

***A • Guimier***

***Une nouvelle approche axiomatique  
de la théorie de la relativité restreinte :***

*(Document de synthèse du 24 / 05 / 2021 )*

## ***Une nouvelle approche axiomatique de la théorie de la relativité restreinte :***

On considère notre espace physique assimilé à un espace affine réel à 3 dimensions  $E$  dans lequel peuvent se mouvoir librement par rapport à  $E$  et entre eux d'autres points appelés "observateurs". On considère  $\mathcal{P}$  un ensemble de ces points  $O$  auxquels on associe un repère orthormé  $R_O(\vec{O}, \vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O)$  et une horloge  $H_O$ .  
On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées sur  $\mathcal{P}$ :

**(Hypothèse 1) :** Pour tout point  $O \in \mathcal{P}$ , on suppose que pour tout point  $Q$  défini à partir de  $R_O$  on peut lui associer une horloge synchronisée avec celle de  $O$ .

**Conséquence :** La synchronisation des horloges dans chaque repère permet d'associer à chaque observateur  $O$  un repère  $\mathcal{R}_O$  quadridimensionnel d'origine  $\mathcal{O} : O$  au temps  $t_0 = 0$ .

On définit ainsi une famille de repères quadridimensionnels  $(\mathcal{R}_O)$ .

**(Hypothèse 2) :** On suppose que les espaces  $E_O$ ,  $O \in \mathcal{P}$ , sont les uns par rapport aux autres en mouvement rectiligne uniforme et que si un point est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un point de  $\mathcal{P}$  il l'est aussi pour tout autre point de  $\mathcal{P}$ .

**Conséquence :** Si une ligne d'univers est une droite pour  $\mathcal{R}_O$ , elle est aussi une droite pour tout autre  $\mathcal{R}_{O'}$ .

**(Hypothèse 3) :**

On suppose que les espaces  $E_O$  défini par  $(R_O, H_O)$  sont munis des mêmes lois physiques qui permettent de définir les mêmes unités de mesure d'espace et de temps pour chaque  $E_O$ .

On choisit un point arbitraire  $O_0$  de  $\mathcal{P}$  et le temps  $t_{O_0} = 0$  indiqué par  $H_{O_0}$ .

Pour tout point  $O$  de  $\mathcal{P}$ , par translation spatiale prenons comme nouvelle origine spatiale de  $E_O$  le point  $O'$  de  $R_O$  qui coïncide avec  $O_0$  au temps  $t_{O_0} = 0$ .

Prenons comme nouvelle origine temporelle de  $E_O$ , l'instant où  $O'$  et  $O_0$  coïncident.

Par la suite, on supposera que tout les repères spatiaux  $R_O$  auront leur origines confondues au temps  $t = 0$  de leur horloge respective.

Et par conséquent la famille de repères quadridimensionnels  $(\mathcal{R}_O)$  aura la même origine spatio-temporelle.

**(Hypothèse 4) :** On suppose que la lumière a un mouvement rectiligne uniforme dans tout  $E_O$  et que sa vitesse numérique  $c$  est constante et indépendante de la source d'émission et de l'espace  $E_O$  considéré.

**Conséquence :** Si  $X = (ct, x, y, z)$  est le vecteur représentant la position d'un photon issu de l'observateur  $O$  au temps  $t = 0$  pour le repère  $\mathcal{R}_O$

et si  $X' = (ct', x', y', z')$  est le vecteur représentant la position de ce même photon issu de l'observateur  $O'$  au temps  $t' = 0$

on a  $c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2}$  pour  $t > 0$  et  $t' > 0$ .

Donc les coordonnées du photon vérifieront simultanément :

$c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$  et  $c^2 t'^2 - x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$  dans  $\mathcal{R}_O$  et  $\mathcal{R}_{O'}$ .

Si on considère la forme quadratique  $\Phi(X) = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0$ .

### Le problème à résoudre :

On cherche une transformation  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  inversible qui donne les coordonnées spatio-temporelles

du point  $P$  pour l'observateur  $O$  en fonction de celles de l'observateur  $O'$ ,

telle que sous les hypothèses 1, 2, 3, 4 ci-dessus possède les invariants suivant :

(1)  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,

(2)  $T$  transforme les droites affines en droites affines,

(3) si  $X = T(X') : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0$  c'est à dire que  $T$  laisse invariant le cône d'isotropie de  $\Phi$ .

Remarque :

L'inversibilité permet d'avoir un groupe de transformation.

La première condition vient de l'origine commune des 2 repères et que dès que  $T$  est affine, elle est linéaire.

Les 2 autres conditions traduisent les 2 invariances admises par les hypothèses 2 et 4.

Le seul paramètre qui lie  $O$  et  $O'$  est la vitesse relative  $\vec{V}$  de  $O'$  par rapport à  $O$  et donc  $T = T(\vec{V})$ .

Pour cela on va utiliser les 2 théorèmes suivants donnés dans toute leur généralité :

**Théorème 1 :** ( P • Boyer . "Algèbre et Géométries " . C&M 2015 p.51 ).

Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une bijection d'un espace affine  $\mathcal{E}$  de dimension  $\geq 2$  sur un corps  $\mathbb{K}$  possédant au moins 3 éléments, telle que pour tout  $a, b, c$  alignés alors  $f(a), f(b), f(c)$  sont alignés, alors  $f$  est semi-affine.

