisonnement avec un autre point P de la droite HOB, alors on peut écrire que

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{KO}}{\mathrm{K}o}\frac{\mathrm{K}b}{\mathrm{KB}}\frac{po}{pb}.$$

Il retire alors des raisons « celles qui reviennent entr'elles à la raison d'égalité », ce que l'on peut interprêter comme de faire la composition suivante :

$$\frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{HB}}\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{KO}}{\mathrm{K}o}\frac{\mathrm{K}b}{\mathrm{KB}}\frac{ho}{hb}\frac{\mathrm{K}o}{\mathrm{KO}}\frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{K}b}\frac{pb}{po},$$

soit finalement

$$\frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{HB}}\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PO}} = \frac{ho}{hb}\frac{pb}{po},$$

ce qui n'est autre qu'une égalité énonçant le fait que la correspondance de Desargues préserve les birapports, ce qui est un résultat qui généralise le théorème de la ramée (préservation de l'involution, ou division harmonique, par perspective centrale) au cas d'une homologie. Et Desargues de conclure :
« Ces lignes ont de la correspondance entre elles, & l'on voit ce rapport de leur telle circonstance.

Loüé Soit Dieu. »

7 Conclusion

L'étude qui précède montre combien Girard Desargues a pu influencer Philippe de la Hire et Jacques-François le Poîvre dans leur élaboration de la notion de transformation du plan dans lui même pour générer une conique à partir d'un cercle. Mais il nous semble que ce n'est pas là le plus important.

Ce que notre étude révèle est que c'est en s'inspirant de la *pratique* des peintres et des dessinateurs que Girard Desargues a été amené à révolutionner la géométrie dans son *Brouillon Project,* révolution que la Hire et le Poîvre ont tant bien que mal continuée sans vraiment en comprendre la portée. Le processus a été celui d'une prise en compte du point de vue de l'*observateur* dans la pratique, les méthodes et la mise au jour de nouveaux concepts en géométrie.

Cette irruption du sujet dans un champs qui jusque là en était dépourvu va imposer une révision profonde de ce que sont un énoncé ou une notion objectifs, c'est-à-dire relatifs à un point de vue donné mais transposables de manière transparente à un autre. En s'appuyant sur le fait qu'une section conique n'est jamais qu'un cercle vu sous un certain point de vue, Desargues déclare que toutes les coniques forment un même genre, quelque soit leur espèce (ellipse, parabole ou hyperbole, voire union de deux droites), et que cette catégorisation en espèce n'a pas lieu d'être, ces noms ne leur ayant été donnés « qu'à raison d'evenemens qui sont hors d'elles & de leur nature. » Pour mener à bien une étude unifiée des coniques, il faut donc en construire une théorie qui soit indépendante du point de vue que l'on adopte pour les décrire, c'est-à-dire, en quelque sorte, indépendante de la manière dont on les représente comme vue en perspective d'un cercle. C'est ce que réalise Desargues en deux temps. Il introduit d'abord une géométrie non-euclidienne, ou projective, incluant des lieux à distance infinie : point (ou but) de concours de deux droites parallèles, droite (ou essieu) de concours de deux plans parallèles, et enfin droite à l'infini d'un plan. Il est possible d'y voir l'influence de Johannes Kepler qui, le premier, a énoncé la continuité qui relie les trois types de coniques. Il met ensuite en place une théorie projective complète de la polarité associée à une conique, sous la forme de sa théorie de l'involution et de la traversale, notions dont il montre qu'elles sont invariantes par projection centrale ou perspective.

FIGURE 17 – Philippe de la Hyre, *Allégorie de la Géométrie*, 1649, Fine Arts Museum of San Francisco.

Cela lui permet, dans un premier temps à point de vue fixe, c'est-à-dire, dans le cas de l'étude des sections, à cône fixe, de démontrer des résultats valables pour n'importe quelle conique à partir de raisonnements portant sur le cercle, comme il le fait pour son théorème d'involution. Desargues va ensuite plus loin car, comme nous l'avons vu, il utilise l'indépendance vis-à-vis du point de vue pour en changer. Cela l'amène à ce spectaculaire résultat concernant la possibilité de prescire l'un des foyers et le diamètre principal en changeant le point de vue sur la conique ou, dit autrement, en choisissant comme il l'entend le cône dont la

conique est section.

