

A • Guimier

***Une nouvelle approche axiomatique
de la théorie de la relativité restreinte :***

(Document de synthèse du 24 / 05 / 2021)

Une nouvelle approche axiomatique de la théorie de la relativité restreinte :

On considère notre espace physique assimilé à un espace affine réel à 3 dimensions E dans lequel peuvent se mouvoir librement par rapport à E et entre eux d'autres points appelés "observateurs". On considère \mathcal{P} un ensemble de ces points O auxquels on associe un repère orthormé $R_O(\vec{O}, \vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O)$ et une horloge H_O .
On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées sur \mathcal{P} :

(Hypothèse 1) : Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, on suppose que pour tout point Q défini à partir de R_O on peut lui associer une horloge synchronisée avec celle de O .

Conséquence : La synchronisation des horloges dans chaque repère permet d'associer à chaque observateur O un repère \mathcal{R}_O quadridimensionnel d'origine $\mathcal{O} : O$ au temps $t_0 = 0$.

On définit ainsi une famille de repères quadridimensionnels (\mathcal{R}_O) .

(Hypothèse 2) : On suppose que les espaces E_O , $O \in \mathcal{P}$, sont les uns par rapport aux autres en mouvement rectiligne uniforme et que si un point est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un point de \mathcal{P} il l'est aussi pour tout autre point de \mathcal{P} .

Conséquence : Si une ligne d'univers est une droite pour \mathcal{R}_O , elle est aussi une droite pour tout autre $\mathcal{R}_{O'}$.

(Hypothèse 3) :

On suppose que les espaces E_O défini par (R_O, H_O) sont munis des mêmes lois physiques qui permettent de définir les mêmes unités de mesure d'espace et de temps pour chaque E_O .

On choisit un point arbitraire O_0 de \mathcal{P} et le temps $t_{O_0} = 0$ indiqué par H_{O_0} .

Pour tout point O de \mathcal{P} , par translation spatiale prenons comme nouvelle origine spatiale de E_O le point O' de R_O qui coïncide avec O_0 au temps $t_{O_0} = 0$.

Prenons comme nouvelle origine temporelle de E_O , l'instant où O' et O_0 coïncident.

Par la suite, on supposera que tout les repères spatiaux R_O auront leur origines confondues au temps $t = 0$ de leur horloge respective.

Et par conséquent la famille de repères quadridimensionnels (\mathcal{R}_O) aura la même origine spatio-temporelle.

(Hypothèse 4) : On suppose que la lumière a un mouvement rectiligne uniforme dans tout E_O et que sa vitesse numérique c est constante et indépendante de la source d'émission et de l'espace E_O considéré.

Conséquence : Si $X = (ct, x, y, z)$ est le vecteur représentant la position d'un photon issu de l'observateur O au temps $t = 0$ pour le repère \mathcal{R}_O

et si $X' = (ct', x', y', z')$ est le vecteur représentant la position de ce même photon issu de l'observateur O' au temps $t' = 0$

on a $c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2}$ pour $t > 0$ et $t' > 0$.

Donc les coordonnées du photon vérifieront simultanément :

$c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$ et $c^2 t'^2 - x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$ dans \mathcal{R}_O et $\mathcal{R}_{O'}$.

Si on considère la forme quadratique $\Phi(X) = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0$.

Le problème à résoudre :

On cherche une transformation $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ inversible qui donne les coordonnées spatio-temporelles

du point P pour l'observateur O en fonction de celles de l'observateur O' ,

telle que sous les hypothèses 1, 2, 3, 4 ci-dessus possède les invariants suivant :

(1) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

(2) T transforme les droites affines en droites affines,

(3) si $X = T(X') : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0$ c'est à dire que T laisse invariant le cône d'isotropie de Φ .

Remarque :

L'inversibilité permet d'avoir un groupe de transformation.

La première condition vient de l'origine commune des 2 repères et que dès que T est affine, elle est linéaire.

Les 2 autres conditions traduisent les 2 invariances admises par les hypothèses 2 et 4.

Le seul paramètre qui lie O et O' est la vitesse relative \vec{V} de O' par rapport à O et donc $T = T(\vec{V})$.

Pour cela on va utiliser les 2 théorèmes suivants donnés dans toute leur généralité :

Théorème 1 : (P • Boyer . "Algèbre et Géométries " . C&M 2015 p.51).

Soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une bijection d'un espace affine \mathcal{E} de dimension ≥ 2 sur un corps \mathbb{K} possédant au moins 3 éléments, telle que pour tout a, b, c alignés alors $f(a), f(b), f(c)$ sont alignés, alors f est semi-affine.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ f est affine.

(Ce théorème est appelé théorème fondamental de la géométrie affine • Abouabdillah Driss a proposé une version améliorée de ce théorème : (<https://ssrn.com/abstract=3181422>) en remplaçant l'hypothèse f bijective par f surjective).