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$   $f$  est affine.

(Ce théorème est appelé théorème fondamental de la géométrie affine • Abouabdillah Driss a proposé une version améliorée de ce théorème : (<https://ssrn.com/abstract=3181422>) en remplaçant l'hypothèse  $f$  bijective par  $f$  surjective ).

Conséquence : Dans un espace affine réel les bijections qui conservent les droites affines sont les applications affines bijectives.

On note  $\mathcal{C}(\phi) = \{x / \phi(x, x) = 0\}$  le cône d'isotropie de  $\phi$  une forme bilinéaire symétrique et  $\text{Rad } \phi = \{x / \forall y \phi(x, y) = 0\}$ .

Remarque : Si  $\phi$  est la forme bilinéaire symétrique associée à  $\Phi = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \text{Rad } \phi = \{0\}$ .

**Théorème 2 :** ( R. Goblot . "Algèbre linéaire " Masson 1995 p.254 )

Soit  $\phi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $E$  espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , une forme bilinéaire symétrique telle que  $\text{Rad } \phi \neq \mathcal{C}(\phi)$

Pour qu'une forme bilinéaire  $\phi'$  soit proportionnelle à  $\phi$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{C}(\phi) = \mathcal{C}(\phi')$ .

Les conditions (1) et (2) imposées à  $T$  implique que  $T$  est linéaire (Théorème 1).

Soit  $M$  est la matrice qui représente  $T$  dans les bases associées aux repères  $\mathcal{R}_O$  et  $\mathcal{R}_{O'}$ .

Si on note  $X' = MX$ , on a  $\Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = \Phi(MX) = 0$

alors (Théorème 2)  $\exists \lambda \neq 0, \forall X \Phi(MX) = \lambda \cdot \Phi(X)$

en notant  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  on a :

$${}^t(\mathbf{MX})\mathbf{G}(\mathbf{MX}) = {}^t\mathbf{X}{}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{X} = \lambda \cdot {}^t\mathbf{X}\mathbf{G}\mathbf{X} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M} = \lambda \cdot \mathbf{G}$$

la dernière équivalence est conséquence de la symétrie des matrices  ${}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M}$  et  $\mathbf{G}$ .  
(J.-M. Monier. "Algèbre 1 et 2". Dunod 1997 .)

### Evaluation de $\lambda$ :

Montrons d'abord que si la vitesse de  $\mathbf{O}'$  mesurée par l'observateur  $\mathbf{O}$  est  $\vec{V}$ ,  
la vitesse de  $\mathbf{O}$  mesurée par l'observateur  $\mathbf{O}'$  est  $-\vec{V}$  :  
(Pour le moment on ne dispose que des hypothèses ci – dessus )

On se place d'abord du point de vue de l'observateur  $\mathbf{O}$ .

$\mathbf{O}'$  s'éloignant de  $\mathbf{O}$ .

Un rayon lumineux part de  $\mathbf{O}$  vers  $\mathbf{O}'$  au temps  $t_0$ , atteint  $\mathbf{O}'$  au temps  $t_1$  au point  $\mathbf{P}_1$ ,  
et revient immédiatement vers  $\mathbf{O}$ , qui est atteint au temps  $t_2$  puis repart immédiatement  
vers  $\mathbf{O}'$  qui est atteint au temps  $t_3$  au point  $\mathbf{P}_2$

puis retourne immédiatement vers  $\mathbf{O}$  qui est atteint au temps  $t_4$ .

Il y a donc un double aller – retour.

La vitesse numérique  $c$  du rayon lumineux étant la même dans les 2 sens on a :

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2} \text{ et } t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2} .$$

Lorsque le rayon lumineux atteint, au temps  $t_1$ , le point  $\mathbf{P}_1$ ,

$\mathbf{O}'$  continue à s'éloigner de  $\mathbf{O}$  alors que le rayon retourne vers  $\mathbf{O}$ .

$$t_3 - t_1 = \frac{t_4 - t_0}{2} \text{ est la durée entre les 2 contacts du rayon lumineux et } \mathbf{O}' .$$

Si on suppose que  $\mathbf{O}'$  a une vitesse uniforme  $\vec{V}$  de module  $V$  on a  $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\| = V \cdot \frac{t_4 - t_0}{2}$ .

On peut remarquer que  $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\|$  est aussi égal à la la différence

$$\|\overrightarrow{\mathbf{OP}_2}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{OP}_1}\| = c \left( \frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2} \right) .$$

$$\text{Donc } V = c \left( \frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}} \right) = c \left( \frac{t_4 - 2t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right)$$

$$= c \left( \frac{(t_4 - t_0) - 2(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) = c \left( 1 - 2 \left( \frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right) .$$

Soit  $\mathbf{M} = (m_{i,j})$  la matrice de transformation telle que  $\mathbf{X}' = \mathbf{M}\mathbf{X}$ ,

$X$  les coordonnées d'un point  $P$  dans la base de  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ ,

$X'$  les coordonnées d'un même point  $P$  dans la base de  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$ .