La Hire et le Poîvre n'auront plus qu'à récolter les fruits des semailles faites par Desargues pour introduire une méthode entièrement planaire de changement de point de vue sur une conique, permettant, par l'introduction d'une homologie du plan, de traiter de manière uniforme les coniques. Ce n'est vraiment qu'au XIX^{e} siècle que ces conceptions seront complètement explicitées, avec la naissance de la géométrie projective (chez Poncelet, par exemple), fille de la géométrie descriptive (chez Monge, par exemple), elle même fille de la pratique de la perspective mise au point par les artistes-savants de la renaissance.

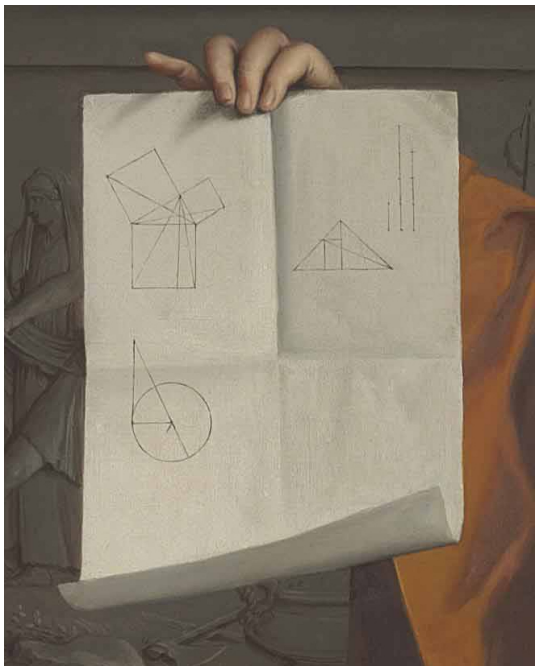

FIGURE 18 – *Allégorie de la Géométrie,* détail.

Il semble donc pertinent de dire que ce sont les peintres qui ont permis aux mathématiciens de se libérer du carcan euclidien, en menant Desargues à la géométrie projective puis, par l'irruption du sujet dans le jeu, à la notion de transformation ce qui, deux siècles plus tard, amènera à la refondation de la géométrie autour de la notion de groupe de transformations par Félix Klein. L'étude de l'*Allégorie de la Géométrie* (*Voir* la figure 17) de Laurent de la Hyre (père de Philippe de la Hire, et proche de Desargues) nous permet d'apercevoir une partie de ce transfer conceptuel de la peinture vers les sciences. L'œil est bien-sûr immédiatement attiré vers la feuille (*voir* la figure 18) tenue par la personnification allégorique de la Géométrie, où l'on reconnait quelques figures illustrant des propositions des *Éléments* d'Euclide, comme la proposition 47 du livre I (le théorème dit de Pythagore), en haut à gauche. La deuxième, en haut à droite, est un peu plus mystérieuse, car elle fait apparaitre une figure très similaire à celle dela proposition 9 du II des *Éléments,* mais aussi une collection de trois segments, l'un semblant être considéré comme une unité, et les deux autres mesurant respectivement trois et quatre unités. Nous laissons au lecteur

curieux le soin de démêler ce mystère. La figure en bas à gauche n'est pas sans rappeler certaines propositions du livre II, par exemple la 18, voire la 36 dans le cas particulier traîté en premier par Euclide. Cela étant dit, la présence du petit segment semblant bissecter l'angle au centre du cercle peut mener à d'autres interprétations, en termes de relations angulaires au sein de la figure par exemple.

FIGURE 19 – *Allégorie de la Géométrie,* détail.

