HAL
open science

Nombrils, bruslans, autrement foyerz : la géométrie projective en action dans le Brouillon Project de Girard Desargues

Marie Anglade, Jean-Yves Briend

To cite this version:

Marie Anglade, Jean-Yves Briend. Nombrils, bruslans, autrement foyerz : la géométrie projective en action dans le Brouillon Project de Girard Desargues. 2020. hal-02934376v1

HAL Id: hal-02934376

https://amu.hal.science/hal-02934376v1

Preprint submitted on 9 Sep 2020 (v1), last revised 24 Jul 2021 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nombrils, bruslans, autrement foyerz : la géométrie projective en action dans le *Brouillon Project* de Girard Desargues

par Marie Anglade et Jean-Yves Briend

9 septembre 2020

> Mais c'est mon plus beau temps ! Le bonheur, comme on dit, n'habite pas sous des nombrils dorés.
>
> Honoré de Balzac, *Un début dans la vie.*

Résumé

Le *Brouillon Project* de Girard Desargues sur les coniques développe, dans sa partie centrale, la notion de *traversale,* qui généralise celle de diamètre d'Apollonius et permet d'unifier le traitement des diverses espèces de coniques. Nous avons montré ailleurs que le Lyonnais y développe une théorie complète de la polarité projective des coniques s'appuyant sur la notion de *traversale.* Nous allons dans le présent article analyser la fin du *Brouillon Project,* où la théorie de la traversale est mise en pratique pour donner un très élégant traitement du paramètre et des foyers. Cela nous permettra de montrer que les preuves de Desargues ne peuvent se comprendre que si l'on accèpte qu'il raisonne dans un cadre que l'on peut qualifier de *projectif,* en assimilant complètement les éléments à l'infini, qui deviennent indiscernables de ceux à distance finie, dans ses démonstrations.

Introduction

Girard Desargues a été qualifié par Jean-Victor Poncelet [1] de père de la géométrie projective. La lecture de son *Brouillon Project* sur les coniques de 1639, en particulier ses premières pages où sont confondues les notions de parallélisme et de concourance, semblent confirmer la justesse de ce jugement. On peut cependant lui objecter le fait que les méthodes de démonstration de Desargues, s'appuyant sur la théorie des proportions

1. *Voir* [Poncelet, 1822]

d'Euclide et les théorèmes de Thalès ou de Ménélaüs, ne semblent en aucun cas être de nature projective, puisqu'il faudrait pour cela qu'il ne fasse aucune différence entre les éléments à l'infini et ceux à distance finie. Nous avons montré dans nos articles [Anglade and Briend, 2017] et [Briend and Anglade, 2018] que le Lyonnais employait les points à l'infini dès le début de son traîté et que, progressivement, il abandonnait les réticences qu'il pouvait avoir au début de celui-ci à raisonner sans les différencier sur les points à distance finie ou infinie. Cela est illustré de manière spectaculaire par son introduction de la « droite à l'infinie » qui est vue comme la traversale (ou polaire, en termes modernes) du centre d'une conique eu égard à celle-ci, ce qui l'amène à écrire [2] : « Par forme d'éclaircissemens, Quand en un plan, aucun des poincts d'une droicte n'y est à distance finie, cette droicte y est à distance infinie. D'autant qu'en un plan le poinct nommé centre d'une coupe de rouleau n'est qu'un cas d'entre les innombrables buts d'ordonnances de droictes, il ne doit estre icy iamais parlé de centre de coupe de rouleau. » Ce qui est important ici c'est que l'objet considéré, bien que tous ses points soit à distance infinie, est bien une « droicte ».

Nous voudrions montrer dans cet article pourquoi l'on peut considérer que Desargues, dans la dernière partie de son *Brouillon Project,* raisonne et démontre dans le cadre de ce qui sera appelé bien plus tard la *géométrie projective.* Nous allons pour cela analyser de manière précise les dernières pages de ce texte, où Desargues met en application sa théorie projective de la polarité pour retrouver certaines notions et résultats classiques de la théorie apollonienne des coniques comme le paramètre ou le foyer.

Suite à la redécouverte des mathématiques antiques aux XVe et XVIe siècle en Europe est apparu le problème de comprendre, de simplifier et d'étendre l'un des plus difficiles traîtés de l'antiquité grècque, *Les Coniques* d'Apollonius de Perge. Cela a motivé de nombreux travaux au début du XVIIe siècle et l'on peut dire que Descartes comme Desargues vont y apporter des contributions très importantes en introduisant deux révolutions dans la manière d'envisager la pratique de la géométrie : en la réduisant au calcul chez Descartes, en fondant la géométrie projective chez Desargues [3]. Il va sans dire qu'aux yeux de leurs contemporains, la mise à l'épreuve de ces nouveautés doit passer par une confrontation avec les propositions centrales du traîté d'Apollonius. C'est à cela que sont consacrées les dernières pages [4] du *Brouillon,* que nous allons ici analyser. La rédaction de Desargues y est souvent confuse et d'un style obscur. Il s'avère cependant qu'une fois que l'on accèpte que Desargues raisonne de manière projective, certains passages qui jusque là étaient restés incompris ou savamment ignorés, même des meilleurs spécialistes du sujet, prennent sens et nous montrent un mathématicien qui pratique la géométrie comme personne ne le fera plus après lui pendant presque deux siècles.

Nous commencerons cet article par un bref rappel du contenu des vingt premières pages du texte, en insistant sur les notions d'arbre, d'involution et de traversale et en rappelant les quelques résultats importants que Desargues y démontre. Nous décrirons ensuite un court passage où le Lyonnais semble initier une théorie des couples de cercles

2. *Advertissement* pour la ligne 3 de la page 16.

3. Nous renvoyons au chapitre *Style cartésien, style arguésien* du livre [Granger, 1988] de Gilles-Gaston Granger pour une anlyse moins caricaturale que celle expédiée ici.

4. Plus précisément les pages 23 à 29 de l'original, *voir* plus bas.

et de coniques, ce qui semble sans rapport avec la théorie appolonienne à laquelle il s'attaque juste après mais qui, cependant et comme nous le verrons par suite, a toute sa place ici. Nous analyserons ensuite la brève et élégante théorie du paramètre développée dans le *Brouillon*, qui procède par spécialisations successives, montrant comment cette notion s'insère dans le cadre plus large de la théorie projective des coniques. La théorie des foyers est ensuite abordée par Desargues d'une manière originale, en la raccrochant à sa théorie du paramètre et en l'introduisant par une *réciproque* à la proposition 45 du livre III des *Coniques* d'Apollonius, proposition que le Lyonnais qualifie d'évidente et dont découle facilement la théorie classique des foyers.

C'est dans la section suivante, où nous analysons comment Desargues traite de l'hyperbole, que vont apparaitre de manière éclatante les *manières projectives* de Desargues. Nous y verrons entre autre qu'il n'hésite pas à considérer le birapport de points situés sur la droite à l'infini. Avant de conclure le *Brouillon* par des considérations générales que nous n'aborderons pas ici, le Lyonnais donne une application de ses méthodes à une très jolie construction de nature perspectiviste qui fait échos à la dernière phrase de son petit petit opuscule de 1636 sur la perspective [5]. L'analyse de ce passage pourra nous inciter à voir l'adoption par Desargues de méthodes projectives comme la conséquence de l'irruption de l'observateur dans le champ de la géométrie [6].

1 Bref résumé des 23 premières pages du *Brouillon Project*

Le *Brouilon project d'une atteinte aux événements des rencontre d'un cône et d'un plan* de Desargues, paru en 1639, est un texte très dense qui compte une trentaine pages auxquelles s'ajoutent quelques pages d'errata et d'ajouts [7]. Le seul exemplaire connu est conservé à la Bibliothèque nationale de France, dans la réserve des livres rares, sous la côte RESM-V-276. C'est à elle que nous ferons référence pour toutes les citations utilisées dans cet article [8]. Le lecteur pourra aussi se reporter à l'édition des œuvres mathématiques de Desargues par René Taton dans [Taton, 1951], ainsi qu'aux traductions ou éditions commentées en allemand par Max Zacharias dans [Desargues and Zacharias, 1922], en anglais par Judith Field et Jeremy Gray dans [Field and Gray, 1987] et en italien par Fabio Zanin dans [Desargues and Zanin, 2006]. Pour une analyse détaillée de ce qui n'est que résumé dans cette section, nous renvoyons aux articles [Anglade and Briend, 2017] et [Anglade and Briend, 2019] ainsi qu'à la prépublication [Briend and Anglade, 2018].

Le *Brouillon* commence par l'introduction d'éléments à l'infini permettant d'unifier les notions de droites concourantes et de droites parallèles sous la notion de *droites de même ordonnance.* Le *but* d'une ordonnance est alors le point de concours des droites

5. Intitulé *L'exemple de l'une des manières du S^r. G. D. L. touchant à la pratique de la perspective, Sans employer aucun tiers poinct de distance ou d'autre nature qui soit hors du champs de l'Ouvrage* et disponible sur le site GALLICA.

6. *Voir* l'article [Andersen, 1991] de Kirsti Andersen ainsi que la prépublication [Briend, 2020] du second auteur du présent texte.

7. Les *Advertissments.*

8. Ce document est disponible sur le site GALLICA.

de l'ordonnance. Il est à distance finie si ces droites sont concourantes, et à distance infinie si elles sont parallèles. L'auteur consacre ensuite une dizaine de pages à la notion d'*involution.* Pour définir celle-ci, qui concerne des couples de points disposés d'une manière particulière sur une droite, il commence par introduire la notion d'*arbre.*

Soient τ une droite, que Desargues appelle ici un *tronc,* et A un point de τ, ou *souche.* Trois couples de points de τ, ou *nœuds*, $\mathrm{B}, \mathrm{H}; \mathrm{C}, \mathrm{G}; \mathrm{D}, \mathrm{F}$ sont dits former un *arbre de souche* A si l'on a les égalités de rectangles suivantes :

$$\mathrm{AB.AH} = \mathrm{AC.AG} = \mathrm{AD.AF}.$$

Desargues démontre que la donnée d'un tel arbre font que les trois couples de nœuds forment ce qu'il appelle une *involution,* au sens où les égalités de raisons suivantes sont satisfaites :

$$\frac{\mathrm{GD.GF}}{\mathrm{CD.CF}} = \frac{\mathrm{GB.GH}}{\mathrm{CB.CH}}, \frac{\mathrm{FC.FG}}{\mathrm{DC.DG}} = \frac{\mathrm{FB.FH}}{\mathrm{DB.DH}}, \frac{\mathrm{HC.HG}}{\mathrm{BC.BG}} = \frac{\mathrm{HD.HF}}{\mathrm{BD.BF}}.$$

Réciproquement, si trois couples de nœuds forment une involution, alors il existe une souche dont ils forment l'arbre.

La donnée d'une involution de Desargues est équivalente à la donnée d'une *homographie involutive* du tronc τ vu comme droite projective. Si cette homographie est hyperbolique, ses deux points fixes sont ce que Desargues appelle des nœuds *moyens doubles.* Ainsi écrit-il dans ce cas que $\mathrm{B}, \mathrm{H}; \mathrm{C}, \mathrm{C}; \mathrm{D}, \mathrm{D}$ est une involution de quatre points $\mathrm{B}, \mathrm{H}; \mathrm{C}, \mathrm{D}$, auquel cas $\mathrm{B}, \mathrm{H}; \mathrm{C}, \mathrm{D}$ forment une *division harmonique*. La souche de l'arbe correspondant est le milieu du segment $[\mathrm{CD}]$. Les nœuds accouplés B, H, n'étant pas moyens, sont dits *extrêmes.* Si l'homographie est elliptique, elle n'admet pas de point fixe mais il existe cependant un couple de nœuds D, F tel que F, D en soit un aussi, de sorte que le milieu de $[\mathrm{DF}]$ est encore souche de l'arbre correspondant. Les deux nœuds D, F sont dits *moyens simples.* Notons enfin qu'une fois que l'on s'est donné trois couples de points en involution sur une droite, on peut en rajouter autant qu'on le souhaite : la notion est *agrégative* au même sens que l'est la relation d'alignement pour trois points [9].

Desargues démontre ensuite que la configuration d'involution est invariante par perspective, ce qui constitue le *théorème de la ramée.* Si τ et τ' sont deux troncs et si K est un point pris hors de ces deux troncs, alors l'image de toute involution sur τ par projection centrale depuis K vers τ' est une involution de τ'. De fait, l'involution peut se décrire au travers de certaines identités de birapports, et le birapport est un invariant projectif.