Conséquence : Dans un espace affine réel les bijections qui conservent les droites affines sont les applications affines bijectives.

On note $\mathcal{C}(\phi) = \{x / \phi(x, x) = 0\}$ le cône d'isotropie de ϕ une forme bilinéaire symétrique et $\text{Rad } \phi = \{x / \forall y \phi(x, y) = 0\}$.

Remarque : Si ϕ est la forme bilinéaire symétrique associée à $\Phi = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \text{Rad } \phi = \{0\}$.

Théorème 2 : (R. Goblot . "Algèbre linéaire " Masson 1995 p.254)

Soit $\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, E espace vectoriel sur \mathbb{K} , une forme bilinéaire symétrique telle que $\text{Rad } \phi \neq \mathcal{C}(\phi)$

Pour qu'une forme bilinéaire ϕ' soit proportionnelle à ϕ , il faut et il suffit que $\mathcal{C}(\phi) = \mathcal{C}(\phi')$.

Les conditions (1) et (2) imposées à T implique que T est linéaire (Théorème 1).

Soit M est la matrice qui représente T dans les bases associées aux repères \mathcal{R}_O et $\mathcal{R}_{O'}$.

Si on note $X' = MX$, on a $\Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = \Phi(MX) = 0$

alors (Théorème 2) $\exists \lambda \neq 0, \forall X \Phi(MX) = \lambda \cdot \Phi(X)$

en notant $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ on a :

$${}^t(\mathbf{MX})\mathbf{G}(\mathbf{MX}) = {}^t\mathbf{X}{}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{X} = \lambda \cdot {}^t\mathbf{X}\mathbf{G}\mathbf{X} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M} = \lambda \cdot \mathbf{G}$$

la dernière équivalence est conséquence de la symétrie des matrices ${}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M}$ et \mathbf{G} .
(J.-M. Monier. "Algèbre 1 et 2". Dunod 1997 .)

Evaluation de λ :

Montrons d'abord que si la vitesse de \mathbf{O}' mesurée par l'observateur \mathbf{O} est \vec{V} ,
la vitesse de \mathbf{O} mesurée par l'observateur \mathbf{O}' est $-\vec{V}$:
(Pour le moment on ne dispose que des hypothèses ci – dessus)

On se place d'abord du point de vue de l'observateur \mathbf{O} .
 \mathbf{O}' s'éloignant de \mathbf{O} .

Un rayon lumineux part de \mathbf{O} vers \mathbf{O}' au temps t_0 , atteint \mathbf{O}' au temps t_1 au point \mathbf{P}_1 ,
et revient immédiatement vers \mathbf{O} , qui est atteint au temps t_2 puis repart immédiatement
vers \mathbf{O}' qui est atteint au temps t_3 au point \mathbf{P}_2
puis retourne immédiatement vers \mathbf{O} qui est atteint au temps t_4 .

Il y a donc un double aller – retour.

La vitesse numérique c du rayon lumineux étant la même dans les 2 sens on a :

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2} \text{ et } t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2} .$$

Lorsque le rayon lumineux atteint, au temps t_1 , le point \mathbf{P}_1 ,
 \mathbf{O}' continue à s'éloigner de \mathbf{O} alors que le rayon retourne vers \mathbf{O} .

$$t_3 - t_1 = \frac{t_4 - t_0}{2} \text{ est la durée entre les 2 contacts du rayon lumineux et } \mathbf{O}' .$$

Si on suppose que \mathbf{O}' a une vitesse uniforme \vec{V} de module V on a $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\| = V \cdot \frac{t_4 - t_0}{2}$.

On peut remarquer que $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\|$ est aussi égal à la différence

$$\|\overrightarrow{\mathbf{OP}_2}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{OP}_1}\| = c \left(\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2} \right) .$$

$$\text{Donc } V = c \left(\frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}} \right) = c \left(\frac{t_4 - 2t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right)$$

$$= c \left(\frac{(t_4 - t_0) - 2(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) = c \left(1 - 2 \left(\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right) .$$

Soit $\mathbf{M} = (m_{ij})$ la matrice de transformation telle que $\mathbf{X}' = \mathbf{M}\mathbf{X}$,

X les coordonnées d'un point P dans la base de \mathcal{R}_O ,

X' les coordonnées d'un même point P dans la base de $\mathcal{R}_{O'}$.

Plaçons nous maintenant du point de vue de l'observateur O' qui veut évaluer V' ;
la vitesse de O par rapport à lui – même , à partir de la même expérience en observant l'horloge de O :
Considérons les coordonnées de l'observateur O dans \mathcal{R}_O et $\mathcal{R}_{O'}$:

O a pour coordonnée $(ct, 0, 0, 0)$ dans la base associée à \mathcal{R}_O

et O aura pour coordonnées :

$$(ct, x, y, z) = (m_{1,1} \cdot ct', m_{2,1} ct', m_{3,1} \cdot ct', m_{4,1} ct')$$
 pour la base associée à $\mathcal{R}_{O'}$.

