

***ERRATA***

***ADDENDUM***

*(Fondements mathématiques de la relativité restreinte .  
Alain Guimier )*

**Errata :**

Rappel :

Soit un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  muni de 3 bases  $\mathcal{B} = (e_i)$ ,

$\mathcal{B}_1 = (e^1_i)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_i)$ .

Soit  $M$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ,  $A$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}_1$ ,

$B$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}'$ . Alors  $M = A \cdot B$ .

En effet si  $X$  est un vecteur de  $E$  on a par définition de  $M = (\mu_i^j)$  :  $e'_i = \sum_{j=1}^n \mu_i^j e_j$ .

$$\text{De plus } X = \sum_{j=1}^n \lambda^j e_j = \sum_{i=1}^n \lambda^i e'_i = \sum_{i=1}^n \lambda^i \sum_{j=1}^n \mu_i^j e_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^i \mu_i^j e_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda^i \mu_i^j e_j.$$

$$\text{D'où : } \lambda^j = \sum_{i=1}^n \mu_i^j \lambda^i \text{ et } [X]_{\mathcal{B}} = M[X]_{\mathcal{B}'}.$$

De même :  $[X]_{\mathcal{B}} = A[X]_{\mathcal{B}_1}$  et  $[X]_{\mathcal{B}_1} = B[X]_{\mathcal{B}'}$ , et donc  $[X]_{\mathcal{B}} = AB[X]_{\mathcal{B}'}$ .

Par définition la matrice de Lorentz  $M$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  :  $X = MX'$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Donc dans le schéma :} & \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\ & P \downarrow & & \downarrow P \\ & \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) & \xrightarrow{M'} & \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \end{array}$$

on a  $M = PM'^tP$ .  
et dans le schéma :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\ & & \downarrow Q \\ & & \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \\ & P \downarrow & \downarrow R \\ \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) & \xrightarrow{\Lambda_1(\vec{\beta})} & \mathcal{B}''_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}''_1, \vec{k}''_1) \end{array}$$

$$M = (P\Lambda_1(\vec{\beta})^tP) (P^tR^tQ) \text{ d'où } \Lambda(\vec{\beta}) = (P\Lambda_1(\vec{\beta})^tP) \text{ et } \hat{\Omega} = P^tR^tQ.$$

$$\text{De même } M^{-1} = QR\Lambda_1(-\vec{\beta})^tP = ((QR)\Lambda_1(-\vec{\beta})^t(QR)^t)(QR)^tP = \Lambda(-\vec{\beta})QR^tP,$$

$$\text{On vérifie que } M = \Lambda(\vec{\beta})\hat{\Omega}, M^{-1} = \Lambda(-\vec{\beta})^t(\hat{\Omega}).$$

**Remarques :**

(I)

(a) Autre décomposition :

Dans  $N \cdot M \cdot J \cdot \text{Woodhouse}$ , *Special Relativity*, Springer p.82

l'auteur montre que toute matrice de Lorentz  $M$  peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^tHH = Id_3 = {}^tKK.$$

Montrons que cette écriture est équivalente à la formule démontrée dans le fascicule :

$$M = \Lambda(\vec{\beta})\hat{\Omega}.$$

$$\text{Si } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \right),$$

La première parenthèse est symétrique la seconde est orthogonale. Par unicité on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} = \Lambda(\vec{\beta}) \text{ et } \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \right) = \hat{\Omega}.$$

D'où  $H^tK = \hat{\Omega}$ .

Réciproquement nous avons vu dans le fascicule que :

$$\Lambda(\vec{\beta}) = PL^tP \text{ avec } P \text{ matrice orthogonale.}$$

Donc toute matrice de Lorentz  $M$  peut s'écrire sous la forme :

$$M = PL^tP\hat{\Omega}.$$

On a plus généralement le résultat suivant :

**Théorème :**

On a les équivalences suivantes si  $M$  est une matrice d'ordre  $n$  :

$$M = O_1S_1O_2 \Leftrightarrow M = SO \Leftrightarrow M = O'S'$$

avec  $O, O_1, O_2$  matrice orthogonales,  $S, S', S_1$  matrices symétriques.