Il introduit ensuite sa terminologie sur les coniques et définit la notion de *traversale* d'un point eu égard à une conique. Celle-ci est équivalente à la notion de polaire. Si $\mathcal{C}$ est une conique et si F est un point du plan de la conique, alors il existe une droite τ, dite *traversale de* F *eu égard à la conique* $\mathcal{C}$, qui est telle que si ω est une droite quelconque passant par F coupant la conique en les points X, Y et la traversale τ en le point D, alors $\mathrm{F}, \mathrm{D}; \mathrm{X}, \mathrm{X}; \mathrm{Y}, \mathrm{Y}$ est une involution. Une droite telle ω passant par F est appelée une *ordonnée* de la traversale τ, et le point D est le *point traversal* de l'ordonnée ω.

9. *Voir* [Anglade and Briend, 2019].

Ces notions généralisent la notion appollinienne de diamètre et d'ordonnée au cas où ces dernières ne sont plus seulement parallèles (c'est-à-dire de même ordonnance de but à distance infinie) mais concourantes (c'est-à-dire de même ordonnance de but à distance finie). En effet, si le point F ci-dessus s'en va à l'infini, alors toutes les droites passant par $F = \infty$ deviennent parallèles et les points $\infty, D; X, Y$ formant alors une division harmonique, D est le milieu du segment [XY].

Desargues démontre ensuite toutes les propriétés connues de la polarité projective des coniques :

— toute droite est traversale d'un point ;
— les traversales de trois points alignés sont concourantes, et réciproquement ;
— une droite tangente à la conique est traversale du point de contact avec celle-ci ;
— un diamètre est traversale d'un point à distance infinie ;
— le centre de la conique a pour traversale la droite à l'infini du plan ;
— la conique induit sur toute droite du plan autre que ses tangentes une involution qui est hyperbolique si la droite rencontre la conique en deux points, et elliptique sinon ;
— si d'un point on peut mener deux tangentes à la conique, sa traversale est la droite reliant leurs points de contact avec celle-ci ;
— dans le cas général, la traversale d'un point se construit à partir d'un quadrilatère inscrit sur la conique.

La théorie de la traversale est fondée sur le résultat central du *Brouillon Project,* le *théorème d'involution de Desargues.* Rappelons pour commencer que si B, C, D, E sont quatre points coplanaires en position générale formant un quadrilatère, ils forment les *bornes* de celui-ci. Ses six diagonales ou *bornales* sont naturellement accouplées de la manière suivante : $(BC), (DE)$; $(BD), (CE)$; $(BE), (DC)$. Le théorème d'involution peut s'énoncer ainsi :

Théorème 1.1. — *Soient* $\mathcal{C}$ *une conique et* B, C, D, E *quatre points situés sur cette conique. Soit en outre* τ *une droite générique du même plan que* $\mathcal{C}$. *Si* τ *coupe les six bornales du quadrilàter* B, C, D, E *en six points accouplés* $I, K; P, Q; G, H$ *et la conique* $\mathcal{C}$ *en les points* L, M, *alors les points* $I, K; P, Q; G, H; L, M$ *sont en involution.*

2 Souches communes à plusieurs arbre et configurations de deux cercles

Nous commençons notre analyse du *Brouillon Project* à la ligne 37 de sa page 23. Desargues y considère des involutions induites par *deux* cercles, ou plutôt, du fait que l'on peut ajouter autant de couples de points que l'on veut dans une involution du fait de son agrégativité, par tout un *faisceau linéaire* de cercles. Il traite successivement le cas des involutions hyperboliques et des involutions elliptiques.

Supposons pour commencer que l'on se donne une droite ou tronc τ et supposons donnés deux couples de points $B, H; C, G$ d'un arbre de souche A de sorte que les deux segments [BH] et [CG] soient disjoints (*voir* la figure 1). On a donc $AB.AH = AC.AG$, et l'homographie involutive associée est hyperbolique. Traçons alors les deux cercles $\mathcal{C}_{BH}$ et $\mathcal{C}_{CG}$ de diamètres respectifs les segments [BH] et [CG]. La condition arboricole

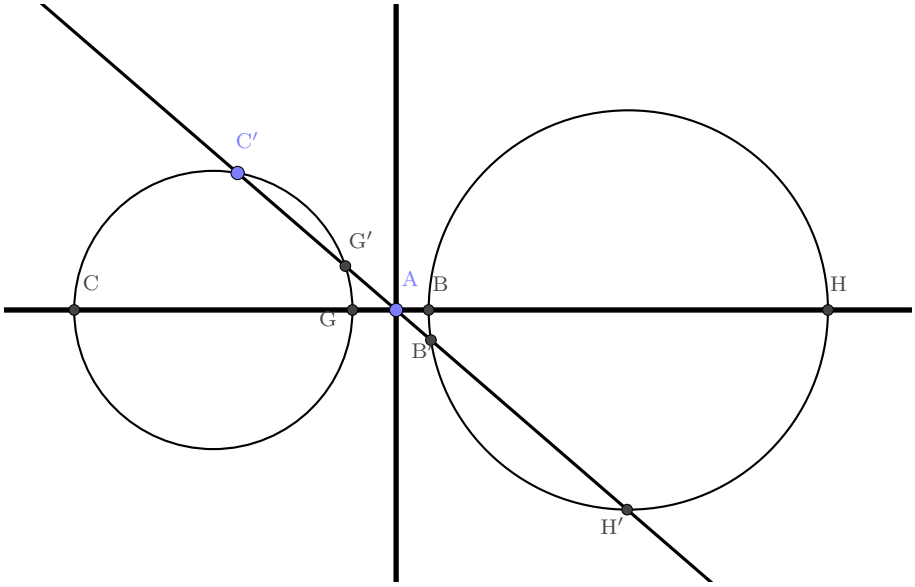

FIGURE 1 – Deux cercles de diamètres CG, BH et leur axe radical.

AB.AH = AC.AG peut se lire comme disant que puissances de A par rapport à ces deux cercles sont égales. Ainsi A est sur l'axe radical des deux cercles, ou du faisceau engendré par iceux. Soit maintenant τ' une droite quelconque passant par A et coupant le cercle $\mathcal{C}_{\mathrm{BH}}$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathrm{CG}}$) en les points B', H' (resp. C', G'). La proposition 35 du livre III des Éléments entraine alors que $\mathrm{AB}'.\mathrm{AH}' = \mathrm{AC}'\mathrm{AG}'$ et le point A est donc *souche commune à plusieurs arbres* [10]. Au vu de ce que Desargues a dit jusque là de l'involution, on peut comprendre qu'outre le fait qu'il y a pluralité d'arbres du fait de la posisbilité de choisir n'importe quelle droite passant par A, il entend bien le fait que l'on peut choisir n'importe quel autre couple de cercles basés sur des nœuds accouplés de l'involution définie sur τ. Comme pour le théorème d'involution qui est valable pour toutes les coniques du faisceau de celles passant par quatre bornes données, il raisonne ici sur une famille de cercles et non juste sur un seul.

Desargues écrit alors : « Outre qu'au lieu de cercles, il peut y avoir sur les mêmes pièces d'entre les deux mêmes de ces quatres nœuds C, G; B, H, deux quelconques autres coupes de rouleau [11] disposées en certaine façon que leurs bords opèrent la même chose que ceux des cercles évidemment, au moyen d'une ramée de cet arbre BH. » Cet énoncé assez mystérieux laisse penser qu'il s'agit de l'énoncé analogue pour deux coniques « semblables et semblablement engagées » pour reprendre la terminologie de Michel Chasles [12]. L'idée d'une construction de nature perspectiviste induite par la mention d'une ramée et menant à passer du cas de deux cercles à celui de deux coniques n'est pas sans rappeler ce qu'Oldenburg mentionne, dans sa lettre à Leibniz du 6 avril 1673, du contenu du traîté perdu de Desargues intitulé *Leçons de Ténèbres.* On pourra consulter à ce sujet la note [Eneström, 1902] de Gustaf Eneström, ou encore directement ladite

10. p. 23, l. 37-42
11. ou conique
12. Michel Chasles, *Géométrie de situation. Mémoire sur les propriétés de systèmes de sections coniques, situées dans un même plan,* Annales de mathématiques pures et appliqués, tome 18 (1827-1828), p. 277-301.

lettre, p. 87 & p. 88 de [Leibniz, 1899]. Il semblerait que Desargues y développe une manière de traiter ce sujet au moyen d'une projecction centrale d'une sphère vers l'un de ses plans tangents, depuis l'un de ses points intérieurs.

Aux lignes 48 à 58 de la page 23, il élabore sur le même cas, mais dit en termes d'involution plutôt que d'arbre et en tenant compte des nœuds moyens doubles. Soit toujours donné le tronc τ et supposons que H, G, B, F soient quatre points en involution (ils forment en particulier une division harmonique). Rappelons que l'on a deux possibilités pour cette configuration, selon le choix que l'on fait pour les nœuds moyens doubles. Nous pouvons considérer l'involution $B, H; G, G; F, F$, dont A (le milieu du segment $[GF]$) est la souche, et l'involution $B, B; H, H; F, G$, dont L (le milieu du segment $[BH]$) est la souche dite *réciproque* [13] de la précédente. Alors les cercles $\mathcal{C}_{FG}$ et $\mathcal{C}_{BH}$ coupent toute droite issue aussi bien de A que de L selon quatre points en involution dont l'arbre associé a pour souche le point A ou le point L. Comme pour le cas précédemment étudié, Desargues annonce que l'on peut généraliser ce résultat à un couple de coniques bien choisies.

La fin de ce passage est consacré au cas analogue construit sur la base d'une involution elliptique, c'est-à-dire à nœuds moyens simples plutôt que doubles [14]. Soit donc τ un tronc et $H, B; C, G; D, F$ des points en involution de sorte que C, G et D, F soient des couples de nœuds moyens simples, et B, H un couple de nœuds extrêmes. Les points D et G sont confondus, de même que F et C, et le point A, milieu de $[FG]$, est souche de l'arbre correspondant. Traçons maintenant le cercle $\mathcal{C}_{FG}$ de diamètre $[FG]$, donc de centre A, et le cercle $\mathcal{C}_{AB}$ de diamètre $[AB]$, *voir* la figure 2.

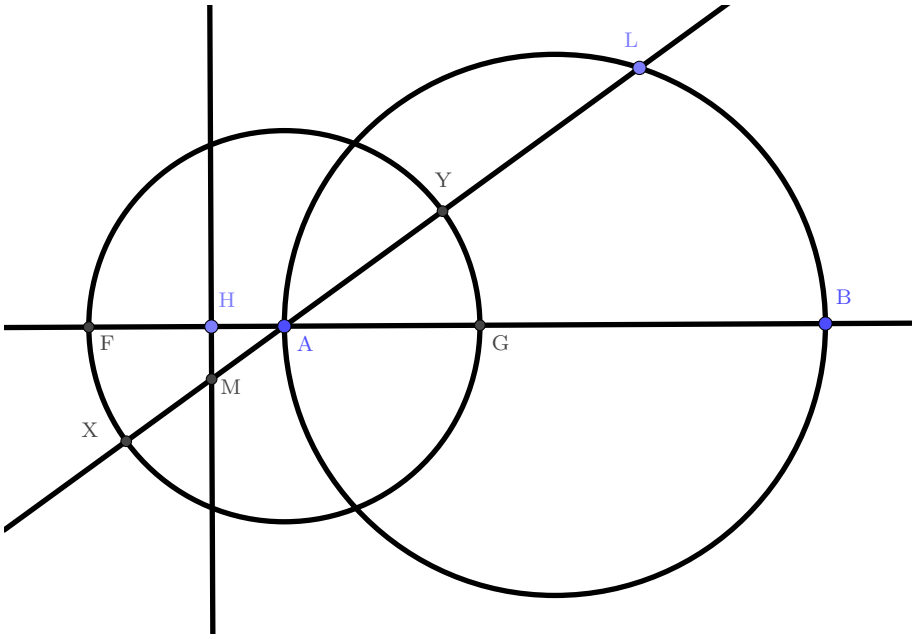

FIGURE 2 – Le deuxième cas : involution elliptique.