Plaçons nous maintenant du point de vue de l'observateur  $\mathcal{O}'$  qui veut évaluer  $V'$  ;  
la vitesse de  $\mathcal{O}$  par rapport à lui – même , à partir de la même expérience en observant l'horloge de  $\mathcal{O}$  :  
Considérons les coordonnées de l'observateur  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$  :

$\mathcal{O}$  a pour coordonnée  $(ct, 0, 0, 0)$  dans la base associée à  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$

et  $\mathcal{O}$  aura pour coordonnées :

$$(ct, x, y, z) = (m_{1,1} \cdot ct', m_{2,1} \cdot ct', m_{3,1} \cdot ct', m_{4,1} \cdot ct')$$
 pour la base associée à  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$ .

Comme  $ct = m_{1,1} \cdot ct'$  on peut écrire qu'en  $\mathcal{O}'$   $t = \alpha \cdot t'$  avec nécessairement  $\alpha > 0$ .

Si l'observateur  $\mathcal{O}'$  évalue  $V'$  en observant l'horloge sur l'observateur  $\mathcal{O}$ ,  
il obtiendra la même valeur que l'observateur  $\mathcal{O}$  puisque en faisant le même calcul il obtient :

$$V' = c \left( 1 - 2 \left( \frac{\alpha \cdot t_2 - \alpha \cdot t_0}{\alpha \cdot t_4 - \alpha \cdot t_0} \right) \right) = c \left( 1 - 2 \left( \frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right) = V.$$

La vitesse dans les 2 cas est collinéaire à  $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$  et le sens de  $\overrightarrow{V}$  est celle de  $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$  pour  $\mathcal{O}$   
et  $\overrightarrow{\mathcal{O}'\mathcal{O}}$  pour  $\mathcal{O}'$ .

On peut maintenant évaluer  $\lambda$  :

(N.M.J. Woodhouse. " Special Relativity " •Springer 2002 p.80)

D'après l'axiome 2 les lois de la physique étant les mêmes pour les espaces associés  
à  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  la dilatation des durée sera la même que ce soit l'observateur  $\mathcal{O}$  observant  $\mathcal{O}'$   
ou bien que ce soit l'observateur  $\mathcal{O}'$  observant  $\mathcal{O}$  puisque les situations physiques sont les mêmes ,  
le modules des vitesses étant identique.

Les coordonnées spatio - temporelle de  $\mathcal{O}'$  sont représentée par le vecteur  $X = {}^t(ct, x, y, z)$   
pour l'observateur  $\mathcal{O}$ , et par  $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$  pour l'observateur  $\mathcal{O}'$ .

Comme  $X = MX'$  on en déduit que le temps  $t$  mesuré par un observateur situé en  $\mathcal{O}$  d'une horloge  
située en  $\mathcal{O}'$  et qui indique le temps  $t'$  à un observateur situé en  $\mathcal{O}'$  vérifie  $t = m_{1,1} t'$

avec  $m_{1,1} > 0$  si on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps car :

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} ct' \\ m_{2,1} ct' \\ m_{3,1} ct' \\ m_{4,1} ct' \end{bmatrix}.$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en  $\mathcal{O}'$  observe une horloge  
située en  $\mathcal{O}$  qui indique un temps  $t$  pour l'observateur situé en  $\mathcal{O}$  •L'observateur situé en  $\mathcal{O}'$   
mesure alors un temps  $t'$  •Comme  $X' = M^{-1}X$  et si on pose  $N = M^{-1}$  on aura  $t' = n_{1,1} t$   
et  $n_{1,1} > 0$  comme précédemment.

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment  $n_{1,1} = m_{1,1}$ .

De  ${}^tMGM = \lambda \cdot G$ ,  $\lambda \neq 0$ , on en déduit que  ${}^tM = \lambda \cdot G \cdot M^{-1} G^{-1}$ .

D'où  $M^{-1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G) \Rightarrow m_{1,1} = n_{1,1} = (M^{-1})_{1,1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1}$ .

Or  $(\mathbf{G} \cdot {}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{G})_{1,1} = m_{1,1}$  donc  $\lambda = 1$ .

Les matrices  $\mathbf{M}$  qui vérifient  ${}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M} = \mathbf{G}$  sont appelées matrices de Lorentz et forment un sous-groupe  $\mathbf{L}$  du groupe  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ . En particulier  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{G} \cdot {}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}$  et  $\det^2(\mathbf{M}) = 1$ .

Pour expliciter  $\mathbf{M}$  dans le cas qui nous intéresse on va utiliser les 2 théorèmes suivants :

**Théorème 3** : (J-M. Souriau. "Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.378)

Toute matrice  $\mathbf{M}$  de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M} = \exp(\alpha \mathbf{N}) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & {}^t\mathbf{X} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \text{ avec } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } {}^t\mathbf{X}\mathbf{X} = 1, {}^t\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\text{De plus } \exp(\alpha \mathbf{N}) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^t\mathbf{X} \\ \text{sh}(\alpha) \mathbf{X} & (\text{Id}_{\mathbb{R}^3 - 1} + (\text{ch}(\alpha) - 1) \mathbf{X} {}^t\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

**Théorème 4** :

(R. Mneimé, F. Testard. "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques". Hermann Paris 1986.)