Démonstration :

Première équivalence :

Si  $M = O_1S_1O_2 = (O_1S_1^tO_1)(O_1O_2) = SO$  avec  $S = O_1S_1^tO_1$  matrice symétrique

$O = O_1O_2$  matrice orthogonale.

Si  $M = SO$ ,  $S$  est symétrique et  $O$  orthogonale. Comme  $S$  est symétrique,  $S$  peut

s'écrire  $S = \Omega D^t\Omega$  donc  $M = \Omega D(\Omega O) = O_1S_1O_2$  avec  $\Omega = O_1$  orthogonal,

${}^t\Omega O = O_2$  orthogonal,  $D = S_1$  symétrique.

Deuxième équivalence :

Si  $M = SO \Rightarrow M = O_1S_1O_2$  (première équivalence)

$M = O_1 S_1 O_2 = O_1 (O_2 {}^t O_2) S_1 O_2 = (O_1 O_2) ({}^t O_2 S_1 O_2) = O' S'$  avec :

$O' = O_1 O_2$  orthogonal,  $S' = {}^t O_2 S_1 O_2$  symétrique.

Si  $M = O' S' = O' S' ({}^t O' O') = (O' S' {}^t O') O' = S O$  avec

$S = O' S' {}^t O'$  symétrique,  $O'$  orthogonale.

Corollaire :

Toute matrice inversible  $M$  peut s'écrire sous la forme :

$M = O_1 S_1 O_2 = S O = O' S'$ , les 2 dernières décompositions étant uniques,

avec  $O, O_1, O_2$  matrice orthogonales,  $S, S', S_1$  matrices symétriques,

et  $O' = O, O = O_1 O_2, S' = {}^t O' S O'$ .

Démonstration :

On a vu précédemment que  $M = OS$  de manière unique, comme  $O = O'$  et

$S' = O' S' {}^t O'$  donc  $O'$  et  $S'$  sont uniques.

La décomposition  $M = O_1 S_1 O_2$  n'est pas unique :

Si  $S_1$  n'est pas une matrice diagonale,  $S_1 = {}^t \Omega D \Omega$  avec  $\Omega$  orthogonale et

$D$  diagonale donc  $M = (O_1 {}^t \Omega) D (\Omega O_2)$ .

Si  $S_1$  est une matrice diagonale et  $O_3$  une matrice orthogonale quelconque :

$M = O_1 S_1 O_2 = (O_1 O_3) ({}^t O_3 S_1 O_3) ({}^t O_3 O_2)$ .

(b) Une autre décomposition :

Si  $M = SO$  avec  $S$  symétrique et  $O$  orthogonale alors  $M = O [{}^t OSO] = OS'$ ,

$S' = {}^t OSO$  étant symétrique.

Calculons

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \gamma {}^t [\vec{\beta}] \\ \gamma [\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma {}^t [\vec{\beta}] \Omega \\ \gamma {}^t \Omega [\vec{\beta}] & {}^t \Omega C \Omega \end{bmatrix} \text{ or}$$

$$C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} [\vec{\beta}] {}^t [\vec{\beta}] \text{ et donc}$$

$${}^t \Omega C \Omega = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} {}^t \Omega [\vec{\beta}] {}^t [\vec{\beta}] \Omega = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) ({}^t \Omega [\vec{\beta}])$$

et

$$N = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) \\ {}^t \Omega [\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) \end{bmatrix}$$

$$\text{et en reprenant les notations du fascicule, } \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma {}^t [\vec{\beta}] \\ \gamma [\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} :$$

$$({}^t \hat{\Omega}) \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega} = \Lambda \left( {}^t \hat{\Omega} [\vec{\beta}] \right) \text{ d'où } M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega} = \hat{\Omega} \Lambda \left( {}^t \hat{\Omega} [\vec{\beta}] \right) \text{ et si}$$

$$M = \hat{\Omega}' \Lambda(\vec{\beta}') \text{ alors } M' = \Lambda \left( \hat{\Omega}'[\vec{\beta}'] \right) \hat{\Omega}'.$$

$$\text{Donc si } M^{-1} = \hat{\Omega} \Lambda(-\vec{\beta}) = \Lambda(-\hat{\Omega}[\vec{\beta}]) \hat{\Omega}.$$