Soit ω_H la droite perpendiculaire à τ passant par H et soit δ une droite quelconque

13. p.9, l. 4
14. Cela découle de l'*engagement* de la souche A d'entre les nœuds F et F, *voir* p. 23, l. 60.

passant par A. Elle coupe $\mathcal{C}_{AB}$ en les points L et A, $\mathcal{C}_{FG}$ en les points X et Y, et enfin ω_H en M. Alors $X, Y; L, M$ sont des couples de nœuds d'un arbre de souche A. En effet $AG.AF = AH.AB$ et comme par ailleurs F, G et X, Y sont des couples de points diamètralement opposés sur le même cercle de centre A, on a aussi $AG.AF = AX.AY$. Mais les deux triangles AHM et ALB sont semblables étant tous deux rectangles et ayant un autre angle égal. Il en découle que

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AL}{AB}$$

et donc que $AH.AB = AL.AM$, ce qui démontre l'assertion de Desargues. Remarquons pour finir que si l'on trace le cercle $\mathcal{C}_{BH}$ de diamètre [BH], alors celui-ci coupe le cercle $\mathcal{C}_{CG}$ et que A est le pied de l'axe radical de ces deux cercles. On peut se poser la question de savoir pourquoi Desargues considère la droite ω_H perpendiculaire à τ en H plutôt que l'axe radical. La réponse se trouve bien avant dans le *Brouillon*, aux lignes 9 et suivantes de la page 9, où Desargues dit que H est *pour souche* aux deux couples de nœuds G, F et B, A. La construction est alors strictement similaire à celle faite dans le cas précédent basé sur une involution hyperbolique : la droite ω_H est l'axe radical des deux cerles $\mathcal{C}_{AB}$ et $\mathcal{C}_{FG}$. Ainsi une notion comme celle de nœud *pour souche,* qui semble au moment de son introduction quelque peu gratuite, est utilisée plus tard dans le texte.

Comme pour le cas précédent, Desargues mentionne une généralisation au cas de deux coniques, « dont une ramée fait voir la vérité ».

3 La théorie du paramètre

Dans la dernière partie du *Brouillon Project,* Desargues met en œuvre les outils qu'il a développés jusque là (l'involution, la traversale, les méthodes projectives) pour donner un rapide et élégant traitement de la théorie apollonienne du paramètre et des foyers. Cela lui permet en quelque sorte de justifier l'intérêt des méthodes nouvelles qu'il propose auprès de ses contemporains.

À la page 24, des lignes 16 à 39, il énonce un long théorème qu'il démontrera dans les pages suivantes. Il procède par spécialisations successives, en partant d'une conique coupée par une droite quelconque pour arriver à une conique coupée par un de ses diamètre, ce qui lui donnera une caractérisation du paramètre et enfin par à une conique coupée par son grand axe, ce qui lui permettra de retrouver rapidement les énoncés concernant les foyers. Nous allons séparer ce long énoncé en plusieurs propostions afin de faciliter la compréhension du *Brouillon* pour les lecteurs contemporains.

Donnons-nous une conique $\mathcal{C}$ et une droite τ [15] coupant la conique $\mathcal{C}$ en les points L et M. Soient B, C, D, E quatre points de la conique de sorte que (BC) soit parallèle à (DE). Nommons I l'intersection de (BC) avec τ et K celle de (DE) avec τ. Soit δ_L une droite quelconque passant par L et notons R, S les points d'intersection de δ_L avec (BC) et (DE) respectivement, *voir* la figure 3. La première proposition donnée par Desargues s'énonce ainsi :

15. Dans l'orginal : « Quand en un plan une droite PH, comme tronc *etc.* »

Proposition 3.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a l'égalité de rapports suivante :*

$$\frac{\mathrm{KS.KM}}{\mathrm{KD.KE}} = \frac{\mathrm{IR.IM}}{\mathrm{IC.IB}},$$

et Desargues qualifie le rectangle KS.KM *(resp.* KD.KE*) de* relatif *du rectangle* IR.IM *(resp.* IC.IB*).*

La très jolie symétrie de cette identité nous amène à l'interpréter ainsi : fixons une droite (BC) coupant la conique en B et C et la transversale τ en I. Alors, quelle que soit la droite (DE) parallèle à (BC), coupant $\mathcal{C}$ en D, E et τ en K, on a l'égalité de rapports ci-dessus.

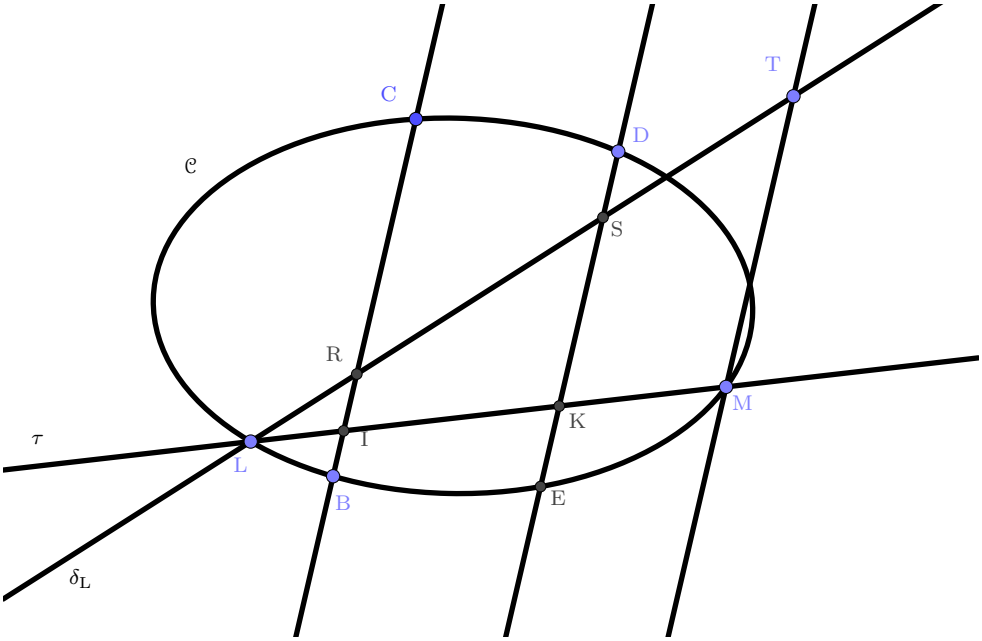

FIGURE 3 – La situation des deux premières propositions sur le paramètre

Supposons maintenant que la droite δ_L soit tracée de sorte que l'on ait $\mathrm{KS.KM} = \mathrm{KE.KD}$, égalité que l'on peut réécrire sous la forme $\mathrm{KS} = (\mathrm{KE.KD})/\mathrm{KM}$, dont le second membre est donné et ne dépend pas de δ_L. Soit par ailleurs ω_M la droite parallèle à (BC) passant par M et notons T son intersection avec δ_M.

Proposition 3.2. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a l'égalité de rapports suivante :*

$$\frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{KE.KD}} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MT}}.$$

La dernière proposition énoncée dans ce long passage introduit alors le paramètre :

Proposition 3.3. — *Supposons qu'outre les hypothèses faites jusqu'ici la droite τ soit un diamètre de $\mathcal{C}$ et que* (BC), (DE) *et ω_M en soient des ordonnées. Alors* MT *est le paramètre de la conique $\mathcal{C}$ eu égard au diamètre τ.*

Cette proposition ne sera en fait précisée et l'appellation de paramètre justifiée qu'après la démonstration des deux premières propositions, qui occupe les lignes 40 à 60 de la page 24.

Reprenons donc les hypothèses de la première proposition et rappelons qu'il s'agit de démontrer que

$$\frac{\mathrm{KS.KM}}{\mathrm{KD.KE}} = \frac{\mathrm{IM.IR}}{\mathrm{IC.IB}}.$$

Du fait du parallèlisme de (BC) et (DE), on a en effet

$$\frac{\mathrm{IL}}{\mathrm{IR}} = \frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{KS}}$$

et donc, bien évidemment :

$$\frac{\mathrm{IL.IM}}{\mathrm{IR.IM}} = \frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{KS.KM}}. \tag{1}$$

Notons P et Q les intersections respectives des deux autres bornales (BE) et (DC) du quadrangle BCDE avec la transversale τ. D'après le théorème d'involution de Desargues [16], les points P, Q; L, M; I, K forment une involution et donc

$$\frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{KQ.KP}}{\mathrm{IQ.IP}}.$$

Or Desargues a démontré plus haut [17] dans le *Brouillon* que, dans le cas où deux bornales sont parallèles, on a aussi

$$\frac{\mathrm{KQ.KP}}{\mathrm{IQ.IP}} = \frac{\mathrm{KD.KE}}{\mathrm{IC.IB}}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{KD.KE}}{\mathrm{IC.IB}}.$$

En alternant dans l'identité 1 on tire

$$\frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{KS.KM}}{\mathrm{IR.IM}}$$

d'où suit que

$$\frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{KD.KE}}{\mathrm{IC.IB}} = \frac{\mathrm{KS.KM}}{\mathrm{IR.IM}}$$

soit, en alternant :

$$\frac{\mathrm{KS.KM}}{\mathrm{KE.KD}} = \frac{\mathrm{IR.IM}}{\mathrm{IC.IB}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si maintenant on suppose en plus que $\mathrm{KS.KM} = \mathrm{KE.KD}$, alors il vient immédiatement que

$$\mathrm{IR.IM} = \mathrm{IC.IB}.$$

16. p. 16, l. 56-61
17. p. 17, l. 32-36

On a donc

$$\frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{KE.KD}} = \frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{KS.KM}} = \frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{KS}}.$$

Or, du fait du parallèlisme de DE et BC,

$$\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{KS}} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MT}}$$

et donc

$$\frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{KE.KD}} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MT}},$$

ce qui démontre la deuxième proposition.

Desargues revient alors, p. 24 l. 61, à la troisième proposition, dont il dit qu'elle est évidente sans préciser outre mesure. On peut essayer de comprendre pourquoi il insiste sur cette evidence. Supposons que l'on place l'ordonnée ED de sorte qu'elle passe par le centre K de la conique. Alors de la deuxième proposition on tire

$$\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MT}} = \frac{\mathrm{KL.KM}}{\mathrm{KE.KD}},$$

ce qui, du fait que τ est un diamètre et que BC, DE etc. sont ses ordonnées, donne

$$\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MT}} = \frac{\mathrm{KM}^2}{\mathrm{KD}^2},$$

soit encore

$$\mathrm{MT} = \mathrm{ML}.\frac{\mathrm{KD}^2}{\mathrm{KM}^2} = 2\mathrm{KM}\frac{\mathrm{KD}^2}{\mathrm{KM}^2} = 2\frac{\mathrm{KD}^2}{\mathrm{KM}}.$$

Ainsi, lorsque τ est un grand axe de la conique, MT est égal à deux fois le carré du demi grand-axe divisé par le demi petit-axe, ce qui est une définition classique du paramètre.

Il va cependant préciser tout cela après un *a parte* sur les droites parallèles et les points à l'infini, où il se libère complètement des précautions faites au début du *Brouillon Project* concernant les *buts d'ordonnances* qui deviennent ici de véritables *points* à distance infinie :

« De ce qui est dit ci-devant on aura conçu que pour mener d'un quelconque point une droite d'une même ordonnance avec deux parallèles entre elles, cela s'entend que cette droite soit menée aussi parallèle à ces deux, & de même que pour mener d'un quelconque point une droite à un point à distance infinie en une autre droite, cela s'entend qu'il faut mener cette droite parallèle à celle où le point assigné est à distance infinie. »

Conscient sans doute qu'il n'a pas donné tous les éléments permettant de convaincre ses lecteurs qu'il a bien défini le paramètre d'une conique, Desargues se ravise et va donner une théorie concise mais complète du paramètre des lignes 8 à 56 de la page 25, en commençant par la phrase suivante :

« Encore que ce qui suit paraoisse évidemment des choses cy devant demonstrées, neantmoins : »

Il change le lettrage des points : soit $\mathcal{C}$ une conique, δ un de ses diamètres, coupant $\mathcal{C}$ en E et C, et passant par son centre 7. Traçons les ordonnées respectives ω_{E}, ω_7 et ω_{C},

de sorte que ω_{E} et ω_{C} sont des tangentes à la conique, et que ω_7 est le diamètre conjugué de δ. Traçons sur ω_{E} le paramètre EF de $\mathcal{C}$ eu égard au diamètre δ.