Comme $ct = m_{1,1} ct'$ on peut écrire qu'en $O' t = \alpha \cdot t'$ avec nécessairement $\alpha > 0$.

Si l'observateur O' évalue V' en observant l'horloge sur l'observateur O ,
il obtiendra la même valeur que l'observateur O puisque en faisant le même calcul il obtient :

$$V' = c \left(1 - 2 \left(\frac{\alpha \cdot t_2 - \alpha \cdot t_0}{\alpha \cdot t_4 - \alpha \cdot t_0} \right) \right) = c \left(1 - 2 \left(\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right) = V.$$

La vitesse dans les 2 cas est collinéaire à $\overrightarrow{OO'}$ et le sens de \overrightarrow{V} est celle de $\overrightarrow{OO'}$ pour O
et $\overrightarrow{O'O}$ pour O' .

On peut maintenant évaluer λ :

(N.M.J. Woodhouse. " Special Relativity " •Springer 2002 p.80)

D'après l'axiome 2 les lois de la physique étant les mêmes pour les espaces associés
à O et O' la dilatation des durée sera la même que ce soit l'observateur O observant O'
ou bien que ce soit l'observateur O' observant O puisque les situations physiques sont les mêmes ,
le modules des vitesses étant identique.

Les coordonnées spatio - temporelle de O' sont représentée par le vecteur $X = {}^t(ct, x, y, z)$
pour l'observateur O , et par $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ pour l'observateur O' .

Comme $X = MX'$ on en déduit que le temps t mesuré par un observateur situé en O d'une horloge
située en O' et qui indique le temps t' à un observateur situé en O' vérifie $t = m_{1,1} t'$

avec $m_{1,1} > 0$ si on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps car :

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} ct' \\ m_{2,1} ct' \\ m_{3,1} ct' \\ m_{4,1} ct' \end{bmatrix}.$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en O' observe une horloge
située en O qui indique un temps t pour l'observateur situé en O •L'observateur situé en O'
mesure alors un temps t' •Comme $X' = M^{-1}X$ et si on pose $N = M^{-1}$ on aura $t' = n_{1,1} t$
et $n_{1,1} > 0$ comme précédemment.

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment $n_{1,1} = m_{1,1}$.

De ${}^tMGM = \lambda \cdot G$, $\lambda \neq 0$, on en déduit que ${}^tM = \lambda \cdot G \cdot M^{-1} G^{-1}$.

D'où $M^{-1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G) \Rightarrow m_{1,1} = n_{1,1} = (M^{-1})_{1,1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1}$.

Or $(\mathbf{G} \cdot {}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{G})_{1,1} = m_{1,1}$ donc $\lambda = 1$.

Les matrices \mathbf{M} qui vérifient ${}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M} = \mathbf{G}$ sont appelées matrices de Lorentz et forment un sous-groupe \mathbf{L} du groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. En particulier $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{G} \cdot {}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}$ et $\det^2(\mathbf{M}) = 1$.

Pour expliciter \mathbf{M} dans le cas qui nous intéresse on va utiliser les 2 théorèmes suivants :

Théorème 3 : (J-M. Souriau. "Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.378)

Toute matrice \mathbf{M} de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M} = \exp(\alpha \mathbf{N}) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & {}^t\mathbf{X} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ avec } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } {}^t\mathbf{X}\mathbf{X} = 1, {}^t\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\text{De plus } \exp(\alpha \mathbf{N}) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^t\mathbf{X} \\ \text{sh}(\alpha) \mathbf{X} & (\text{Id}_{\mathbb{R}^3 - 1} + (\text{ch}(\alpha) - 1) \mathbf{X} {}^t\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

Théorème 4 :

(R. Mneimé, F. Testard. "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques".

Hermann Paris 1986.)

Soit \mathbf{M} une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice \mathbf{S}' symétrique définie positive et \mathbf{O} orthogonale telles que $\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{S}'$.

Conséquences :

On en déduit en posant $\mathbf{S} = \mathbf{O}\mathbf{S}'\mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{S}' = {}^t\mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}$ que \mathbf{M} peut se décomposer de manière unique en $\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{S}' = \mathbf{O}({}^t\mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}) = \mathbf{S}\mathbf{O}$.

Cela entraîne que décomposition du théorème 3 est unique :

il suffit de vérifier que $\exp(\alpha \mathbf{N})$ est définie positive.

$\alpha \mathbf{N}$ est symétrique réelle, il existe donc une matrice \mathbf{U} orthogonale réelle et une matrice diagonale réelle $\mathbf{D} = (d_{i,i})$ telle que $\alpha \mathbf{N} = {}^t\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}$.