(c) Encore une autre décomposition :

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{M} \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

↓ P

$$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \quad \downarrow Q$$

↓ T

$$\mathcal{B}_2(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\Lambda_1(\vec{\beta})} \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1)$$

$$\text{On a } M = P T \Lambda_1(\vec{\beta})^t Q = (P T^t Q) (Q \Lambda_1(\vec{\beta})^t Q) = (P T^t Q) \Lambda(\vec{\beta}).$$

(d) On peut calculer  $\Omega$  comme produit de rotations autour d'un axe si  $\det(\Omega) = +1$  : il suffit d'appliquer la méthode des angles d'Euler.

(cf. par exemple J-D Eiden. Espaces vectoriels euclidiens. Calvage et Mounet).

(2) Dépendance de  $\hat{\Omega}$  par rapport à  $\vec{\beta}$  :

Si dans la décomposition  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}$ ,  $\hat{\Omega}$  était indépendant de  $\vec{\beta}$  alors

si on considère le produit  $M = \Lambda(\vec{\beta}_1) \Lambda(\vec{\beta}_2)$  c'est une matrice de Lorentz de la forme :

$$M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega} = \Lambda(\vec{\beta}_1) \Lambda(\vec{\beta}_2) \text{ avec } \vec{\beta} \text{ somme relativiste de } \vec{\beta}_1 \text{ et de } \vec{\beta}_2.$$

Si  $\hat{\Omega}$  était indépendant de  $\vec{\beta}$ , en faisant tendre  $\vec{\beta}_1$  et  $\vec{\beta}_2$  vers  $\mathbf{0}$  on aurait :

$$\hat{\Omega} = I_4 \text{ si qui est en général faux.}$$

On a vu que  $\Omega$  pouvait être construit à partir de la direction de  $\vec{\beta}$ .

Donc  $\Omega$  est fonction de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}$ .

(3)

Propriétés des matrices de Lorentz : Soit  $L$  l'ensemble des matrices de Lorentz.

Soit  $M, N$  2 matrices de Lorentz :  ${}^t M G M = G$ ,  ${}^t N G N = G$

Comme  $\det({}^t M G M) = \det(G) \Rightarrow \det^2(M) = 1 \neq 0$ ,  $M$  est donc inversible.

$\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  est une matrice de Lorentz donc  $L \neq \emptyset$ ,

${}^t(MN) G (MN) = {}^t N ({}^t M G M) N = {}^t N G N = G$  donc  $L$  stable pour la composition,

${}^t M G M = G \Rightarrow G = ({}^t M)^{-1} G M^{-1} = {}^t(M^{-1}) G M^{-1}$  et  $L$  est stable pour l'inversion.

Donc  $L$  est un sous-groupe de  $GL(\mathbb{R}^n)$ .

Son inverse  $M^{-1}$  vérifie :  $G = ({}^tM)^{-1}GM^{-1}$  donc  ${}^tMG = GM^{-1}$  et

$M^{-1} = G{}^tM G$  et  ${}^tM = GM^{-1}G$  Donc  ${}^tM$  est de Lorentz puisque  $L$  est un groupe et que  $G$  est de Lorentz .