Desargues donne, dans les *Advertissements*, un moyen simple de construire ce paramètre à la règle et au compas, qu'il demande de rajouter après la ligne 26. En voici le détail : traçons, par E, la bissectrice β de l'angle $\widehat{\mathrm{CEB}}$. Cette bissectrice coupe $\mathcal{C}$ en E et en un autre point V, qui est sur une ordonnée ω_{W} de δ. La droite (CV) coupe alors ω_{E} en le point F recherché. En effet, comme (WV) est parallèle à (EF), les angles $\widehat{\mathrm{EVW}}$ et $\widehat{\mathrm{WEV}}$ sont égaux et donc $\mathrm{WV} = \mathrm{WE}$. Il en découle que

$$\frac{\mathrm{WE.WC}}{\mathrm{WV.WV}} = \frac{\mathrm{WC}}{\mathrm{WV}},$$

et le second membre, d'après le théorème de Thalès, est égal à EF/EC. Ainsi a-t-on

$$\mathrm{EF} = \mathrm{EC}.\frac{\mathrm{WV}}{\mathrm{WC}}$$

et donc EF est bien le paramètre d'après la définition qu'en donne Apollonius.

Revenons au corps principal du texte et prenons un point L sur $\mathcal{C}$ par lequel nous faisons passer la tangente τ_{L}. Celle-ci coupe les ordinales ω_{E} et ω_{C} en les points B et D. La proposition suivante est énoncée après sa démonstration [18], et donne la définition recherchée par Desargues du paramètre :

Proposition 3.4. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on a l'égalité suivante :*

$$\mathrm{EB.CD} = \frac{1}{4}\mathrm{EC.EF},$$

et le second membre est indépendant du point L *choisi sur la conique.*

Complétons les données de la proposition ci-dessus par des points et droites qui nous serons utiles. Traçons par L l'ordonnée ω_{I} eu égard au diamètre δ. Celle-ci coupe $\mathcal{C}$ en L mais aussi en un autre point M. Les tangentes $\tau_{\mathrm{L}}, \tau_{\mathrm{M}}$ et le diamètre δ sont concourantes en un point A. Posons enfin $\tau_{\mathrm{M}} \cap \omega_{\mathrm{E}} = \mathrm{N}$, $\tau_{\mathrm{M}} \cap \omega_7 = \mathrm{O}$ et $\tau_{\mathrm{M}} \cap \omega_{\mathrm{C}} = \mathrm{H}$.

Les quatre ordonnées $\omega_{\mathrm{E}}, \omega_{\mathrm{I}}, \omega_7$ et ω_{C} sont de même ordonnance, avec un but à l'infini. Par construction, $(\mathrm{LM}) = \omega_{\mathrm{I}}$ est traversale du point A eu égard à $\mathcal{C}$ et donc $\mathrm{E}, \mathrm{E}; \mathrm{C}, \mathrm{C}; \mathrm{I}, \mathrm{A}$ sont des couples de nœuds d'une involution. Comme 7 est le milieu du segment des nœuds moyens doubles E et C, il est souche de l'arbre correspondant.Cela entraîne que $\mathrm{E}, \mathrm{C}; \mathrm{I}, \mathrm{A}$ est une division harmonique et donc, par les propriétés générales des arbres, A est souche d'un arbre dont $\mathrm{E}, \mathrm{C}; 7, \mathrm{I}$ sont des couples de nœuds.

Par une ramée au but des ordonnées, A est aussi souche d'un arbre dont $\mathrm{B}, \mathrm{D}; \mathrm{L}, \mathrm{R}$ sont des couples de nœuds, et d'un autre arbre encore dont $\mathrm{N}, \mathrm{H}; \mathrm{L}, \mathrm{O}$ sont des couples de nœuds [19]. On a donc $\mathrm{A7.AI} = \mathrm{AE.AC}$, soit encore

$$\frac{\mathrm{A7}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AI}}.$$

18. p. 25, l. 54
19. p. 25, l. 29

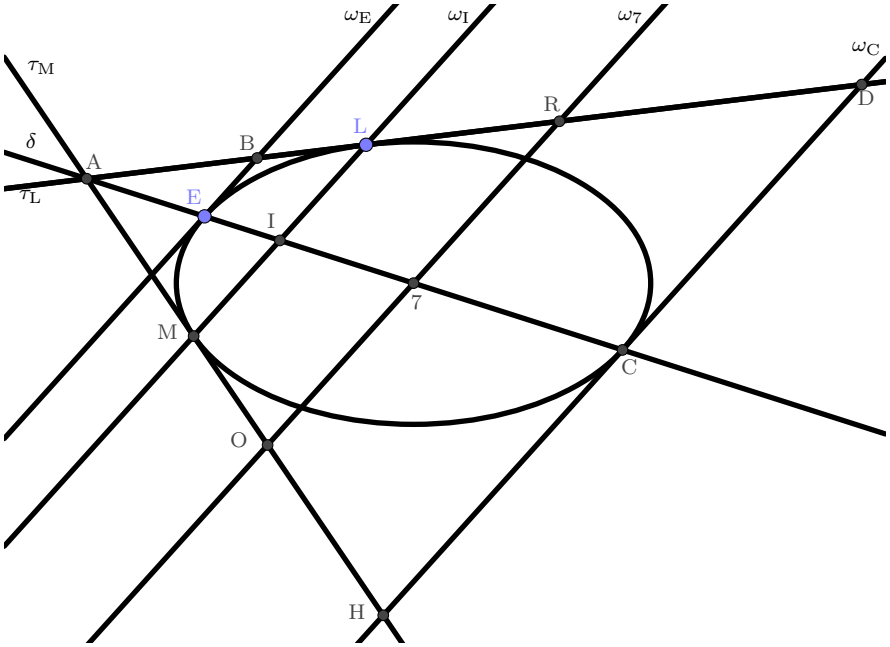

FIGURE 4 – La situation de la quatrième proposition.

D'après le théorème de Thalès, on a en outre

$$\frac{A7}{AE} = \frac{7R}{EB} \text{ et } \frac{AC}{AI} = \frac{CD}{IL},$$

d'où l'on tire

$$\frac{7R}{EB} = \frac{CD}{IL},$$

soit finalement

$$7R.IL = EB.CD. \tag{2}$$

Desargues énumère ensuite [20] toute une série d'identités de rapports qui sont conséquences du théorème de Thalès :

$$\frac{CD}{CH} = \frac{7R}{7O} = \frac{IL}{IM} = \frac{EB}{EN}$$

et

$$\frac{AL}{AD} = \frac{A7}{AR} = \frac{AI}{AL} = \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} \text{ etc.}$$

On a bien évidemment [21] :

$$\frac{A7.AI}{AI.AI} = \frac{A7}{AI}$$

et donc, A étant souche de l'arbre $E, C; 7, I$, on peut appliquer ce qui est énoncé plus haut dans le *Brouillon* [22], qui dans ce cas nous donne

$$\frac{A7}{AI} = \frac{7E.7C}{IC.IE}.$$

20. p. 25, l. 31-33
21. p. 25, l. 34
22. p.4, l. 7

Or d'après le théorème de Thalès on a aussi

$$\frac{\mathrm{A7}}{\mathrm{AI}} = \frac{\mathrm{7R}}{\mathrm{IL}}$$

et bien-sûr

$$\frac{\mathrm{7R}}{\mathrm{IL}} = \frac{\mathrm{7R.IL}}{\mathrm{IL.IL}} = \frac{\mathrm{7R.IL}}{\mathrm{IL.IM}}$$

car, δ étant un diamètre, $\mathrm{IL} = \mathrm{IM}$. On peut donc en conclure que

$$\frac{\mathrm{A7.AI}}{\mathrm{AI.AI}} = \frac{\mathrm{7R.IL}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{7E.7C}}{\mathrm{IC.IE}}$$

soit, « en changeant [23] » :

$$\frac{\mathrm{7C.7E}}{\mathrm{7R.IL}} = \frac{\mathrm{IC.IE}}{\mathrm{IL.IM}}.$$

En utilisant l'identité 2, on obtient

$$\frac{\mathrm{7E.7C}}{\mathrm{EB.CD}} = \frac{\mathrm{IC.IE}}{\mathrm{IL.IM}}.$$

Comme EF est le paramètre de $\mathcal{C}$ eu égard au diamètre δ, on a également

$$\frac{\mathrm{IC.IE}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EF}},$$

et comme δ est un diamètre et que 7 est le centre de la conique, on a par ailleurs

$$\frac{\mathrm{7E.7C}}{\mathrm{EB.CD}} = \frac{(1/4)\mathrm{EC}^2}{\mathrm{EB.CD}},$$

d'où suit que

$$\mathrm{EB.CD} = \frac{1}{4}\mathrm{EC.EF},$$

ce qui démontre la quatrième proposition et achève le développement de la théorie du paramètre dans le *Brouillon Project.* Il note dans les *Advertissements* que celui-ci n'est finalement qu'un cas (troisième proposition) d'un cas (deuxième proposition) d'un cas (première proposition), sans préciser de quoi il est ainsi un cas : il s'agit du théorème d'involution bien-sûr, faisant que la théorie apollonienne du paramètre, comme celle des diamètres, s'insère dans la théorie arguésienne générale de la traversale.

4 La théorie des foyers

À partir de la ligne 57 de la page 25, Desargues va brièvement développer la théorie des foyers, dans la foulée de celle du paramètre.

Les données sont les mêmes que celles de la proposition 3.4, avec l'hypothèse supplémentaire que δ est le *grand axe* de la conique. Traçons le cercle $\mathcal{D}$ de diamètre [BD]. D'après le théorème de Thalès, son centre est au point R d'intersection de l'ordonnée ω_7 avec la droite (BD). Il coupe le grand axe δ en les points P et Q. Desargues énonce p. 25, l. 61 :

23. p.25, l. 40

Proposition 4.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, on à l'identité suivante :*

$$\mathrm{PE.PC} = \frac{1}{4}\mathrm{EC.EF}.$$

La démonstration n'est pas donnée par Desargues. Elle est en effet très simple et la voici : comme [BD] est diamètre du cercle $\mathcal{D}$ et que Q est sur ce cercle, l'angle $\widehat{\mathrm{BQS}}$ est droit. Comme δ est grand axe, ses ordonnées $\omega_{\mathrm{E}} = (\mathrm{EB})$ et $\omega_{\mathrm{C}} = (\mathrm{CD})$ y sont perpendiculaires. On a donc $\widehat{\mathrm{CQD}} = \widehat{\mathrm{EBQ}}$ et les deux triangles rectangles BQE et CQD sont semblables. De même, BPE et PDC sont semblables et ainsi

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EB}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{PC}}$$

soit $\mathrm{PE.PC} = \mathrm{EB.CD}$. D'après la proposition 3.4, le second membre est égal à $(1/4)\mathrm{EC.EF}$, ce qui démontre la proposition.

Il écrit ensuite[24] que ces deux points P et Q sont les *foyers de la conique* car ils satisfont en outre aux propositions suivantes :

Proposition 4.2. — *Sous les hypothèses faites ci-dessus,* $\mathrm{EC} = \mathrm{PL} + \mathrm{LQ}$.

Proposition 4.3. — *Sous les hypothèses faites ci-dessus, la tangente à la conique en* L *est bissectrice de l'angle* QLP.

Dans son analyse du *Brouillon Project* [Zacharias, 1941], que René Taton reprend textuellement dans [Taton, 1951], Max Zacharias affirme que ces énoncés découlent d'un dictionnaire savant avec une proposition assez compliquée portant sur le cercle énoncée et démontrée plus haut dans le *Brouillon,* de la ligne 49 de la page 18 à la ligne 32 de la page 20. Notre thèse est toute autre, et se base sur une lecture alternative de ce court passage sur les foyers.

En voici l'intégralité :

« Et par une converse évidente de ce qui a été démontré, quand la diamétrale comme E7C, est le grand des essieux de la figure, le brin comme BD, est diamètre d'un cercle dont la circonférence passe en deux points comme Q, & P, de façon que le rectangle des pièces de cette diamétrale E7C, contenues entre le quelconque de ces points P, & chacun des points comme E, & C, qu'y donne le bord de la figure, est encore égal au quart du rectangle EC, EF, la pièce comme EC, est égale à la somme ou à la différence des deux droites menées du point d'attouchement comme L, à chacun de ces points comme P, & Q, à savoir à la somme ou différence des deux droites menées comme LP, LQ, & la touchante LD, mypartit un des angles que ces deux droites menées comme QP, PL, font entre elles.