Mais c'est assez ici d'examiner cette feuille tendue par Dame Géométrie. Il est un autre détail autrement plus intéressant pour notre propos, c'est celui du tableau sur le chevalet à la gauche de la composition, *voir* la figure 19. Il s'agit d'un tableau dans le tableau, présentant donc une représentation en perspective d'une représentation en perspective : Laurent de la Hyre a donc ici *composé* deux perspectives. Malgré cette composition, nous sommes encore en mesure de reconnaitre certaines caractéristiques des objets représentés sur la toile : on y trouve, par exemple, des parallèlèpipèdes rectangles. On peut s'interroger ici sur le procédé employé par le peintre pour tracer les éléments du tableau dans le tables : y-a-t-il employé l'équivalent d'une génération de la Hire ?

L'idée de tenir compte d'un point de vue n'est pas nouvelle en géométrie, puisqu'elle est inhérente à tout traité d'optique, à commencer par celui d'Eu-

clide [48] ou celui de Vitellion [49], mais aussi des traités de perspective. Comme l'ont remarqué les historiens de l'art, comme par exemple Daniel Arasse dans [6], l'invention de la perspective fait que les personnages représentés, dans une annonciation par exemple, « habitent » un même espace, espace qu'ils partagent alors avec le spectateur. On sait que c'est Blaise Pascal, le plus doué des élèves de Desargues, qui le premier a défini la géométrie comme *science de l'espace* [50].

Or, pour qu'il y ait espace, il faut qu'il y ait pluralité des êtres qui l'occupent et qui décrivent son contenu, donc *pluralité des points de vue* sur ce contenu, ainsi qu'un moyen d'*accord* entre les descriptions obtenues depuis ces points de vue divers. Les théoriciens de la perspective ont posé très tôt la question de savoir ce que deux représentations d'une même scène avaient en commun. C'est en quelque sorte à cette question que répond Desargues avec son traitement projectif des coniques : ce qu'elles ont en commun, outre les propriétés d'incidence, ce sont les relations d'involution sur les diverses droites qui les constituent. En allant un peu plus loin que leur maître, la Hire et le Poîvre donnent du changement de point de vue une incarnation conceptuelle sous la forme d'une transformation du plan dans lui-même, la génération de la Hire.

Ainsi, avec Desargues s'ouvre pour la première fois la possibilité pour les géomètres d'*habiter en nombre* l'objet de leurs recherches, comme les peintre peuvent habiter en nombre la scène qu'ils représentent. La description du changement de point vue donne naissance chez la Hire et le Poîvre à la notion de transformation [51]. L'étude de l'héritage de Desargues mériterait sans doute d'être approfondie pour tirer les fils ténus qui pourraient le relier à la renaissance de ses conceptions de la géométrie au dix-neuvième siècle. S'il existe de nombreux textes traitant de la théorie mathématique de la perspective, [52] l'étude qui précède montre qu'il pourrait être intéressant de renverser le point de vue et d'essayer de faire une histoire des idées, pratiques et concepts de la géométrie à partir des pratiques picturales, dans ce qui se situerait au croisement de l'histoire de l'art, de l'histoire de l'optique, de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des idées. On est en droit d'interpréter notre article comme un plaidoyer pour une rupture des digues entre ces différents champs.

Remerciements. L'auteur tient avant tout à remercier Marie Anglade qui l'a embarqué dans l'aventure d'une lecture détaillée du *Brouillon Project* de Girard Desargues. Il remercie également Éric Audureau pour une relecture attentive de ce texte, et Sylvie Pic, artiste, pour de fructueuses discussions sur l'histoire de l'art et de la perspective. Il remercie enfin les rapporteurs anonymes de cet article, qui lui ont permis d'en clarifier certains points.

Références

[1] Kirsti Andersen. Desargues' method of perspective : its mathematical content, its connection to other perspective methods and its relation to

48. *voir* l'édition de Paul Ver Eecke [22].
49. *Voir* l'édition de Sabetai Unguru [21].
50. *Voir* le fragment de l'*Introduction à la Géométrie* dans [17], p. 291–294.
51. Notons au passage qu'aujourd'hui, dans l'enseignement de la notion de variété différentielle, on utilise souvent l'image d'un changement d'observateur, ou de point de vue, pour parler des changements de cartes.
52. Nous nous contenterons de citer la remarquable somme de Kirsti Andersen [2].