De plus par définition une matrice  $M$  de Lorentz vérifie :  ${}^tMGM = G$  c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\left[ \begin{aligned} & [m_{1,1}^2 - m_{2,1}^2 - m_{3,1}^2 - m_{4,1}^2, m_{1,1}m_{1,2} - m_{2,1}m_{2,2} - m_{3,1}m_{3,2} - m_{4,1}m_{4,2}, m_{1,1}m_{1,3} - m_{2,1}m_{2,3} - m_{3,1}m_{3,3} - m_{4,1}m_{4,3}, m_{1,1}m_{1,4} \\ & - m_{2,1}m_{2,4} - m_{3,1}m_{3,4} - m_{4,1}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{1,2} - m_{2,1}m_{2,2} - m_{3,1}m_{3,2} - m_{4,1}m_{4,2}, m_{1,2}^2 - m_{2,2}^2 - m_{3,2}^2 - m_{4,2}^2, m_{1,2}m_{1,3} - m_{2,2}m_{2,3} - m_{3,2}m_{3,3} - m_{4,2}m_{4,3}, m_{1,2}m_{1,4} \\ & - m_{2,2}m_{2,4} - m_{3,2}m_{3,4} - m_{4,2}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{1,3} - m_{2,1}m_{2,3} - m_{3,1}m_{3,3} - m_{4,1}m_{4,3}, m_{1,2}m_{1,3} - m_{2,2}m_{2,3} - m_{3,2}m_{3,3} - m_{4,2}m_{4,3}, m_{1,3}^2 - m_{2,3}^2 - m_{3,3}^2 - m_{4,3}^2, m_{1,3}m_{1,4} \\ & - m_{2,3}m_{2,4} - m_{3,3}m_{3,4} - m_{4,3}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{1,4} - m_{2,1}m_{2,4} - m_{3,1}m_{3,4} - m_{4,1}m_{4,4}, m_{1,2}m_{1,4} - m_{2,2}m_{2,4} - m_{3,2}m_{3,4} - m_{4,2}m_{4,4}, m_{1,3}m_{1,4} - m_{2,3}m_{2,4} - m_{3,3}m_{3,4} \\ & - m_{4,3}m_{4,4}, m_{1,4}^2 - m_{2,4}^2 - m_{3,4}^2 - m_{4,4}^2] \end{aligned} \right]$$

Par identification si  $m_j$  est la  $j$  - ième colonne de  $M$  et  $\varphi(m_i, m_j) = m_{1,i} \cdot m_{1,j} - \sum_{k=2}^4 m_{k,i} \cdot m_{k,j}$   
 $= {}^t m_i G m_j$  on a :

$\varphi(m_i, m_j) = 0$  si  $i \neq j$

$$\varphi(m_i, m_i) = (m_{1,i})^2 - \sum_{k=2}^4 (m_{k,i})^2 = -1 \text{ pour } i \neq 1 \text{ et } \varphi(m_1, m_1) = (m_{1,1})^2 - \sum_{k=2}^4 (m_{k,1})^2 = +1.$$

C'est à dire que les vecteurs colonnes de  $M$  forment une base  $\varphi$  - orthogonale .

Comme  ${}^tM$  est de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\left[ \begin{aligned} & [m_{1,1}^2 - m_{1,2}^2 - m_{1,3}^2 - m_{1,4}^2, m_{1,1}m_{2,1} - m_{1,2}m_{2,2} - m_{1,3}m_{2,3} - m_{1,4}m_{2,4}, m_{1,1}m_{3,1} - m_{1,2}m_{3,2} - m_{1,3}m_{3,3} - m_{1,4}m_{3,4}, m_{1,1}m_{4,1} \\ & - m_{1,2}m_{4,2} - m_{1,3}m_{4,3} - m_{1,4}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{2,1} - m_{1,2}m_{2,2} - m_{1,3}m_{2,3} - m_{1,4}m_{2,4}, m_{2,1}^2 - m_{2,2}^2 - m_{2,3}^2 - m_{2,4}^2, m_{2,1}m_{3,1} - m_{2,2}m_{3,2} - m_{2,3}m_{3,3} - m_{2,4}m_{3,4}, m_{2,1}m_{4,1} \\ & - m_{2,2}m_{4,2} - m_{2,3}m_{4,3} - m_{2,4}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{3,1} - m_{1,2}m_{3,2} - m_{1,3}m_{3,3} - m_{1,4}m_{3,4}, m_{2,1}m_{3,1} - m_{2,2}m_{3,2} - m_{2,3}m_{3,3} - m_{2,4}m_{3,4}, m_{3,1}^2 - m_{3,2}^2 - m_{3,3}^2 - m_{3,4}^2, m_{3,1}m_{4,1} \\ & - m_{3,2}m_{4,2} - m_{3,3}m_{4,3} - m_{3,4}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{4,1} - m_{1,2}m_{4,2} - m_{1,3}m_{4,3} - m_{1,4}m_{4,4}, m_{2,1}m_{4,1} - m_{2,2}m_{4,2} - m_{2,3}m_{4,3} - m_{2,4}m_{4,4}, m_{3,1}m_{4,1} - m_{3,2}m_{4,2} - m_{3,3}m_{4,3} \\ & - m_{3,4}m_{4,4}] \end{aligned} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} -m_{3,4} & m_{4,4} & m_{4,1}^2 & -m_{4,2}^2 \\ m_{4,4} & m_{4,1}^2 & -m_{4,2}^2 & -m_{4,3}^2 \\ m_{4,1}^2 & -m_{4,2}^2 & -m_{4,3}^2 & -m_{4,4}^2 \end{array} \right]$$

C'est à dire que les vecteurs lignes de  $\mathbf{M}$  forment une base  $\varphi$  - orthogonale .