C'est à dire, que ces deux points comme Q, & P, sont les points nommés *Nombrils, Bruslans,* ou *foyerz,* de la figure. »

La question est de savoir pourquoi Desargues commence sa phrase par les mots « Et par une converse évidente » et de savoir ce que l'on déduit de cette converse. « Ce qui a été démonstré » renvoie d'après nous à la proposition 4.1. Sa converse, évidente,

24. p. 26, l. 1-6

est en fait le contenu le la proposition 45 du livre III des *Coniques* d'Apollonius, qui nous dit, en reprenant les notations de Desargues, que si $\mathrm{PE.PC} = (1/4)\mathrm{EC.EF}$, alors P est intersection du cercle de diamètre [BD] avec le grand axe. La démonstration de cette proposition est très facile et repose sur des considérations de triangles semblables. Que les points P et Q construits ainsi soient les foyers de la conique, c'est-à-dire satisfont aux propositions 4.2 et 4.3, est alors la contenu des propositions 46 à 52 du même livre III, dont les démonstrations sont toutes très simples.

Nous sommes donc convaincus que Desargues entend en fait que sa proposition 4.1 est la réciproque de la proposition 45 du livre III des *Coniques*, qu'il qualifie d'évidente, et dont les conséquences sont que les points qu'il construit sont bien les foyers de la conique.

5 L'hyperbole et l'emploi des éléments à l'infini

Des lignes 7 à 37 de la page 26, Desargues va brièvement étudier l'hyperbole. Ses preuves y sont extrêment concises et, à notre connaissance, aucun auteur n'a réellement essayé de les comprendres. Nous verrons que cela est sans doute dû au fait que l'on ne peut les appréhender que si l'on admet que Desargues y raisonne de manière résolument projective, en considérant des configurations de points sur la droite à l'infini.

Soient $\mathcal{C}$ une hyperbole de centre 7 et δ l'un de ses diamètre, coupant $\mathcal{C}$ aux points E, C. Soient τ_{E} la tangente en E et τ_{C} celle en C. Notons en outre α, α' les deux asymtptotes de l'hyperbole; elles rencontrent τ_{E} en les points respectifs X et Y, et τ_{C} en les points respectifs Z et K. Soit L un point quelconque pris sur l'hyperbole et notons τ_{L} la tangente en L, qui rencontre τ_{C} en D et τ_{E} en B. La droite τ_{L} rencontre en outre le diamètre δ au point A et notons τ_{M}, où M est sur l'hyperbole, l'autre tangente passant par A. La droite (LM) est donc la traversale de A eu égard à $\mathcal{C}$. Notons I le point traversal de l'ordonnée δ de cette traversale (LM), S le point de rencontre entre (LM) et α et T le point de rencontre entre (LM) et α'.

Comme nous l'avons déjà noté, (LM) est la traversale de A eu égard à $\mathcal{C}$ et donc $\mathrm{A}, \mathrm{I}; \mathrm{E}, \mathrm{E}; \mathrm{C}, \mathrm{C}$ forment une involution. Comme 7 est milieu du segment des nœuds moyens doubles, il est accouplé au point à l'infini sur le tronc ou ordonnée δ.

Comme δ est un diamètre, on a $\mathrm{IL} = \mathrm{IM}$ et Desargues énonce [25] qu'outre cette égalité, on a également $\mathrm{IS} = \mathrm{IT}, \mathrm{LS} = \mathrm{MT}$ et $\mathrm{MS} = \mathrm{LT}$, ce qu'il déclare être évident « au moyen d'une ramée [26]. » Voici comment on peut entendre cette affirmation. Notons Δ la droite « dont tous les points sont à distance infinie [27] » et donnons des noms aux points à l'infini des droites suivantes : S_∞ celui de α, T_∞ celui de α', I_∞ celui de δ et I'_∞ celui de (LM). D'après ce que Desargues écrit p. 23, lignes 10 à 15, $\mathcal{C}$ rencontre Δ en les points S_∞ et T_∞ en lesquels elle admet pour tangentes les asymptotes α et α'. D'après le théorème d'involution appliqué à la droite à l'infini Δ, les points $\mathrm{S}_\infty, \mathrm{S}_\infty; \mathrm{T}_\infty, \mathrm{T}_\infty; \mathrm{I}_\infty, \mathrm{I}'_\infty$ forment une involution. Par ailleurs et comme $\delta = \mathrm{EC}$ est un diamètre, les droites $\tau_{\mathrm{E}}, \tau_{\mathrm{C}}$ sont parallèles, tandis que (LM), ordonnée du même diamètre, leur est aussi parallèle. Ainsi $\tau_{\mathrm{E}}, \tau_{\mathrm{C}}$ et (LM) sont parallèles, c'est-à-dire d'une

25. p. 26, l. 10-13
26. p. 26, *Advertissements* pour la ligne 13.
27. p. 16, *Advertissements* pour la ligne 3.

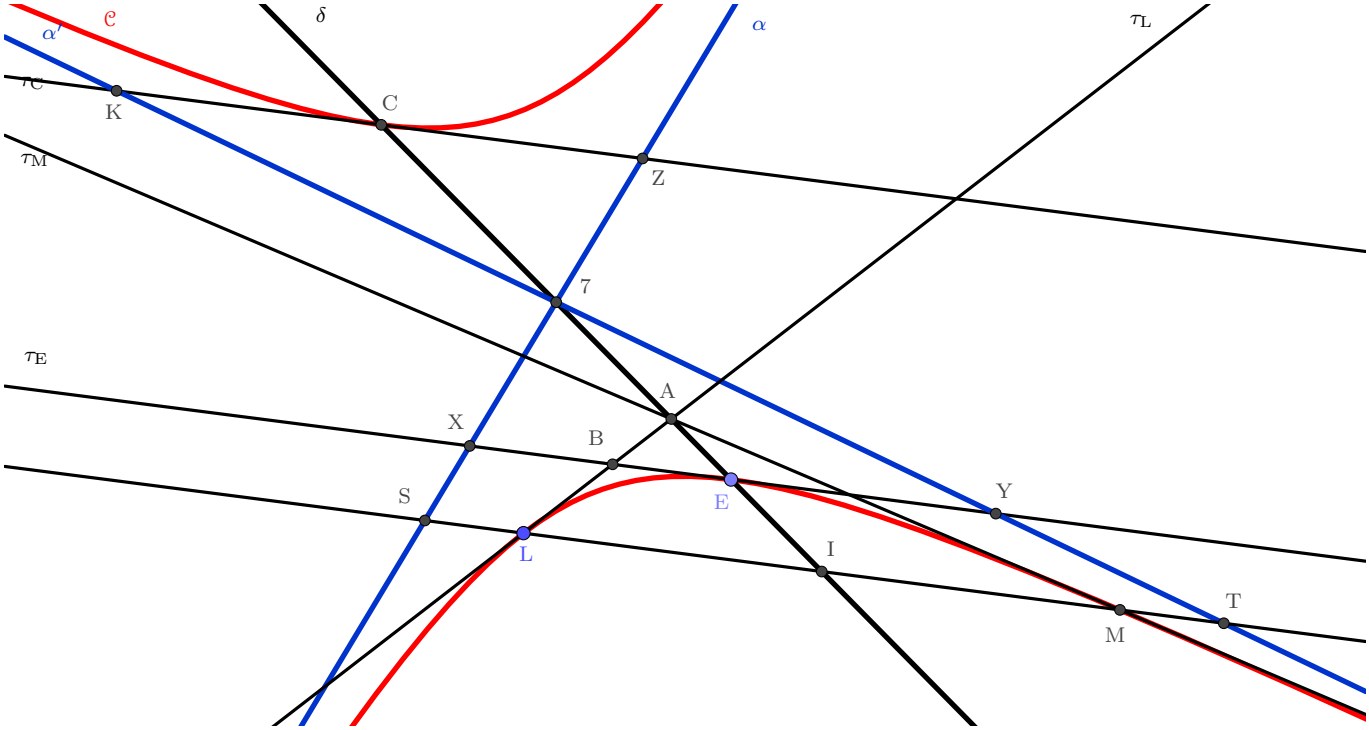

FIGURE 5 – L'hyperbole considérée par Desargues.

même ordonnance dont le but est à l'infini en le point que nous avons noté I'_∞. Par une ramée de sommet 7 de Δ vers la droite (LM), il en découle que $I, I'_\infty; S, S; T, T$ forment une involution et donc que I est milieu de [ST]. Ainsi $IS = IT$ et les deux autres égalité énoncées par Desargues en découlent immédiatement.

La phrase suivante [28] poursuit dans cette veine purement projective et donc tout à fait révolutionnaire :

« Et ensuite, que le rectangle des pièces d'une diamétrale E7C, contenues entre son ordonnée des atouchements à la figure par ces asymptotes à distance infinie, & chacun des points comme E, & C, qu'y donne le bord de la figure est au rectangle des brins déployés de cette ordonnée ainsi à distance infinie contenus entre cette diamétrale E7C & les deux points qu'y donne le bord de la figure, en même raison que le rectangle comme IE, IC est au rectangle comme IL, IM » etc.

Les attouchements en l'infini, ce sont les points S_∞, T_∞. Leur ordonnée, eu égard ici au diamètre choisi δ, c'est donc la droite S_∞, T_∞, c-à-d. la droite à l'infini Δ. Le « rectangle des pièces d'une diamétrale E7C » désigne donc le rectangle $I_\infty E.I_\infty C$. Les « brins déployés de cette ordonnée ainsi à distance infinie » sont alors les brins de la droite à l'infini $I_\infty S_\infty, I_\infty T_\infty$, qui sont bien déployés au tronc δ. Desargues affirme donc dans les lignes citées ci-dessus que l'on a l'identité suivante :

$$\frac{I_\infty E.I_\infty C}{I_\infty S_\infty.I_\infty T_\infty} = \frac{IE.IC}{IL.IM}.$$

En effet, si l'on note comme plus haut EF le paramètre de la conique eu égard au

28. p/ 26, l. 14-22

diamètre δ, on a

$$\frac{\mathrm{IE.IC}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EF}},$$

et le deuxième membre ne dépend pas du choix de L, ou plutôt de I, qui définit de manière univoque L et M. Il suffit alors de remarquer que quand I tend vers I_∞, alors L tend vers S_∞ et M vers T_∞, justifiant l'identité ci-dessus. En termes modernes, elle est conséquence de la continuité du birapport dans le plan projectif. Desargues poursuit en rappelant qu'on a également démontré que

$$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{7E.7C}}{\mathrm{EX.CZ}}.$$

Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\mathrm{E7}}{\mathrm{EX}} = \frac{\mathrm{I7}}{\mathrm{IS}}, \text{ et donc } \frac{\mathrm{E7}^2}{\mathrm{EX}^2} = \frac{\mathrm{I7}^2}{\mathrm{IS}^2}$$

et, comme $\mathrm{7E} = \mathrm{7C}$ et $\mathrm{EX} = \mathrm{CZ}$, on peut conclure que [29]

$$\frac{\mathrm{E7}^2}{\mathrm{EX}^2} = \frac{\mathrm{I7}^2}{\mathrm{IS}^2} = \frac{\mathrm{7E.7C}}{\mathrm{EX.CZ}} = \frac{\mathrm{IC.IE}}{\mathrm{IL.IM}}.$$

Il invoque alors la proposition 6 du livre II des *Éléments* d'Euclide pour dire que

$$\mathrm{IE.IC} + \mathrm{E7}^2 = \mathrm{I7}^2$$

et

$$\mathrm{LS.LT} + \mathrm{IM}^2 = \mathrm{IS}^2.$$

De l'identité

$$\frac{\mathrm{I7}^2}{\mathrm{IS}^2} = \frac{\mathrm{IC.IE}}{\mathrm{IL.IM}} = \frac{\mathrm{IE.IC}}{\mathrm{IM}^2}$$

on peut alors tirer

$$\frac{\mathrm{I7}^2}{\mathrm{IS}^2} = \frac{\mathrm{I7}^2 - \mathrm{IE.IC}}{\mathrm{IS}^2 - \mathrm{IM}^2} = \frac{\mathrm{7E}^2}{\mathrm{LT.SL}}.$$

Comme par ailleurs

$$\frac{\mathrm{I7}^2}{\mathrm{IS}^2} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EF}}$$

on peut conclure finalement que $\mathrm{LT.SL} = \mathrm{7E}^2.(\mathrm{EF}/\mathrm{EC})$, et 7 étant milieu de EC, nous obtenons finalement [30] l'identité

$$\mathrm{LT.SL} = \frac{1}{4}\mathrm{EF.EC},$$

ce qui achève sa brève étude de l'hyperbole.