Desargues' ideas on projective geometry. *Centaurus*, 34(1) :44–91, 1991.

[2] Kirsti Andersen. *The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge.* Sources and studies in the history of Mathematics and Physical Sciences. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 2007.

[3] Marie Anglade and Jean-Yves Briend. La notion d'involution dans le *Brouillon Project* de Girard Desargues. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 71(6) :543–588, 2017.

[4] Marie Anglade and Jean-Yves Briend. L'usage de la combinatoire chez Girard Desargues : le cas du théorème de Ménélaüs. working paper or preprint hal-01692285, January 2018.

[5] Marie Anglade and Jean-Yves Briend. Le diamètre et la traversale : dans l'atelier de Girard Desargues. *Archive for History of Exact Sciences*, 73(4) :385–426, 2019.

[6] Daniel Arasse. *L'annonciation italienne : un histoire de perspective.* Les Incontournables. Fernand Hazan, 1999, rééd. 2020.

[7] Abraham Bosse. *Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral.* Imprimerie de Pierre Des-Hays, Paris, 1648.

[8] Andrea Del Centina. Pascal's *mystic hexagram,* and a conjectural restoration of his lost treatise on conic sections. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 74 :469–521, 2020.

[9] Girard Desargues. *Exemple de l'une des manière universelles du S.G.D.L touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers poinct, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champs de l'ouvrage.* M. Bidault, H. du Roy, demeurant au gros pavillon des Tuylleries, au bout de la grande Galerie du Louvre, Paris, 1636.

[10] Girard Desargues. *Brouillon project d'une atteint aux evenemens des rencontres d'un Cône et d'un Plan.* 1639.

[11] Judith Field. Linear perspective and the projective geometry of girard desargues. *Nuncius*, 2(3) :3–40, 1987.

[12] Judith Field and Jeremy Gray. *The geometrical work of Girard Desargues.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[13] Morris Kline. *Mathematics in Western Culture.* Oxford University Press, 1953.

[14] Philippe de La Hire. *Nouvelle Methode en geometrie pour les sections des superficies coniques et cylindiques.* Thomas Moette, Paris, 1673.

[15] Jean-Pierre Le Goff. Un auteur méconnu et une œuvre oubliée : Jacques-François le Poîvre (1652 ?-1710), & son *Traité des sections du cone...*, Mons, 1708. *Cahiers de la perspective de l'IREM de Basse-Normandie*, 6, 1993.

[16] Jacques-François Le Poîvre. *Traité des Sections du Cylindre et du Cone, considerées dans le Solide & dans le Plan, avec des Démonstrations simples & nouvelles.* Bathelemy Girin, Paris, 1704.

[17] Blaise Pascal. *Œuvres de Blaise Pascal, publiées suivant l'ordre chronologique par Léon Brunschvicg, Pierre Boutroux et Félix Gazier.* Librairie Hachette, Paris, 1914.

[18] Zbyněk Sír. *Les sections coniques chez Philippe de la Hire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6 et Université Charles de Prague, 2002.

[19] René Taton. Découverte d'un exemplaire original du « Brouillon project » sur les Coniques de Desargues. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 4(2) :176–181, 1951.

[20] René Taton. *L'œuvre mathématique de G. Desargues*. Bibl. de philosophie contemporaine Félix Alcan. Presses universitaires de France, Paris, 1951.

[21] Sabetai Unguru. *Witelonis Perspectivæ liber primus*. Ossolineum. Polish Academy of Science, 1977.

[22] Paul Ver Eecke. *Euclide, l'Optique et la Catoptrique*. Desclée de Brouwer, Bruges, 1938.

Jean-Yves Briend
Université d'Aix-Marseille
I2M UMR CNRS 7373
CMI
39, rue Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13
France.
jean-yves.briend@univ-amu.fr