(4)

Dans (C •Semay , B •Silvestre -Brac • "Relativité restreinte"

. Dunod 2010. p123 ) il est proposé un test pour savoir

si 2 bases en mouvement ont leur vecteurs de base parallèles : mesurer les coefficients directeur de

$\vec{\beta}$  dans les 2 bases .

Cela peut être déduit du résultat suivant :

Soit 2 bases  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}'$  orthormées , s'il existe un vecteur  $\vec{V} \neq \vec{0}$  ayant les mêmes composantes dans  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}'$  alors ou bien

$\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}'$  se déduisent l'une de l'autre par une rotation d'axe  $\vec{V}$  ou bien  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}'$

ont leur vecteurs de base parallèles :

Démonstration :

Si  $\vec{V} = \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{B}'\mathbf{X}$  , soit  $\mathbf{A}$  la matrice orthormée de passage de  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{B}'$  on a  $\mathbf{B}' = \mathbf{A}\mathbf{B}$  et donc si  $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$

$\vec{0} = (\mathbf{B} - \mathbf{B}')\mathbf{X} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{X} = (\mathbf{Id}$

$- \mathbf{A})\mathbf{B}\mathbf{X}$  donc  $\mathbf{B}\mathbf{X}$  est un vecteur propre de  $\mathbf{A}$  qui est une matrice orthonormée

de dimension 3 qui est une rotation d'axe  $\vec{V}$ . Donc si  $\mathbf{A}$  n'est pas une rotation d'axe  $\vec{V}$   $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ .

Dans le cas où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}'$  on pour vecteur commun  $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$  ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}'$  se déduisant l'une de l'

autre par une rotation d'axe  $\vec{V}$ ,

il est possible pour l'observateur  $\mathbf{O}'$  , par signaux lumineux parallèles à  $\vec{\beta}$ , d'obtenir une base  $\mathbf{B}_1$  dont les vecteurs seraient parallèle à ceux de  $\mathbf{B}$  et de calculer la rotation qui permet de passer de  $\mathbf{B}_1$  à  $\mathbf{B}$ .

(5) Nouvelle expérience :

On se place d'abord du point de vue de l'observateur  $\mathbf{O}$ .

$\mathbf{O}'$  s'éloignant de  $\mathbf{O}$ .

Un rayon lumineux part de  $\mathbf{O}$  vers  $\mathbf{O}'$  au temps  $t_0$  , atteint  $\mathbf{O}'$  au temps  $t_1$  , au point  $\mathbf{P}_1$ ,

et revient immédiatement vers  $\mathbf{O}$ ,

qui est atteint au temps  $t_2$  puis repart immédiatement vers  $\mathbf{O}'$  qui est atteint au temps  $t_3$  au point  $\mathbf{P}_2$

puis retourne immédiatement vers  $\mathbf{O}$  qui est atteint au temps  $t_4$ .

La vitesse numérique  $c$  du rayon lumineux étant la même dans les 2 sens on a :  $t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2}$  et  $t_3$

$$= \frac{t_2 + t_4}{2} .$$

Lorsque le rayon lumineux atteint , au temps  $t_1$  , le point  $\mathbf{P}_1$  ,  $\mathbf{O}'$  continue à s

'éloigner de  $\mathbf{O}$  alors que le rayon retourne vers  $\mathbf{O}$ .

$t_3 - t_1 = \frac{t_4 - t_0}{2}$  est la durée entre les 2 contacts du rayon lumineux et  $\mathbf{O}'$ .

Si on suppose que  $\mathbf{O}'$  a une vitesse uniforme de module  $V$  on a  $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\| = V \cdot \frac{t_4 - t_0}{2}$ .