Desargues évoque ensuite les diverses possibilités pour deux cônes de se contenir ou de se toucher, précisant les diverses conclusions que l'on peut en tirer sur leurs sections

29. p. 26, l. 23-25
30. p. 26, l. 33-37

coniques respectives. C'est sans aucun doute un prolongement de ses précocuppation décrites dans la section sur les souches communes à plusieurs arbres, *voir* plus haut. Il propose ensuite, de manière vague mais juste, une extension de la théorie des traversales, ou de la polarité, aux massifs « qui ont rapport à la boule comme l'ellipse au cercle, » autrement dit les quadriques. Comme il ne s'étend pas sur ce sujet, nous laissons cet aspect de côté et passons à l'analyse de la dernière partie du *Brouillon Project* contenant des propositions et leurs preuves.

6 Perspective et foyers

Nous allons maintenant examiner la dernière portion du *Brouillon Project* au contenu strictement mathématique. Desargues y aborde des questions qui sont à la fois dans la tradition apollinienne et dans la continuité de ses préocuppations pour la perspective. Ce développement est assez long, puisqu'il court de la ligne 8 de la page 27 à la ligne 6 de la page 29 et, comme souvent, on n'en comprend le but qu'à la toute fin. C'est là en effet qu'il énonce la conséquence principale de tout ce long développement, à savoir la proposition suivante, à laquelle nous allons donner le statut de théorème :

Théorème 6.1. — *Soient $\mathcal{C}$ une conique d'un plan $\mathcal{P}$, δ une droite coupant la conique en deux points, et X un point de δ qui ne soit pas sur la conique. Alors il existe un point θ hors de $\mathbf{P}$ et un plan $\mathbf{P}'$ qui coupe le cône de base $\mathcal{C}$ et de sommet θ selon une conique $\mathcal{C}'$ dont l'un des* foyers *soit l'image par perspective depuis le sommet θ du point X et dont le grand axe soit l'image par perspective depuis le sommet θ de la droite δ.*

La démonstration de ce théorème passe par celle de quelques lemmes et est longue et technique. Nous allons en donner pour commencer un court résumé, afin de permettre au lecteur qui ne voudrait pas s'attarder sur les détails d'en avoir une idée assez précise.

Donnons-nous F un autre point sur δ et à l'intérieur de la conique. Soit Δ la polaire de F eu égard à $\mathcal{C}$ qui, de la sorte, ne coupe par la conique. La droite Δ coupe la droite δ en un point A et l'on choisit alors un point Q sur δ qui soit un conjugué harmonique du couple A, F. Ainsi les couples $A, F; X, X; Q, Q$ forment une involution dont X et Q sont des nœuds moyens doubles. Soit P le milieu du segment $[XQ]$ et soit 7 le centre de la conique $\mathcal{C}$. La droite $(7P)$ coupe la droite Δ en un point C. Traçons par A l'une des tangentes à $\mathcal{C}$ et notons H le point de contact de cette tangente avec la conique ; traçons la droite (FH) et notons D son point d'intersection avec Δ. Donnons-nous enfin un autre couple R, Z de nœuds de l'involution ci-dessus, traçons par Z une tangente à $\mathcal{C}$, qui coupe Δ en un point B. Du point de contact G de cette même tangente menons la droite GR qui va couper Δ en un point E.

Le résultat central de tout ce passage est que les points $A, D; B, E$ sont des couples de nœuds d'un arbre de souche C, soit donc que l'on a l'identité de rectangles $CA.CD = CE.CB$. Remarquons au passage que si $\mathcal{C}$, X, δ et F sont donnés de position, alors toute la construction peut se faire à la règle et au compas.

Passons maintenant à la construction perspectiviste et donnons-nous un plan $\mathcal{P}_0$ passant par Δ et différent du plan contenant $\mathcal{C}$. Traçons dans ce plan la droite Λ passant par C et perpendiculaire à Δ. L'arbre $C; A, D; B, E$ donne naissance à un involution qui

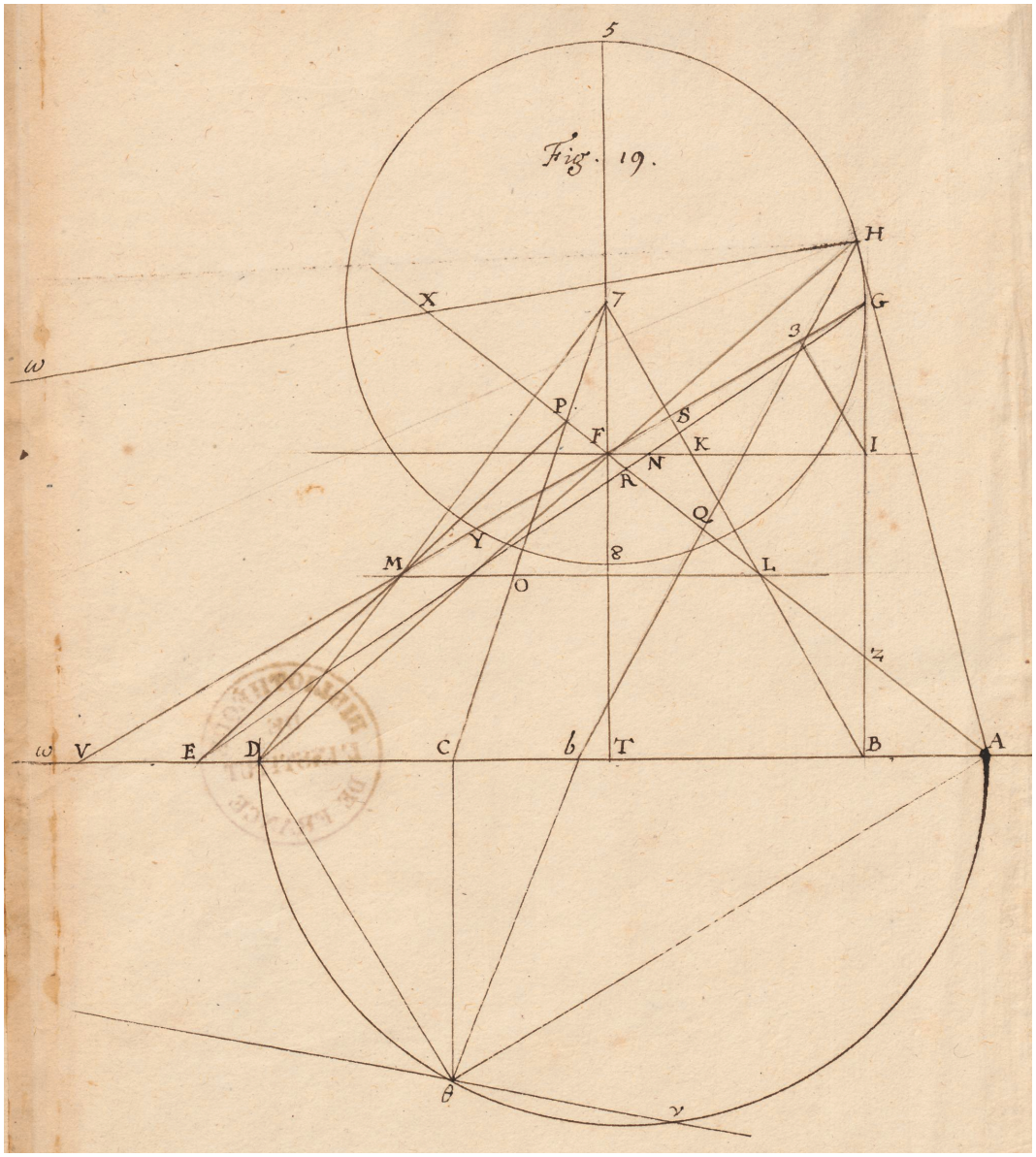

FIGURE 6 – La figure de la Hire illustrant la construction de Desargues.

elle aussi a des nœuds doubles ; nommons W l'un d'entre eux. Dire que c'est un nœud double signifie que $\mathrm{CW}^2 = \mathrm{CA.CD} = \mathrm{CE.CB}$, soit encore que

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CW}} = \frac{\mathrm{CW}}{\mathrm{CD}}.$$

Ainsi CW est moyenne proportionnelle de CA et CD. Or la proposition 13 du livre VI des *Éléments* d'Euclide permet de construire une telle moyenne proportionnelle : traçons dans $\mathcal{P}_0$ un demi-cercle de diamètre AD et nommons θ le point d'intersection de ce demi-cercle avec Λ : $\mathrm{C}\theta$ est la moyenne proportionnelle recherchée, et Desargues affirme que θ est le sommet du cône de base $\mathcal{C}$ recherché pour finir sa construction. Soit en effet $\mathcal{P}'$ un plan parallèle à $\mathcal{P}_0$ mais ne passant pas par θ. Il va couper le cône

de sommet θ et de base $\mathcal{C}$ selon une conique $\mathcal{C}'$ qui est une vue en perspective de la conique $\mathcal{C}$. Les vues des points X et Q dans cette même perspective sont les points X′, Q′ intersections des droites (θX) et (θQ) avec le plan Q′. Desargues affirme que ces deux points *sont les foyers de la coniques* $\mathcal{C}'$.

Nous reproduisons, au sujet de cette très belle construction, la figure 19 de la copie manuscrite du *Brouillon Project* faite par Philippe de la Hire, voir la figure 6. Sur celle-ci, la conique $\mathcal{C}$ est représentée par le cercle en haut de la figure, et le demi-cercle du bas de la même figure est à comprendre comme tracé sur le plan incliné $\mathcal{P}_0$.

6.1 La construction d'un arbre dans le plan de la conique

Soient $\mathcal{C}$ une conique, F un point pris hors de la conique et Δ la traversale de F eu égard à $\mathcal{C}$. Soit A un point sur Δ et traçons la droite $\delta = (AF)$. Soient deux points X, Q sur δ tels que A, F; X, X; Q, Q forment une involution [31]. Ainsi A, F; X, Q est une division harmonique. Soit 7 le centre de la conique. La droite (7F) est donc un diamètre et l'une des ordonnées de la traversale Δ, son point traversal sera noté T et ses points d'intersection avec la conique 5 et 8. Soit H le point de contact d'une des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A, tangente que nous noterons τ_H. Soit D le point traversal de l'ordonnée (HF). Soit P le milieu du segment [XQ] et notons C le point de rencontre entre (7P) et Δ. Soit R, Z un autre couple de nœuds de l'involution A, F; X, X; Q, Q, de sorte que par Z on puisse tracer une tangente τ_G à la conique. Notons B l'intersection de τ_G avec Δ, E celle de (GR) et Δ, et V le point traversal de l'ordonnée (GF).