Comme $\exp(\alpha \mathbf{N}) = {}^t\mathbf{U}\exp(\mathbf{D})\mathbf{U}$ et $\exp(\mathbf{D}) = (\exp(d_{i,i}))$ les valeurs propres de $\exp(\alpha \mathbf{N})$ sont strictement positive et $\exp(\alpha \mathbf{N})$ est définie positive.

De la formule $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ on en déduit que $\det(\exp(\alpha \mathbf{N})) = 1$

et que $\det(\mathbf{M}) = \varepsilon \cdot \det(\boldsymbol{\Omega}) = \pm 1$.

On considère maintenant \mathbf{O}' qui s'éloigne de \mathbf{O} à la vitesse constante \vec{V} . On pose $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$.

On considère les 2 repères $\mathcal{R}_{\mathbf{O}}$ et $\mathcal{R}_{\mathbf{O}'}$ définis plus haut.

\mathbf{X} étant les coordonnées d'un point \mathbf{P} dans la base associée à $\mathcal{R}_{\mathbf{O}}$,

\mathbf{X}' étant les coordonnées de ce même point \mathbf{P} dans la base associée à $\mathcal{R}_{\mathbf{O}'}$,

\mathbf{M} la matrice définie par $\mathbf{X} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}'$ qui est donc une matrice de Lorentz et s'écrit donc

sous la forme $M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^t X \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } {}^t X X = 1, {}^t \Omega \Omega = Id_{\mathbb{R}^3} \text{ . voir théorème 3 .}$$

On va exprimer dans un premier temps exprimer $\exp(\alpha N)$ en fonction de $\vec{\beta}$.

Théorème 5 :

En reprenant les notations du théorème 3 on a , si $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$:

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t [\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}] {}^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1 + \gamma)} \end{bmatrix} \text{ avec } [\vec{\gamma\beta}] \text{ les coordonnées de } \vec{\gamma\beta} \text{ dans } \mathcal{R}_0 .$$

Démonstration : On peut donc écrire que les coordonnées de \mathcal{O}' dans la base associée à \mathcal{B}_0 sont :

$${}^t W = {}^t (ct, {}^t V_1, {}^t V_2, {}^t V_3) = ct {}^t (1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \text{ avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

et dans \mathcal{B}'_0 : ${}^t W' = {}^t (ct', 0, 0, 0) = ct' {}^t (1, 0, 0, 0)$ avec $W = M \cdot W'$.

On remarque d'abord que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$ donc $W = \exp(\alpha N) W'$.

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^t X \\ sh(\alpha) X & (Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X {}^t X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^{t'} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} t ,$$

$$\text{cela entraine que } t \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = {}^{t'} \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha) X_1 \\ sh(\alpha) X_2 \\ sh(\alpha) X_3 \end{bmatrix} \text{ et donc } t = ch(\alpha) {}^{t'} \text{ d'où :}$$

$$\operatorname{ch}(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\alpha) \\ \operatorname{sh}(\alpha)X_1 \\ \operatorname{sh}(\alpha)X_2 \\ \operatorname{sh}(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ch}(\alpha)\vec{\beta} = \operatorname{sh}(\alpha)\vec{X},$$

donc $\vec{\beta} = \operatorname{th}(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = \operatorname{th}^2(\alpha)$ puisque $\vec{X}^2 = 1$.

On pose $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$.

Comme $1 - \operatorname{th}^2(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\alpha)} \Rightarrow \operatorname{ch}^2(\alpha) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\alpha)} = \frac{1}{1 - \vec{\beta}^2} = \gamma^2$,

comme $\operatorname{ch}(\alpha) \geq 1$ $\gamma = \operatorname{ch}(\alpha)$; comme $\operatorname{sh}^2(\alpha) = \operatorname{ch}^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$
 $= \frac{1}{1 - \vec{\beta}^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \beta^2$.

En résumé on a $\gamma = \operatorname{ch}(\alpha)$, $\gamma^2 \beta^2 = \operatorname{sh}^2(\alpha)$, $\beta^2 = \operatorname{th}^2(\alpha)$.

D'autre part :

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} = (\gamma - 1) = \operatorname{ch}(\alpha) - 1$$

$$\text{et } X_i X_j = \frac{(\beta_i \beta_j)}{\operatorname{th}^2(\alpha)} = \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} \text{ donc}$$

$$(\operatorname{ch}(\alpha) - 1) X_i X_j = \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_i \beta_j, \text{ ce qui permet d'écrire que :}$$

$$\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\operatorname{ch}(\alpha) - 1) X^t X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1 + \gamma)}.$$

Comme $\operatorname{sh}(\alpha)X_i = \frac{\operatorname{sh}(\alpha)\beta_i}{\operatorname{th}(\alpha)} = \operatorname{ch}(\alpha)\beta_i = \gamma\beta_i$ d'où le résultat.