Soit  $\mathbf{M}$  une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice  $\mathbf{S}'$  symétrique définie positive et  $\mathbf{O}$  orthogonale telles que  $\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{S}'$ .

Conséquences :

On en déduit en posant  $\mathbf{S} = \mathbf{O}\mathbf{S}'\mathbf{O}^t \Leftrightarrow \mathbf{S}' = {}^t\mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}$  que  $\mathbf{M}$  peut se décomposer de manière unique en  $\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{S}' = \mathbf{O}({}^t\mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}) = \mathbf{S}\mathbf{O}$ .

Cela entraîne que décomposition du théorème 3 est unique :

il suffit de vérifier que  $\exp(\alpha \mathbf{N})$  est définie positive.

$\alpha \mathbf{N}$  est symétrique réelle, il existe donc une matrice  $\mathbf{U}$  orthogonale réelle et une matrice diagonale réelle  $\mathbf{D} = (d_{i,i})$  telle que  $\alpha \mathbf{N} = {}^t\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}$ .

Comme  $\exp(\alpha \mathbf{N}) = {}^t\mathbf{U}\exp(\mathbf{D})\mathbf{U}$  et  $\exp(\mathbf{D}) = (\exp(d_{i,i}))$  les valeurs propres de  $\exp(\alpha \mathbf{N})$  sont strictement positive et  $\exp(\alpha \mathbf{N})$  est définie positive.

De la formule  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$  on en déduit que  $\det(\exp(\alpha \mathbf{N})) = 1$

et que  $\det(\mathbf{M}) = \varepsilon \cdot \det(\boldsymbol{\Omega}) = \pm 1$ .

On considère maintenant  $\mathbf{O}'$  qui s'éloigne de  $\mathbf{O}$  à la vitesse constante  $\vec{V}$ . On pose  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ .

On considère les 2 repères  $\mathcal{R}_{\mathbf{O}}$  et  $\mathcal{R}_{\mathbf{O}'}$  définis plus haut.

$X$  étant les coordonnées d'un point  $\mathbf{P}$  dans la base associée à  $\mathcal{R}_{\mathbf{O}}$ ,

$X'$  étant les coordonnées de ce même point  $\mathbf{P}$  dans la base associée à  $\mathcal{R}_{\mathbf{O}'}$ ,

$\mathbf{M}$  la matrice définie par  $X = \mathbf{M} \cdot X'$  qui est donc une matrice de Lorentz et s'écrit donc

sous la forme  $M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$  (où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^t X \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } {}^t X X = 1, {}^t \Omega \Omega = Id_{\mathbb{R}^3} \text{ . voir théorème 3 .}$$

On va exprimer dans un premier temps exprimer  $\exp(\alpha N)$  en fonction de  $\vec{\beta}$ .

**Théorème 5 :**

En reprenant les notations du théorème 3 on a , si  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$  :

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t [\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}] {}^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1 + \gamma)} \end{bmatrix} \text{ avec } [\vec{\gamma\beta}] \text{ les coordonnées de } \vec{\gamma\beta} \text{ dans } \mathcal{R}_0 .$$

**Démonstration :** On peut donc écrire que les coordonnées de  $\mathcal{O}'$  dans la base associée à  $\mathcal{B}_0$  sont :

$${}^t W = {}^t (ct, {}^t V_1, {}^t V_2, {}^t V_3) = ct {}^t (1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \text{ avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

et dans  $\mathcal{B}'_0$  :  ${}^t W' = {}^t (ct', 0, 0, 0) = ct' {}^t (1, 0, 0, 0)$  avec  $W = M \cdot W'$ .

On remarque d'abord que  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$  donc  $W = \exp(\alpha N) W'$ .

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^t X \\ sh(\alpha) X & (Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X {}^t X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^{t'} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} t ,$$

$$\text{cela entraine que } t \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = {}^{t'} \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha) X_1 \\ sh(\alpha) X_2 \\ sh(\alpha) X_3 \end{bmatrix} \text{ et donc } t = ch(\alpha) {}^{t'} \text{ d'où :}$$

$$\operatorname{ch}(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\alpha) \\ \operatorname{sh}(\alpha)X_1 \\ \operatorname{sh}(\alpha)X_2 \\ \operatorname{sh}(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ch}(\alpha)\vec{\beta} = \operatorname{sh}(\alpha)\vec{X},$$

donc  $\vec{\beta} = \operatorname{th}(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = \operatorname{th}^2(\alpha)$  puisque  $\vec{X}^2 = 1$ .

On pose  $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$ .

Comme  $1 - \operatorname{th}^2(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\alpha)} \Rightarrow \operatorname{ch}^2(\alpha) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\alpha)} = \frac{1}{1 - \vec{\beta}^2} = \gamma^2$ ,

comme  $\operatorname{ch}(\alpha) \geq 1$   $\gamma = \operatorname{ch}(\alpha)$ ; comme  $\operatorname{sh}^2(\alpha) = \operatorname{ch}^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$   
 $= \frac{1}{1 - \vec{\beta}^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \beta^2$ .

En résumé on a  $\gamma = \operatorname{ch}(\alpha)$ ,  $\gamma^2 \beta^2 = \operatorname{sh}^2(\alpha)$ ,  $\beta^2 = \operatorname{th}^2(\alpha)$ .