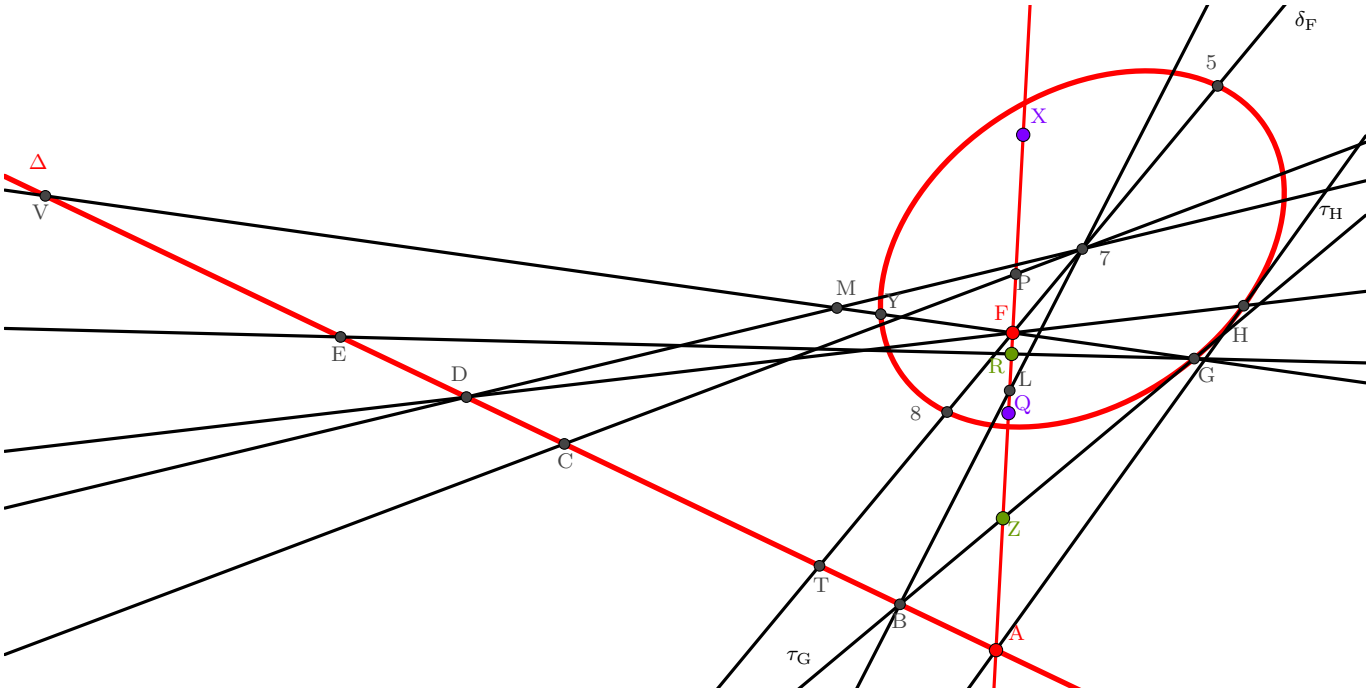

FIGURE 7 – La situation de la dernière partie du *Brouillon Project*.

31. p. 27, l. 8-11

Par construction, le point P est souche de l'arbre correspondant à l'involution $A, F; R, Z; X, X; Q, Q$ et donc

$$PX^2 = PQ^2 = PF.PZ = PR.PZ$$

De même, $T, F; 5, 5; 8, 8$ forment une involution et l'arbre correspondant est de souche 7, milieu du segment [58]. Il énonce [32] qu'il y a évidemment trois cas à traîter :

1. celui où X, Q sont sur la conique ;
2. celui où ils sont tous deux intérieurs ;
3. celui où ils sont tous deux extérieurs.

Il va brièvement traîter le premier cas puis traîter de manière unfiée les deux derniers.

La première proposition s'énonce ainsi :

Proposition 6.1. — *Si* X & Q *sont sur* $\mathcal{C}$*, alors* $C = D$*. Dit autrement,* $(7P), (HF)$ *et* Δ *sont de même ordonnance.*

Voici comment il procède [33]. Le point 7 est souche de l'arbre décrit ci-dessus donc il est accouplé au point ∞_{7F} à l'infini de la droite (7F). De même, P est accouplé au point ∞_{PF} de la droite (PF). Enfin, la traversale de 7 est la droite à l'infini $(\infty_{7F}\infty_{PF})$ et la traversale de P passe par ∞_{PF} qui est l'accouplé de P. Ainsi (7P) est traversale du point commun aux traversales de 7 et de P, c'est-à-dire le point ∞_{PF}. Ainsi (7P), (HF) et Δ sont traversales respectives des trois points alignés ∞_{PF}, A et F et donc ces trois droites sont concourantes, ce qui démontre la proposition 6.1.

Il énonce alors une proposition dont la démonstration est similaire :

Proposition 6.2. — *Sous la même hypothèse que* X & Q *sont sur* $\mathcal{C}$*, les points* C *et* E *sont confondus.*

Revenons maintenant au cas général où ni X ni Q ne sont sur la conique. Un peu avant le passage traîtant des deux cas particuliers ci-dessus [34], il énonce le fait que $E, B; C, D$ sont des couples de nœuds d'un arbre de souche C, ce qu'il ne démontrera que plus loin, mais qu'il réénonce ainsi [35] :

Proposition 6.3. — *Si* X, Q *ne sont pas sur la conique, alors* $CD.CA = CE.CB$.

L'arbre est à souche engagé ou dégagée suivant que X, Q sont de « de la part du concave » ou « de la part du convexe » de la conique [36].

La démonstration de la proposition, « par le plan », découle de deux « circonstances » auxquelles il est dit que « M. Pujos a très bonne part [37] ». Nous énoncerons ces deux « circonstances » sous la forme de deux lemmes.

Traçons la droite (GF) et notons G, Y ses points d'intersection avec $\mathcal{C}$. Notons M le point d'intersection de (7D) avec (GF) et L celui de (7B) avec (AF). Par F, traçons la

32. p. 27. l. 26-28
33. p. 27, l. 29-34
34. p. 27, l. 17
35. p. 27, l. 59-61
36. p. 27, l. 41-44
37. p. 27, l. 54-55

parallèle ω à Δ, de sorte que ω coupe (7D) en K, (GE) en N et (GB) en I. Par I, traçons une parallèle à (B7), qui coupe (GF) en 3, et notons O le point de rencontre de (LM) et (7P).

Lemme 6.1. — *La droite* (LM) *est parallèle à la droite* Δ.

Lemme 6.2. — *Les droites* (EP), (7D), (FV) *et* (LM) *sont concourantes en* M.

La démonstration du premier lemme couvre les lignes 1 à 9 de la page 28. D'après le théorème de Ménélaüs, nous avons les identités suivantes :

$$\frac{7T}{7F} = \frac{DT}{DV}\frac{MV}{MF} \text{ et } \frac{7T}{7F} = \frac{BT}{BA}\frac{LA}{LF}$$

d'où suit que [38]

$$\frac{DT}{DV}\frac{MV}{MF} = \frac{BT}{BA}\frac{LA}{LF}.$$

Cependant, la traversale de A est (HF), et (HF) coupe Δ en D. La traversale de B est (GF), et GF coupe Δ en V. La traversale de 7 est la droite à l'infini, et (7F) coupe Δ, traversale de F, en T, donc la traversale de T est la droite $(F\infty_\Delta)$, c'est-à-dire la droite ω. Ainsi $A, D; B, V; T\infty_\Delta$ forment une involution et T est souche de l'arbre correspondant, donc $TA.TD = TB.TV$ et ainsi [39] :

$$\frac{DT}{DV} = \frac{BT}{BA}.$$

En simplifiant dans l'identité de raisons obtenue plus haut, on en conclut que

$$\frac{MV}{MF} = \frac{LA}{LF}$$

et donc, par la réciproque du théorème de Thalès, que (LM) est parallèle à $(AV) = \Delta$, ce qui démontre le premier lemme.

La démonstration du second lemme est plus longue et couvre les lignes 10 à 41 de la page 28. Par construction de la traversale, $G, G; Y, Y; F, V$ forment une involution. Soit S la souche de l'arbre correspondant, c'est-à-dire le milieu du segment [GF]. Nous avons donc $SY^2 = SG^2 = SV.SF$ et, d'après une propriété de l'involution démontrée plus haut dans le *Brouillon*, aux lignes 19 et 20 de la page 5, il s'ensuit que [40]

$$\frac{GV}{GF} = \frac{SG}{SF}. \tag{3}$$

Par construction, (FN) est parallèle à Δ et (B7) parallèle à (I3) donc d'après le théorème de Thalès on a [41] :

$$\frac{GV}{GF} = \frac{VE}{FN} = \frac{GB}{GI} = \frac{GS}{G3}, \tag{4}$$

38. p.28, l. 6-7
39. p. 28, l. 8
40. p. 28, l. 17
41. p. 28, l. 18-19

soit, en particulier,

$$\frac{\mathrm{GV}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{GS}}{\mathrm{G3}}. \tag{5}$$

Nous déduisons donc de 3 et 5 que

$$\frac{\mathrm{GV}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{SG}}{\mathrm{SF}} = \frac{\mathrm{SG}}{\mathrm{G3}}$$

et ainsi $\mathrm{G3} = \mathrm{SF}$. Par somme ou différence, on en déduit aussi que $\mathrm{F3} = \mathrm{GS}$ [42].

Nous pouvons donc affirmer que

$$\frac{\mathrm{F3}}{\mathrm{FS}} = \frac{\mathrm{GV}}{\mathrm{GF}}.$$

Cependant, du fait que la droite (SK), c'est-à-dire la droite (B7), est parallèle à la droite (3I), on déduit du théorème de Thalès que

$$\frac{\mathrm{F3}}{\mathrm{FS}} = \frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{FK}}.$$

Or, d'après 4, on a

$$\frac{\mathrm{GV}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{VE}}{\mathrm{FN}},$$

donc

$$\frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{FK}} = \frac{\mathrm{VE}}{\mathrm{FN}},$$

soit finalement [43] $\mathrm{VE.FK} = \mathrm{FI.FN}$.

Par construction P est souche de l'arbre associé à l'involution $\mathrm{A, F; Z, R; X, X; Q, Q}$ et donc, d'après une propriété générale des arbres [44], on a

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PF}} = \frac{\mathrm{AR.AZ}}{\mathrm{FR.FR}} = \frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{RF}}\frac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{ZF}}.$$

Or, d'après le théorème de Thalès, nous avons

$$\frac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{ZF}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FI}} \text{ et } \frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{RF}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{FN}}$$

donc

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PF}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{FN}}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FI}} = \frac{\mathrm{AE.AB}}{\mathrm{FN.FI}}.$$

Comme $\mathrm{FN.FI} = \mathrm{VE.FK}$, il s'ensuit que

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PF}} = \frac{\mathrm{AE.AB}}{\mathrm{VE.FK}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EV}}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FK}}.$$

42. p. 28, l. 20
43. p. 28, l. 23-24
44. p. 4, l. 15-18

D'après le théorème de Thalès, on a $AB/FK = LA/LF$ d'où

$$\frac{PA}{PF} = \frac{EA}{EV}\frac{LA}{LF}.$$

Cependant, dans le cours de la démonstration du lemme 6.1, Desargues a démontré que $LA/LF = MV/MF$ et l'on peut finalement conclure que

$$\frac{PA}{PF} = \frac{EA}{EV}\frac{MV}{MF}.$$

Par « la converse d'une cy-dessus, » c'est-à-dire par la réciproque du théorème de Ménélaüs, nous pouvons en déduire[45] que P, M et E sont alignés, c'est-à-dire sont sur la droite (PE).

Par ailleurs et par construction, M est sur $(7D)$, tandis que $SV = GF$ et que M est le point de concours de $(7D)$ et (GF). Ainsi $(LM), (7D)$ et (SV) sont concourantes en M. De ce qui précède découle alors que $(EP), (7D), (FV)$ et (LM) sont concourantes en M, ce qui achève la démonstration du lemme 6.2.

Desargues peut alors démontrer la proposition 6.3 aux lignes 42 à 47 de la page 28. D'après le théorème de Thalès, que l'on est en droit d'appliquer grâce aux lemmes ci-desus,

$$\frac{OL}{OM} = \frac{CA}{CE} \text{ et } \frac{OL}{OM} = \frac{CB}{CD},$$

et donc bien évidemment $CA.CD = CE.CB$, ce qui termine la démonstration de la proposition 6.3 affirmant que $A, D; E, B$ sont couples de nœuds d'un arbre de souche C.

Il énonce ensuite[46], sans démonstration, que, selon les cas, l'arbre obtenu est à souche engagée (l'involution associée est elliptique) quand X et Q sont à l'intérieur de la conique, à souche dégagée (l'involution est hyperbolique) quand X et Q sont à l'extérieur de la conique, et « de l'espèce mitoyenne » (il n'y a pas d'involution dans ce cas) quand X et Q sont sur la conique.

6.2 La construction d'une perspective

Desargues achève cette partie du *Brouillon Project* par une application de ce qu'il vient de démontrer à une construction de nature perspectiviste dont nous avons résumé les éléments dans le théorème 6.1.