En résumé :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} & + & \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \right) & & \Omega \end{bmatrix}$$

avec ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$.

$$\text{Par la suite si on note } C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & C\Omega \end{bmatrix}.$$

Remarques :

$$(1) C[\vec{\beta}] = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \right) \vec{\beta} = \vec{\beta} + \gamma^2 \frac{[\vec{\beta}][{}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}]]}{(1+\gamma)} = [\vec{\beta}] \left(1 + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}^2}{(1+\gamma)} \right) \\ = [\vec{\beta}] \left(1 + \frac{\gamma^2 - 1}{(1+\gamma)} \right) = \gamma [\vec{\beta}].$$

(2) Si $M = M' \cdot M''$ est le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation avec :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma\beta})\Omega \\ \vec{\gamma\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma'\beta'}) \\ \vec{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma''\beta''}) \\ \vec{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

$$\text{alors } M = \begin{bmatrix} \gamma \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1) & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' + \gamma' \vec{\beta}' C'' \\ \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' + \gamma' C' \vec{\beta}'' & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma' \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \text{ et } \Omega = C^{-1}(\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'').$$

En notant que $\left(\frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right) \left(\frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right) = \vec{\beta} \left(\frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right) \vec{\beta} = \vec{\beta}^2 \left(\frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right)$ et que $\gamma^2 \vec{\beta}^2 = \gamma^2 - 1$:

$$\left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \right) \cdot \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \right) \\ = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} - \gamma^3 \frac{\vec{\beta}^2 \left(\frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right)}{(1+\gamma)^2}$$

$$= \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)^2} \left(-\gamma(1 + \gamma) + \gamma^2(1 + \gamma) - \gamma(\gamma^2 - 1) \right) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\text{Donc } C^{-1} = \left(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\left[\begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \\ \left[\begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \\ \left[\begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \\ \left[\begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right]}{(1 + \gamma)} \right)^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}, \text{ ce qui permet d'écrire } \Omega$$

en fonction de $\vec{\beta}'$, $\vec{\beta}''$:

$$\Omega = \left(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) \left(\gamma \gamma' \vec{\beta}' \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}'' + C' C'' \right)$$

$$\text{avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma (\overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C' = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}' \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} \text{ et } C'' = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}'' \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')}.$$

La connaissance de $C^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}$ permet d'évaluer Ω en fonction de M :

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \text{Considérons le bloc } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$$

qui représente les composantes spatiales des vecteurs spatiaux de la base associée à \mathbf{O}' exprimées dans la base associée à \mathbf{O} .

On aura $\Omega = C^{-1} \mathcal{M}$.

Remarques :

(1) Si $\vec{\beta} // \vec{i}$ alors les termes non diagonaux de C sont nuls ,

$$\text{et un seul terme diagonal de } C \text{ est différent de } 1 : 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta^2 = \frac{(1+\gamma) + \gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)}$$

$$= \frac{1+\gamma+\gamma^2-1}{(1+\gamma)} = \gamma \text{ car } \gamma^2-1 = \frac{1}{1-\beta} - 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta} = \gamma^2 \beta^2.$$

(2) Comme $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$ on peut remplacer , en notant δ_j^i le symbole de Kronecker ,

$$\delta_j^i + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_i \beta_j \text{ par } \delta_j^i + (\gamma-1) \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} \text{ dans l'évaluation de } Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X^t X$$

$$\text{car } \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}.$$

(3) $\gamma \cdot (1+\beta) = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1}$ car :

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \Leftrightarrow \gamma \cdot \beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

$$\text{Donc } \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1} \right);$$

et on retrouve que $\text{argth}(\beta) = \text{argcosh}(\gamma) = \alpha$ car $\gamma = ch(\alpha)$ et $\beta = th(\alpha)$.

(4) De $\beta = \sqrt{\beta^2}$, $\beta^2 = th^2(\alpha)$ et $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c} \Rightarrow \|\vec{V}\| < c$.

(5) Sachant que $[\exp(\alpha N)]^{-1} = \exp(-\alpha N)$, $\gamma = ch(\alpha)$ et $\vec{\beta} = th(\alpha) \vec{X}$ il vient :

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [{}^t\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -{}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ -[{}^t\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}.$$

Evaluation de $\varepsilon = \pm 1$:

Comme

$$W = MW' = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [{}^t\vec{\gamma\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \gamma\varepsilon & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ \varepsilon[{}^t\vec{\gamma\beta}] & C\Omega \end{bmatrix} W'$$

avec ${}^tW = ({}^t c t, {}^t V_1, {}^t V_2, {}^t V_3)$, ${}^tW' = ({}^t c t', 0, 0, 0)$. On en déduit que $t = \varepsilon \cdot \gamma \cdot t'$.