D'autre part :

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} = (\gamma - 1) = \operatorname{ch}(\alpha) - 1$$

$$\text{et } X_i X_j = \frac{(\beta_i \beta_j)}{\operatorname{th}^2(\alpha)} = \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} \text{ donc}$$

$$(\operatorname{ch}(\alpha) - 1) X_i X_j = \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_i \beta_j, \text{ ce qui permet d'écrire que :}$$

$$\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\operatorname{ch}(\alpha) - 1) X^t X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1 + \gamma)}.$$

Comme  $\operatorname{sh}(\alpha)X_i = \frac{\operatorname{sh}(\alpha)\beta_i}{\operatorname{th}(\alpha)} = \operatorname{ch}(\alpha)\beta_i = \gamma\beta_i$  d'où le résultat.



En résumé :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \right) \Omega \end{bmatrix}$$

avec  ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$ .

$$\text{Par la suite si on note } C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & C\Omega \end{bmatrix}.$$

Remarques :

$$(1) C[\vec{\beta}] = \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \right) \vec{\beta} = \vec{\beta} + \gamma^2 \frac{[\vec{\beta}][{}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}]]}{(1+\gamma)} = [\vec{\beta}] \left( 1 + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}^2}{(1+\gamma)} \right) \\ = [\vec{\beta}] \left( 1 + \frac{\gamma^2 - 1}{(1+\gamma)} \right) = \gamma [\vec{\beta}].$$

(2) Si  $M = M' \cdot M''$  est le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation avec :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma\beta})\Omega \\ \vec{\gamma\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma'\beta'}) \\ \vec{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma''\beta''}) \\ \vec{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

$$\text{alors } M = \begin{bmatrix} \gamma \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1) & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' + \gamma' \vec{\beta}' C'' \\ \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' + \gamma' C' \vec{\beta}'' & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma' \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \text{ et } \Omega = C^{-1} (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'').$$

En notant que  $\left( \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right) \left( \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right) = \vec{\beta} \left( \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right) \vec{\beta} = \vec{\beta}^2 \left( \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right)$  et que  $\gamma^2 \vec{\beta}^2 = \gamma^2 - 1$  :

$$\left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \right) \cdot \left( Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \right) \\ = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} - \gamma^3 \frac{\vec{\beta}^2 \left( \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\vec{\beta} \vec{\beta}} \right)}{(1+\gamma)^2}$$

$$= \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)^2} \left( -\gamma(1 + \gamma) + \gamma^2(1 + \gamma) - \gamma(\gamma^2 - 1) \right) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc  $C^{-1} = \left( \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\left[ \begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \\ \left[ \begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \\ \left[ \begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \\ \left[ \begin{array}{c} \vec{\gamma\beta} \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right]}{(1 + \gamma)} \right)^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}$ , ce qui permet d'écrire  $\Omega$  en fonction de  $\vec{\beta}'$ ,  $\vec{\beta}''$  :

$$\Omega = \left( \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) \left( \gamma \gamma' \vec{\beta}' \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}'' + C' C'' \right)$$

$$\text{avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C' = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}' \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} \text{ et } C'' = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}'' \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}''}{(1 + \gamma')}.$$

La connaissance de  $C^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \overset{t}{\leftarrow} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}$  permet d'évaluer  $\Omega$  en fonction de  $M$  :

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \text{Considérons le bloc } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{3,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$$

qui représente les composantes spatiales des vecteurs spatiaux de la base associée à  $\mathbf{O}'$  exprimées dans la base associée à  $\mathbf{O}$ .

On aura  $\Omega = C^{-1} \mathcal{M}$ .

**Remarques :**

(1) Si  $\vec{\beta} // \vec{i}$  alors les termes non diagonaux de  $C$  sont nuls ,

$$\text{et un seul terme diagonal de } C \text{ est différent de } 1 : 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta^2 = \frac{(1+\gamma) + \gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)}$$

$$= \frac{1+\gamma+\gamma^2-1}{(1+\gamma)} = \gamma \text{ car } \gamma^2-1 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma^2 \beta^2.$$

(2) Comme  $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$  on peut remplacer , en notant  $\delta_j^i$  le symbole de Kronecker ,

$$\delta_j^i + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_i \beta_j \text{ par } \delta_j^i + (\gamma-1) \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} \text{ dans l'évaluation de } Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X^t X$$

$$\text{car } \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}.$$

(3)  $\gamma \cdot (1+\beta) = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1}$  car :

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \Leftrightarrow \gamma \cdot \beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

$$\text{Donc } \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = \ln \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2-1} \right);$$

et on retrouve que  $\text{argth}(\beta) = \text{argcosh}(\gamma) = \alpha$  car  $\gamma = ch(\alpha)$  et  $\beta = th(\alpha)$ .

(4) De  $\beta = \sqrt{\beta^2}$  ,  $\beta^2 = th^2(\alpha)$  et  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c} \Rightarrow \|\vec{V}\| < c$  .