Rappelons les données de ce théorème : soit $\mathcal{C}$ une conique en un plan $\mathcal{P}$, δ une droite coupant $\mathcal{C}$ en deux points, et X, F deux points sur δ. Pour construire une conique image de $\mathcal{C}$ par une perspective qui envoie X sur l'un de ses foyers et δ sur son grand axe, nous devons d'abord décrire comment choisir le point Q dont l'image sera l'autre foyer de la conique image. Cela est précisé au tout début du passage analysé dans la section précédente : soit A le point d'intersection de la traversale de F avec δ et soit Q un point sur δ qui soit tel que $X, Q; A, F$ forme une division harmonique ou, plus précisément, que $X, X; Q, Q; A, F$ soit une involution de nœuds moyens doubles X, Q et dont A, F

45. p. 28, l. 37
46. p. 28, l. 48-52

soit un couple de nœuds extrêmes. Nous reprenons maintenant les notations utilisées jusques ici.

Rappelons que 7 est le centre de la conique, que P est milieu du segment [XQ] et que C est le point d'intersection de (7P) avec Δ. Soit $\mathbf{Q}$ un plan coupant $\mathbf{P}$ selon la droite Δ et soit $\mathcal{L}$ la droite de $\mathbf{Q}$ passant par C et perpendiculaire à Δ. Plaçons sur $\mathcal{L}$ un point θ à une certaine distance de C définie par « l'intervalle de l'une des branches moyennes de l'arbre que cette construction y donne[47]. » L'arbre en question est celui de la proposition 6.3, c'est-à-dire A, D; E, B, de souche C. Celui-ci a des nœuds moyens, nommons W l'un d'entre eux : la distance recherché est celle entre la souche C et W, c'est-à-dire la longueur d'une branche moyenne. Par définition d'un arbre, on a $\mathrm{CW}^2 = \mathrm{CA.CD} = \mathrm{CE.CB}$. Ainsi

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CW}} = \frac{\mathrm{CW}}{\mathrm{CD}},$$

et donc CW est moyenne proportionnelle de CA et CD, mais aussi d'ailleurs de CE et CB. Pour trouver θ qui doit être, sur $\mathcal{L}$, donc dans $\mathbf{Q}$, à une distance égale à CW de C, on utilise une construction donnée à la proposition 13 du livre VI des *Éléments* d'Euclide. Traçons dans $\mathbf{Q}$ le cercle de diamètre DA. Alors $\mathcal{L}$ coupe ce cercle en le point recherché θ. Ainsi, dans la figure 19 de de la Hire, le demi-cercle du bas est-il à comprendre comme tracé dans un plan incliné par rapport à celui de la conique. Le mieux alors pour bien comprendre la construction est de plier la figure le long de Δ et de regarder le dièdre ainsi obtenu depuis le dessus, en gardant face à soit le demi cercle, le cercle supérieur de la figure apparaissant alors comme une ellipse, la conique de départ $\mathcal{C}$.

Soit $\mathbf{C}$ le cône de sommet θ et de base $\mathcal{C}$ et soit $\mathbf{P}'$ un plan parallèlle à $\mathbf{Q}$. Alors le cône $\mathbf{C}$ coupe $\mathbf{P}'$ selon une conique $\mathcal{C}'$ qui est image par perspective depuis θ de la conique de départ $\mathcal{C}$. Mais on a mieux : les images de X et Q par perspecitve depuis θ dans le plan $\mathbf{P}'$ sont les deux foyers de la conique. Dit autrement :

Proposition 6.4. — *Les droite* $(\theta\mathrm{X})$ *et* $(\theta\mathrm{Q})$ *coupent* $\mathbf{P}'$ *en les foyers de* $\mathcal{C}'$.

En particulier, l'image par la perspective de centre θ du point X est un foyer de $\mathcal{C}'$ et l'image par la même perspective de la droite δ est le grand axe de $\mathcal{C}'$, ce qui constitue les conclusions du théorème 6.1.

La démonstration de cette dernière proposition n'est pas donnée par Desargues mais elle est cependant assez simple et on peut supposer, au vue de la figure 19 du manuscrit de la Hire, que ce dernier en a retrouvé la teneur. Il s'agit simplement de passer par deux ramées.

En effet, les points F, A; X, X; Q, Q forment une involution, et donc F, A; X, Q sont en division harmonique. Par une ramée parallèlement à $(\mathrm{H}\theta)$ depuis $\mathbf{P}$ vers le plan $\mathbf{Q}$, les droites (HX), (HQ), (HF) et (HA) se transforment en les droites $(\theta\omega)$, (θb), $(\theta\mathrm{D})$ et $\theta\mathrm{A}$ respectivement (pour les points ω, b, voir la figure de la Hire). Ainsi les droites $(\theta\omega)$, (θb); $(\theta\mathrm{D})$, $(\theta\mathrm{A})$ forment un faisceau harmonique du plan $\mathbf{Q}$ (la Hire parle dans sa *Nouvelle Méthode* de *droites harmonicales*). Par construction, l'angle $\widehat{\mathrm{D}\theta\mathrm{A}}$ est droit et

47. p. 28, l. 55-57

donc les deux droites (θD) et (θA) bissectent l'angle des deux autres droites du faisceau, $(\theta\omega)$ et (θb).

Soient maintenant H', X', Q' les images par perspective dans $\mathbf{P}'$ depuis θ des point H, X, Q respectivement. Par une ramée parallèlement à $(\theta H')$ depuis $\mathbf{Q}$ vers $\mathbf{P}'$, la droite (θA) devient la tangente à $\mathcal{C}'$ en H' (la tangence est une propriété d'incidence invariante par perspective) et comme $\mathbf{P}'$ est parallèle à $\mathbf{Q}$, les droites $(H'X')$ et $(H'Q')$ forment des angles égaux avec cette tangente : X' et Q' sont les foyers de la conique $\mathcal{C}'$, ce qui achève la démonstration du dernier théorème du *Brouillon Project.*

Conclusion

La lecture du *Brouillon Project* et des quelques autres textes mathématiques attribuables à Girard Desargues montrent bien que chez lui l'inspiration provient de la pratique de la perspective. Il est utile ici de citer la toute fin du petit traité de perspective de 1636 :

« La proposition qui suit ne se dévide pas si briévement que celles qui precedent.

Ayant à pourtraire une coupe de cône plate, y mener deux lignes, dont les apparences soient les essieux de la figure qui la représentera. »

Précisons ce que Desargues affirme ici être en mesure de faire. Soit une conique, située dans un certain plan et que l'on souhaite représenter en perspective dans un autre plan. Le résultat cette représentation est encore une conique. On peut construire, dans le plan de la conique que l'on représente, deux droites dont les apparences [48] soient les axes principaux de la représentation de cette conique.

On peut affirmer sans crainte que la théorie projective des coniques développée par Girard Desargues dans le *Brouillon Project*, sous la forme entre autre de la notion de traversale, lui permet de remplir la sorte de programme qu'il s'était fixé en 1636. Cela ressort bien des quelques lignes [49] qui concluent le passage analysé dans la section précédente du présent article. Leur interprétation est suffisamment évidente au vu de ce qui précède pour que nous puissions les citer intégralement :

« De façon qu'étant pour assiette d'un cône, donnée de position une quelconque coupe de rouleau à bord courbe, & en son plan une droite pour traversale comme AV, & l'angle du plan de cette coupe avec le plan qu'y donne le plan du sommet & de cette traversale, & en elle, ou bien la souche de l'arbre de cette construction comme ici le point C, ou bien deux couples des nœuds de cet arbre, ou bien hors d'elle un point tel que P, ou bien un des points tels que X, & Q, ou bien deux des couples de nœuds de l'arbre comme XQ.

Le sommet de ce cône est donné de position, & le cône est donné d'espèce & de position, la figure de coupe qu'y donne cette position de plan de coupe est donnée d'espèce & de position, tous les diamètres conjugués de la figure de coupe avec leurs distinctions, toutes les ordonnées & touchantes avec leurs distinctions, les côtés coadjuteurs [50], le but de l'ordonnance de ses diamétrales, & les points foyers, y sont donnés chacun de génération, d'espèce, & de position.

48. ou représentations
49. p. 29, l. 1-13
50. c'est-à-direles paramètres.

Que si le sommet, l'assiette, la traversale, & le plan de coupe sont donnés de position, tout le reste est donné semblablement de génération, d'espèce & de position. »

Comme nous l'avons montré dans cet article, certaines preuves de Desargues ne sont compréhensibles que si l'on accèpte le fait qu'il utilise les éléments à l'infini (points et droites dans son cas) comme il utilise les mêmes éléments à distance finie. Dit autrement, Girard Desargues pratique une géométrie que nous sommes bien forcés de qualifier de *projective.* On peut pousser cette analyse un peu plus loin et dire que le Lyonnais fait de la géométrie en praticien de la perspective. On peut y voir une nouveauté qui aura, bien plus tard, des conséquences extraordinaires, c'est celle de l'irruption du *point de vue* de celui qui discourt dans la géométrie. Cette irruption pose immédiatement la question de l'objectivité de l'énoncé géométrique, objectivité qui ne peut se retrouver qu'en formant une géométrie dont les fondements sont invariants par changement de perspective, c'est-à-dire par le groupe des transformations projectives. Ces idées se trouvent en germe chez Desargue mais aussi chez ses continuateurs comme Philippe de la Hire ou Jacques-François le Poîvre, comme le second auteur de ce texte l'a montré dans le texte [Briend, 2020]. Il serait intéressant d'explorer ces problèmes de changement ou de choix de perspective en lien avec l'histoire de l'art, en partant par exemple des analyses faites par Daniel Arasse de certaines œuves de Masaccio comme l'annonciation de Pérouse, *voir* [Arasse, 2020].

Références

[Andersen, 1991] Andersen, K. (1991). Desargues' method of perspective : its mathematical content, its connection to other perspective methods and its relation to Desargues' ideas on projective geometry. *Centaurus*, 34(1) :44–91.

[Anglade and Briend, 2017] Anglade, M. and Briend, J.-Y. (2017). La notion d'involution dans le *Brouillon Project* de Girard Desargues. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 71(6) :543–588.

[Anglade and Briend, 2019] Anglade, M. and Briend, J.-Y. (2019). Le diamètre et la traversale : dans l'atelier de Girard Desargues. *Archive for History of Exact Sciences*, 73(4) :385–426.

[Arasse, 2020] Arasse, D. (1999, rééd. 2020). *L'annonciation italienne : un histoire de perspective*. Les Incontournables. Fernand Hazan.

[Briend, 2020] Briend, J.-Y. (2020). Mathématiques en perspective : Desargues, la Hire, le Poîvre. working paper or preprint hal-02925995.

[Briend and Anglade, 2018] Briend, J.-Y. and Anglade, M. (2018). L'usage de la combinatoire chez Girard Desargues : le cas du théorème de Ménélaüs. working paper or preprint hal-01692285.

[Desargues and Zacharias, 1922] Desargues, G. and Zacharias, M. (1922). *Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene*, volume 197 of *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

[Desargues and Zanin, 2006] Desargues, G. and Zanin, F. (2006). *Abbozzo di un progetto d'indagine sulle conseguenze delle intersezioni del cono con un piano (1639)*, volume 11 of *Subsidia Mediaevalia Patavina*. Il Poligrafo.

[Eneström, 1902] Eneström, G. (1902). Die "leçons de ténèbres " des Desargues. *Bibl. Mathem.*, 3 :411.

[Field and Gray, 1987] Field, J. and Gray, J. (1987). *The geometrical work of Girard Desargues*. Springer-Verlag, New York.

[Granger, 1988] Granger, G.-G. (1988). *Essai d'une philosophie du style*. Odile Jacob, Paris.

[Leibniz, 1899] Leibniz, G.-W. (1899). *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern, herausgegeben von C. I. Gerhardt*. Mayer & Müller, Berlin.

[Poncelet, 1822] Poncelet, J.-V. (1822). *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire, quai des Augustins, Paris.

[Taton, 1951] Taton, R. (1951). *L'œuvre mathématique de G. Desargues*. Bibl. de philosophie contemporaine Félix Alcan. Presses universitaires de France, Paris.

[Zacharias, 1941] Zacharias, M. (1941). Desargues' Bedeutung für die projektive Geometrie. *Deutsche Math.*, 5 :446–457.

Marie Anglade
Université d'Aix-Marseille
Centre Gilles Gaston Granger UMR CNRS 7304
3, place victor Hugo
13331 Marseille cede 3
France.
marie.anglade@univ-amu.fr

Jean-Yves Briend
Université d'Aix-Marseille
I2M UMR CNRS 7373
CMI
39, rue Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13
France.
jean-yves.briend@univ-amu.fr