Donc si $\epsilon = -1$, il y aurait un renversement du temps difficile à justifier physiquement.
Par la suite on suppose que $\epsilon = +1$.

Reste à évaluer Ω . On posera $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$.

Remarquons tout d'abord que si M est symétrique $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$

car $M = S \Omega = M Id_{\mathbb{R}^4}$ avec S symétrique définie positive, par unicité de la décomposition $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$
Evaluons d'abord directement un cas particulier.

Théorème 6 :

Dans le cas où $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ et de même sens, $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ et de même sens, $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ et de même sens,

$$M \text{ se réduit à } M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \text{ avec } \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Démonstration :

Si $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ de même sens, $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ de même sens, $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ de même sens,

$$M \text{ s'écrit sous la forme } M = M' \cdot \Omega = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \cdot \Omega$$

avec $\beta = \beta_x$, $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ où Ω est une matrice orthogonale d'ordre 3.

$$\text{Si } M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \omega_{2,4} \\ 0 & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} & \omega_{3,4} \\ 0 & \omega_{4,2} & \omega_{4,3} & \omega_{4,4} \end{bmatrix},$$

$$X1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } X3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ on a :}$$

$$M' \overset{\lambda}{\Omega} X1 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,2} \\ \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{4,2} \end{bmatrix}, M' \overset{\lambda}{\Omega} X2 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,3} \\ \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} \text{ et } M' \overset{\lambda}{\Omega} X3 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,4} \\ \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cela implique que } \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{3,2} \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d'où : \overset{\lambda}{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

Comme $\overset{\lambda}{\Omega}$ est orthogonal et les sens des axes étant conservés $\overset{\lambda}{\Omega} = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

Remarque : Tout calcul fait on a :

$$M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Donc les valeurs propres de M' sont $\gamma \cdot (1 + \beta)$, $\gamma \cdot (1 - \beta)$, 1 .
En se servant des remarques du théorème 5 on a :

$$\gamma \cdot (1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \text{ et donc que } \gamma \cdot (1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

De plus $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) = \operatorname{argth}(\beta) = \alpha$, les valeurs propres de M' peuvent s'écrire :

$$\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \exp \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right) = e^\alpha, \quad \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \exp \left(-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right) = e^{-\alpha} \text{ et } 1.$$

Théorème 7 :

Dans le cas où $\vec{Ox} // \vec{O'x'}$, $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$, $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$, ici \vec{V} n'est plus parallèle à \vec{Ox} ,

alors $\vec{\Omega} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

Démonstration :

Par la suite par abus de notation, on note $\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs de base successivement temporel et spatiaux de la base \mathcal{B} de dimension 4. De même pour les autres bases.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\ & \begin{array}{c} \downarrow P \\ \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \end{array} & \xrightarrow{M'} & \begin{array}{c} \downarrow P \\ \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \end{array} \end{array}$$

$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base spatio-temporelle associée à l'observateur O .

$\mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une base spatio-temporelle associée à l'observateur O' .

Contrairement au lemme précédent \vec{V} n'est pas forcément parallèle à la composante spatiale de \vec{i} mais par contre la composante spatiale de \vec{i} reste parallèle à celle de \vec{i}' , de même pour \vec{j} et \vec{j}' et \vec{k} et \vec{k}' malgré le mouvement de O' pour les 2 observateurs.

$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ est une autre base associée à O obtenue par une rotation R des composantes

$$\text{spatiales de } \vec{i}, \vec{j} \text{ et } \vec{k}. \text{ On pose } P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix}.$$

La rotation est choisie pour que la composante spatiale de \vec{i}_1 soit parallèle à celle de \vec{V} .

On remarque que P est une matrice (orthogonale) de Lorentz.

Soit donc $P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ la matrice orthogonale de changement de base laissant le temps invariant et transformant $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

Considérons \mathcal{B}'_1 défini par $P = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$. Puisque la composante spatiale de \vec{i} est parallèle à celle de \vec{i}' , de même pour \vec{j} et \vec{j}' et \vec{k} et \vec{k}' la même rotation R donnera la composante spatiale \vec{i}_1 parallèle à celle de \vec{i}' ,

de même pour \vec{j} et \vec{j}' et \vec{k} et \vec{k}' , avec en plus la composante spatiale de \vec{i}'_1 parallèle à celle de \vec{V} .

D'après le théorème 6 $M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice de Lorentz de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}'_1 :

Comme $M = PM^{-1}P^{-1} \Leftrightarrow M' = {}^t P M P$ et comme M est de Lorentz, elle est de la forme $M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}$.

Par construction $M' = {}^t P (\Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}) P = ({}^t P \Lambda(\vec{\beta}) P) ({}^t P \hat{\Omega} P)$.