(5) Sachant que  $[\exp(\alpha N)]^{-1} = \exp(-\alpha N)$  ,  $\gamma = ch(\alpha)$  et  $\vec{\beta} = th(\alpha) \vec{X}$  il vient :

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [{}^t\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -{}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ -[{}^t\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}.$$

**Evaluation de  $\varepsilon = \pm 1$  :**

Comme

$$W = MW' = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [{}^t\vec{\gamma\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \gamma\varepsilon & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ \varepsilon[{}^t\vec{\gamma\beta}] & C\Omega \end{bmatrix} W'$$

avec  ${}^tW = ({}^t c, {}^t V_1, {}^t V_2, {}^t V_3)$  ,  ${}^tW' = ({}^t c', 0, 0, 0)$  . On en déduit que  $t = \varepsilon \cdot \gamma \cdot t'$  .

Donc si  $\epsilon = -1$ , il y aurait un renversement du temps difficile à justifier physiquement.  
Par la suite on suppose que  $\epsilon = +1$ .

Reste à évaluer  $\Omega$ . On posera  $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ .

Remarquons tout d'abord que si  $M$  est symétrique  $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$

car  $M = S \Omega = M Id_{\mathbb{R}^4}$  avec  $S$  symétrique définie positive, par unicité de la décomposition  $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$   
Evaluons d'abord directement un cas particulier.

**Théorème 6 :**

Dans le cas où  $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$  et de même sens,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$  et de même sens,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$  et de même sens,

$$M \text{ se réduit à } M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ T & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \text{ avec } T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Démonstration :**

Si  $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$  de même sens,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$  de même sens,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$  de même sens,

$$M \text{ s'écrit sous la forme } M = M' \cdot \Omega = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ T & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \cdot \Omega$$

avec  $\beta = \beta_x$ ,  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$  où  $\Omega$  est une matrice orthogonale d'ordre 3.

$$\text{Si } M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \omega_{2,4} \\ 0 & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} & \omega_{3,4} \\ 0 & \omega_{4,2} & \omega_{4,3} & \omega_{4,4} \end{bmatrix},$$

$$X1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } X3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ on a :}$$

$$M' \overset{\lambda}{\Omega} X1 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,2} \\ \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{4,2} \end{bmatrix}, M' \overset{\lambda}{\Omega} X2 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,3} \\ \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} \text{ et } M' \overset{\lambda}{\Omega} X3 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,4} \\ \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Cela implique que } \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{3,2} \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d'où : \overset{\lambda}{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

Comme  $\overset{\lambda}{\Omega}$  est orthogonal et les sens des axes étant conservés  $\overset{\lambda}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$ .

**Remarque :** Tout calcul fait on a :

$$M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Donc les valeurs propres de  $M'$  sont  $\gamma \cdot (1 + \beta)$ ,  $\gamma \cdot (1 - \beta)$ ,  $1$ .  
En se servant des remarques du théorème 5 on a :

$$\gamma \cdot (1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \text{ et donc que } \gamma \cdot (1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

De plus  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) = \operatorname{argth}(\beta) = \alpha$ , les valeurs propres de  $M'$  peuvent s'écrire :

$$\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)\right) = e^\alpha, \quad \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)\right) = e^{-\alpha} \text{ et } 1.$$

**Théorème 7 :**

Dans le cas où  $\vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ ,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ , ici  $\vec{V}$  n'est plus parallèle à  $\vec{Ox}$ ,

alors  $\vec{\Omega} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}$ .

**Démonstration :**

Par la suite par abus de notation, on note  $\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  les vecteurs de base successivement temporel et spatiaux de la base  $\mathcal{B}$  de dimension 4. De même pour les autres bases.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\ & \begin{array}{c} \downarrow P \\ \downarrow P \end{array} & \\ \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) & \xrightarrow{M'} & \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \end{array}$$

$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base spatio-temporelle associée à l'observateur  $O$ .

$\mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  est une base spatio-temporelle associée à l'observateur  $O'$ .

Contrairement au lemme précédent  $\vec{V}$  n'est pas forcément parallèle à la composante spatiale de  $\vec{i}$  mais par contre la composante spatiale de  $\vec{i}$  reste parallèle à celle de  $\vec{i}'$ , de même pour  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  malgré le mouvement de  $O'$  pour les 2 observateurs.

$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  est une autre base associée à  $O$  obtenue par une rotation  $R$  des composantes

$$\text{spatiales de } \vec{i}, \vec{j} \text{ et } \vec{k} \cdot \text{On pose } P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix}.$$

La rotation est choisie pour que la composante spatiale de  $\vec{i}_1$  soit parallèle à celle de  $\vec{V}$ .

On remarque que  $P$  est une matrice (orthogonale) de Lorentz.

Soit donc  $P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$  la matrice orthogonale de changement de base laissant le temps invariant et transformant  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  en  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ .

Considérons  $\mathcal{B}'_1$  défini par  $P = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$ . Puisque la composante spatiale de  $\vec{i}$  est parallèle à celle de  $\vec{i}'$ , de même pour  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  la même rotation  $R$  donnera la composante spatiale  $\vec{i}_1$  parallèle à celle de  $\vec{i}'$ ,

de même pour  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$ , avec en plus la composante spatiale de  $\vec{i}'_1$  parallèle à celle de  $\vec{V}$ .