On remarque que ${}^t P \Lambda(\vec{\beta}) P$ est symétrique et que ${}^t P \hat{\Omega} P$ est orthogonal.

Comme $M' = M' \cdot Id_{\mathbb{R}^4} = ({}^t P \Lambda(\vec{\beta}) P) ({}^t P \hat{\Omega} P)$, par unicité de la décomposition

${}^t P \hat{\Omega} P = Id_{\mathbb{R}^4}$. On en déduit que $\hat{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$.

Théorème 8 :

Dans le cas où seulement $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$, $M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$

avec $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Ω étant une rotation d'axe $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ qui rend parallèle \vec{Oy} et $\vec{O'y'}$

et donc aussi \vec{Oz} et $\vec{O'z'}$.

Démonstration :

On applique le théorème 6 : la rotation entraîne que $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$, $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$, $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$.

Evaluation de Ω dans le cas général :

Théorème 9 :

Soit la matrice P de la rotation $R1$ dans l'espace à 3 dimensions qui amène \vec{Ox} sur \vec{V} .

De même on définit la matrice Q de la rotation $R2$ dans l'espace à 3 dimensions

qui amène $\vec{O'x'}$ sur \vec{V} dans la même direction.

Soit R la rotation qui, après avoir effectué $R1$ et $R2$, aligne les axes autres que celui aligné sur \vec{V} .

Alors $\hat{\Omega} = P^{-1} R Q$

Démonstration :

On posera $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$, $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

et $M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \\ & & & \end{bmatrix}$ avec $\beta = \|\vec{\beta}\|$.

La matrice de Lorentz M telle que $X = MX'$ est aussi la matrice de passage de la base

de $\mathcal{R}_\varnothing : \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à celle de $\mathcal{R}_\varnothing' : \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

M s'écrit $M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$.

Considérons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\
 & & \downarrow \hat{Q} \\
 & & \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \\
 \hat{P} \downarrow & & \downarrow \hat{R} \\
 \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) & \xrightarrow{M'} & \mathcal{B}''_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}''_1, \vec{k}''_1)
 \end{array}$$

On a $M = \begin{pmatrix} \hat{P} & \overset{t}{\wedge} \hat{P} \\ \hat{P} & \overset{t}{\wedge} \hat{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P} & \overset{t}{\wedge} \hat{P} \\ \hat{R} & \overset{t}{\wedge} \hat{Q} \end{pmatrix}$

d'où $\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \hat{P} & \overset{t}{\wedge} \hat{P} \\ \hat{P} & \overset{t}{\wedge} \hat{P} \end{pmatrix}$ et $\overset{\wedge}{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{P} & \overset{t}{\wedge} \hat{P} \\ \hat{R} & \overset{t}{\wedge} \hat{Q} \end{pmatrix}$ par unicité de la décomposition.

Remarque :

Dans N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " •Springer 2002 p.82

on montre que toute matrice de Lorentz M peut se mettre sous la forme $M = \hat{H} M' \hat{K}$

avec $\hat{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$, $\hat{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$,

K et H matrices orthogonales et $M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ T & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix}$ avec $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ or :

$M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega} = \hat{H} M' \hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{H} & \overset{t}{\wedge} \hat{H} \\ \hat{H} & \overset{t}{\wedge} \hat{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{H} & \overset{t}{\wedge} \hat{K} \end{pmatrix}$ par unicité $\Lambda(\vec{\beta}) = \hat{H} M' \overset{t}{\wedge} \hat{H}$ et $\overset{\wedge}{\Omega} = \hat{H} \hat{K}$.

on peut identifier \hat{H} à \hat{P} ou à $\hat{P} \cdot \overset{t}{\wedge} \hat{R}$.

Dans le premier cas $\hat{K} = \overset{t}{\wedge} \hat{R} \cdot \hat{Q}$, dans le deuxième $\hat{K} = \hat{Q}$.

La décomposition $M = \hat{H} M' \hat{K}$ n'est pas unique contrairement à $M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$.

Si on considère $\Lambda'(\vec{\beta}) = \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{\Omega} \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$, $\Lambda'(\vec{\beta})$ est symétrique

et $M = \overset{\wedge}{\Omega} \Lambda'(\vec{\beta})$ et cela d'une manière unique.

Calcul des valeurs et vecteurs propres de $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$:

On remarque que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}][\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{\gamma^2\beta^2[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + (\gamma-1)[\vec{\beta}] \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + \gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\beta)\gamma\beta \\ (1+\beta)\gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = (1+\beta)\gamma \begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}, \\ \text{de même :} & \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}][\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{\gamma^2\beta^2[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + (\gamma-1)[\vec{\beta}] \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + \gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta-1)\gamma\beta \\ (1-\beta)\gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = (1-\beta)\gamma \begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le produit des 2 premières valeurs propres est $P' = (1+\beta)\gamma(1-\beta)\gamma = 1$, leur somme est $S' = 2\gamma$. Or $\det(M) = 1$ et $\text{Trace}(M) = \gamma + 3 + \gamma - 1 = 2(\gamma + 1)$.