D'après le théorème 6  $M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  est la matrice de Lorentz de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}'_1$ :

Comme  $M = PM^{-1}P^{-1} \Leftrightarrow M' = {}^t P M P$  et comme  $M$  est de Lorentz, elle est de la forme  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}$ .

Par construction  $M' = {}^t P (\Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}) P = ({}^t P \Lambda(\vec{\beta}) P) ({}^t P \hat{\Omega} P)$ .

On remarque que  ${}^t P \Lambda(\vec{\beta}) P$  est symétrique et que  ${}^t P \hat{\Omega} P$  est orthogonal.

Comme  $M' = M' \cdot Id_{\mathbb{R}^4} = ({}^t P \Lambda(\vec{\beta}) P) ({}^t P \hat{\Omega} P)$ , par unicité de la décomposition  ${}^t P \hat{\Omega} P = Id_{\mathbb{R}^4}$ . On en déduit que  $\hat{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$ .

**Théorème 8 :**

Dans le cas où seulement  $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$

avec  $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\Omega$  étant une rotation d'axe  $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$  qui rend parallèle  $\vec{Oy}$  et  $\vec{O'y'}$  et donc aussi  $\vec{Oz}$  et  $\vec{O'z'}$ .

**Démonstration :**

On applique le théorème 6 : la rotation entraîne que  $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ ,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ .

Evaluation de  $\Omega$  dans le cas général :

**Théorème 9 :**

Soit la matrice  $P$  de la rotation  $R1$  dans l'espace à 3 dimensions qui amène  $\vec{Ox}$  sur  $\vec{V}$ .

De même on définit la matrice  $Q$  de la rotation  $R2$  dans l'espace à 3 dimensions qui amène  $\vec{O'x'}$  sur  $\vec{V}$  dans la même direction.

Soit  $R$  la rotation qui, après avoir effectué  $R1$  et  $R2$ , aligne les axes autres que celui aligné sur  $\vec{V}$ .

Alors  $\hat{\Omega} = P^{-1} R Q$

**Démonstration :**

On posera  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ ,  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

et  $M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix}$  avec  $\beta = \|\vec{\beta}\|$ .

La matrice de Lorentz  $M$  telle que  $X = MX'$  est aussi la matrice de passage de la base

de  $\mathcal{R}_\varnothing : \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à celle de  $\mathcal{R}_\varnothing' : \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ .

$M$  s'écrit  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$ .

Considérons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\
 & & \downarrow \overset{\wedge}{Q} \\
 & & \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \\
 \overset{\wedge}{P} \downarrow & & \downarrow \overset{\wedge}{R} \\
 \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) & \xrightarrow{M'} & \mathcal{B}''_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}''_1, \vec{k}''_1)
 \end{array}$$

On a  $M = \begin{pmatrix} \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{P} \\ \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{R} & \overset{\wedge}{Q} \\ \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{R} & \overset{\wedge}{Q} \end{pmatrix}$

d'où  $\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{P} \\ \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{P} \end{pmatrix}$  et  $\overset{\wedge}{\Omega} = \begin{pmatrix} \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{R} & \overset{\wedge}{Q} \\ \overset{\wedge}{P} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{R} & \overset{\wedge}{Q} \end{pmatrix}$  par unicité de la décomposition.

**Remarque :**

Dans N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " •Springer 2002 p.82

on montre que toute matrice de Lorentz  $M$  peut se mettre sous la forme  $M = \overset{\wedge}{H} M' \overset{\wedge}{K}$

avec  $\overset{\wedge}{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$ ,  $\overset{\wedge}{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$ ,

$K$  et  $H$  matrices orthogonales et  $M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ T & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix}$  avec  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  or :

$M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega} = \overset{\wedge}{H} M' \overset{\wedge}{K} = \begin{pmatrix} \overset{\wedge}{H} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{H} \\ \overset{\wedge}{H} & \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\wedge}{H} & \overset{\wedge}{K} \\ \overset{\wedge}{H} & \overset{\wedge}{K} \end{pmatrix}$  par unicité  $\Lambda(\vec{\beta}) = \overset{\wedge}{H} M' \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{H}$  et  $\overset{\wedge}{\Omega} = \overset{\wedge}{H} \overset{\wedge}{K}$ .

on peut identifier  $\overset{\wedge}{H}$  à  $\overset{\wedge}{P}$  ou à  $\overset{\wedge}{P} \cdot \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{R}$ .

Dans le premier cas  $\overset{\wedge}{K} = \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{R} \cdot \overset{\wedge}{Q}$ , dans le deuxième  $\overset{\wedge}{K} = \overset{\wedge}{Q}$ .

La décomposition  $M = \overset{\wedge}{H} M' \overset{\wedge}{K}$  n'est pas unique contrairement à  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$ .

Si on considère  $\Lambda'(\vec{\beta}) = \overset{t}{\wedge} \overset{\wedge}{\Omega} \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$ ,  $\Lambda'(\vec{\beta})$  est symétrique

et  $M = \overset{\wedge}{\Omega} \Lambda'(\vec{\beta})$  et cela d'une manière unique.



Calcul des valeurs et vecteurs propres de  $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$  :

On remarque que :

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]][\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{\gamma^2\beta^2[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + (\gamma-1)[\vec{\beta}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + \gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\beta)\gamma\beta \\ (1+\beta)\gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = (1+\beta)\gamma \begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix},$$

de même :  $\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]][\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{\gamma^2\beta^2[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + (\gamma-1)[\vec{\beta}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + \gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta-1)\gamma\beta \\ (1-\beta)\gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = (1-\beta)\gamma \begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}.$$

Le produit des 2 premières valeurs propres est  $P' = (1+\beta)\gamma(1-\beta)\gamma = 1$ , leur somme est  $S' = 2\gamma$ . Or  $\det(M) = 1$  et  $\text{Trace}(M) = \gamma + 3 + \gamma - 1 = 2(\gamma + 1)$ .

Donc la somme des 2 autres est  $S = 2$ . Donc les autres racines sont égales à 1.

Si on a :

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix} \text{ alors}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma + {}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] \\ a[\vec{\beta}] + [\vec{u}] + \frac{[\vec{\beta}]{}^t[\vec{\beta}][\vec{u}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix}.$$

Une solution possible est  $a = 0$  et tout vecteur  $\vec{u}$  tel que  ${}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] = 0$ .

2 vecteurs propres possibles associés à la valeur propre 1 sont  $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{u} \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$

avec  ${}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] = 0$ ,  ${}^t[\vec{\beta}][\vec{v}] = 0$ ,  ${}^t[\vec{v}][\vec{u}] = 0$ .  $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{u} \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$  sont du genre espace.

Plus généralement tout vecteur de la forme  $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{w} \end{bmatrix}$  avec  $\vec{w} \perp \vec{\beta}$  est invariant.

On aura l'ensemble spectral suivant associé à  $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\beta}] \\ [\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\beta}]{}^t[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$ :

$$\left\{ \left( \begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}, (1+\beta)\gamma \right), \left( \begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}, (1-\beta)\gamma \right), \left( \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{u} \end{bmatrix}, 1 \right), \left( \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{v} \end{bmatrix}, 1 \right) \right\}.$$

On a vu qu'une matrice de Lorentz  $M$  sans rotation pouvait s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & & & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ & Id_{\mathbb{R}^3} & + & \frac{[\vec{\gamma\beta}] {}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{pmatrix} \text{ cest à dire sous forme développée :}$$

$$X = MX' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct \\ [\vec{r}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & & & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ & Id_{\mathbb{R}^3} & + & \frac{[\vec{\gamma\beta}] {}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ [\vec{r}'] \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ct = \gamma ct' + {}^t[\vec{\gamma\beta}] [\vec{r}'] = \gamma (ct' + {}^t[\vec{\beta}] [\vec{r}']) \\ [\vec{r}] = [\vec{r}'] + [\vec{\gamma\beta}] \left( \frac{{}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{cases} .$$

On trouve dans la littérature d'autres formes par exemple :

(1) forme symétrique :

$$\begin{cases} [\vec{ct}] = [\vec{ct}'] + [\vec{\gamma\beta}] \left( \frac{{}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} ct' + [\vec{r}'] \right) \\ [\vec{r}] = [\vec{r}'] + [\vec{\gamma\beta}] \left( \frac{{}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{cases}$$

Pour cela on remarque que :

$$ct = \gamma ct' + {}^t[\vec{\gamma\beta}] [\vec{r}'] = ct' + (\gamma - 1) ct' + {}^t[\vec{\gamma\beta}] [\vec{r}'] \text{ or}$$

comme  $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$  on a  $\frac{\gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)} = \gamma - 1$ .

(2) forme avec double produit vectoriel noté  $\times$  :

$$\begin{cases} ct = \gamma (ct' + {}^t[\vec{\beta}] [\vec{r}']) \\ [\vec{r}] = \gamma ([\vec{\beta}] ct' + [\vec{r}']) + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} ([\vec{\beta}] \times ([\vec{\beta}] \times [\vec{r}'])) \end{cases}$$

On remarque que :  $\frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)}$  ,

$$[\vec{\beta}] \times ([\vec{\beta}] \times [\vec{r}']) = ({}^t[\vec{\beta}] [\vec{r}']) \cdot [\vec{\beta}] - ({}^t[\vec{\beta}] [\vec{\beta}]) \cdot [\vec{r}'] \text{ (formule du double produit vectoriel)}$$

et que

$$\left( {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) \cdot [\vec{\beta}] = [\vec{\beta}] \cdot \left( {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) = \left( [\vec{\beta}] \quad {}^t[\vec{\beta}] \right) [\vec{r}'] \text{ (associativité de la composition d' applications )}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} [\vec{r}] &= \gamma([\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}']) + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \left( [\vec{\beta}] \times \left( [\vec{\beta}] \times [\vec{r}'] \right) \right) \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + (\gamma-1)[\vec{r}'] + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \left( \left( {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) \cdot [\vec{\beta}] - \left( {}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}] \right) \cdot [\vec{r}'] \right) \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + [\vec{r}'] \left( (\gamma-1) - \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} {}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}] \right) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \left( {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) \cdot [\vec{\beta}] \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} [\vec{\beta}] \cdot \left( {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}'] \right) = [\vec{r}'] + [\gamma\vec{\beta}] \left( \frac{{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{aligned}$$