Donc la somme des 2 autres est $S = 2$. Donc les autres racines sont égales à 1.

Si on a :

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix} \text{ alors}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma + {}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] \\ a[\vec{\beta}] + [\vec{u}] + \frac{[\vec{\beta}]{}^t[\vec{\beta}][\vec{u}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix}.$$

Une solution possible est $a = 0$ et tout vecteur \vec{u} tel que ${}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] = 0$.

2 vecteurs propres possibles associés à la valeur propre 1 sont $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{u} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$

avec ${}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] = 0$, ${}^t[\vec{\beta}][\vec{v}] = 0$, ${}^t[\vec{v}][\vec{u}] = 0$. $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{u} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ sont du genre espace.

Plus généralement tout vecteur de la forme $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{w} \end{bmatrix}$ avec $\vec{w} \perp \vec{\beta}$ est invariant.

On aura l'ensemble spectral suivant associé à $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\beta}] \\ [\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\beta}]{}^t[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$:

$$\left\{ \left(\begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}, (1+\beta)\gamma \right), \left(\begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}, (1-\beta)\gamma \right), \left(\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{u} \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{v} \end{bmatrix}, 1 \right) \right\}.$$

On a vu qu'une matrice de Lorentz M sans rotation pouvait s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & & {}^t[\vec{\gamma}\beta] \\ [\vec{\gamma}\beta] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma}\beta][\vec{\gamma}\beta]}{(1+\gamma)} \end{pmatrix} \text{ cest à dire sous forme développée :}$$

$$X = MX' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct \\ [\vec{r}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & & {}^t[\vec{\gamma}\beta] \\ [\vec{\gamma}\beta] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma}\beta][\vec{\gamma}\beta]}{(1+\gamma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ [\vec{r}'] \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ct = \gamma ct' + {}^t[\vec{\gamma}\beta][\vec{r}'] = \gamma(ct' + {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}']) \\ [\vec{r}] = [\vec{r}'] + [\vec{\gamma}\beta] \left(\frac{{}^t[\vec{\gamma}\beta]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{cases} .$$

On trouve dans la littérature d'autres formes par exemple :

(1) forme symétrique :

$$\begin{cases} [\vec{ct}] = [\vec{ct}'] + [\vec{\gamma}\beta] \left(\frac{{}^t[\vec{\gamma}\beta]}{(1+\gamma)} ct' + [\vec{r}'] \right) \\ [\vec{r}] = [\vec{r}'] + [\vec{\gamma}\beta] \left(\frac{{}^t[\vec{\gamma}\beta]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{cases}$$

Pour cela on remarque que :

$$ct = \gamma ct' + {}^t[\vec{\gamma}\beta][\vec{r}'] = ct' + (\gamma - 1)ct' + {}^t[\vec{\gamma}\beta][\vec{r}'] \text{ or}$$

comme $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$ on a $\frac{\gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)} = \gamma - 1$.

(2) forme avec double produit vectoriel noté \times :

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}']) \\ [\vec{r}] = \gamma([\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}']) + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} ([\vec{\beta}] \times ([\vec{\beta}] \times [\vec{r}'])) \end{cases}$$

On remarque que : $\frac{(\gamma-1)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}$,

$$[\vec{\beta}] \times ([\vec{\beta}] \times [\vec{r}']) = ({}^t[\vec{\beta}][\vec{r}']) \cdot [\vec{\beta}] - ({}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}]) \cdot [\vec{r}'] \text{ (formule du double produit vectoriel)}$$

et que

$$\left({}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) \cdot [\vec{\beta}] = [\vec{\beta}] \cdot \left({}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) = \left([\vec{\beta}] \quad {}^t[\vec{\beta}] \right) [\vec{r}'] \text{ (associativité de la composition d' applications)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} [\vec{r}] &= \gamma([\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}']) + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \left([\vec{\beta}] \times \left([\vec{\beta}] \times [\vec{r}'] \right) \right) \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + (\gamma-1)[\vec{r}'] + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \left(\left({}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) \cdot [\vec{\beta}] - \left({}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}] \right) \cdot [\vec{r}'] \right) \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + [\vec{r}'] \left((\gamma-1) - \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} {}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}] \right) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \left({}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) \cdot [\vec{\beta}] \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} [\vec{\beta}] \cdot \left({}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) = [\vec{r}'] + [\gamma\vec{\beta}] \left(\frac{{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{aligned}$$