On peut remarquer que  $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\|$  est aussi égal à la la différence  $\|\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{P}_2}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{P}_1}\| = c \left( \frac{t_4 - t_2}{2} \right)$

$$- \frac{t_2 - t_0}{2} \Bigg) .$$

$$\text{Donc } V = c \left( \frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}} \right) = c \left( \frac{t_4 - 2t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right) = c \left( \frac{(t_4 - t_0) - 2(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) = c \left( 1 - 2 \frac{(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) .$$

Soit  $M = (m_{i,j})$  la matrice de passage des repères associés à

$O'$  et à  $O$  dans l'espace à 4 dimensions :

$O$  a pour coordonnée  $(ct, 0, 0, 0)$  pour l'observateur  $O$ ,

$O'$  aura pour coordonnées  $(ct', x', y', z') = (m_1, {}_R ct, m_2, {}_R ct, m_3, {}_R ct, m_4, {}_R ct)$  pour  $O'$  et

donc  $ct' = m_1, {}_R ct$  . On peut écrire qu'en  $O$   $t' = \alpha \cdot t$  avec  $\alpha \neq 0$  .

Donc si  $O'$  évalue  $V$  en observant l'horloge sur  $O$ , il obtiendra la même valeur que  $O$  :

$$c \left( 1 - 2 \frac{\alpha \cdot t_2 - \alpha \cdot t_0}{\alpha \cdot t_4 - \alpha \cdot t_0} \right) = c \left( 1 - 2 \frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) = V .$$

$\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0}$  et  $c$  sont indépendants de l'observateur considéré, de plus  $\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0}$  est indépendant de l'

'origine temporelle

et de l'unité de temps choisies .

Tout autre observateur  $O''$  en translation uniforme par rapport  $O$  évaluera la même valeur  $V$  pour la vitesse relative entre  $O$  et  $O'$  .

(6) Résumé des définitions, postulats et résultats :

Soit  $E$  notre espace physique assimilé à un espace affine à 3 dimensions .

On appellera observateur  $O$  tout point plongé dans  $E$ , associé à un repère orthormé  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et à une horloge  $H$  .

On suppose qu'on puisse, à chaque point  $P$  du repère mobile  $\mathcal{R}_3$  défini par  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

associer une horloge  $H_P$ ,

synchrone à  $H$  . On obtient donc un temps  $t$  qui est indépendant des variables spatiales

• On peut donc définir

un espace vectoriel à 4 dimensions  $\mathcal{E}$  et associer à  $O$  une base vectorielle  $\mathcal{B}$  .

On peut prendre comme base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(T, I, J, K)$  avec  $(I, J, K)$  les vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  pris au temps  $t = 0$ . Cela implique que  $(I, J, K)$  est une famille libre et  $T$  un vecteur normé de même direction que la droite d'univers de  $O$ .

$T$  est donc indépendant de  $(I, J, K)$  et la famille  $(T, I, J, K)$  est libre et forme donc une base .

On suppose que  $O$  ne subit aucune force et que l'espace observé par  $O$  est galiléen :

tout point mobile  $P$  du repère  $\mathcal{R}_3$

sur lequel n'agit aucune force est rectiligne uniforme et sa ligne d'univers est une droite dans l'espace à 4 dimensions

et réciproquement . Dans ce cas il existe un seul temps  $t$  possible à un choix d'unité et d'origine temporelle près .

On considère maintenant une famille  $(\mathbf{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  d'observateurs ayant les mêmes propriétés que  $\mathbf{O}$ .

Cela suppose que tous les  $\mathbf{O}_\lambda$  sont sans masse sinon ils interagiraient entre eux ou pourraient être affectés

par d'autres objets ayant une masse.

Les espaces  $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  étant galiléens les  $(\mathbf{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sont animés les uns par rapport aux autres d

'un mouvement

rectiligne uniforme. On cherche une transformation  $T_{\lambda, \lambda'}$ , qui permette de passer d

'un espace  $\mathcal{E}_\lambda$  à un espace  $\mathcal{E}_{\lambda'}$ ;

Sans nuire à la généralité des résultats,

quitte à faire des translations que tous les  $(\mathbf{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  coïncident aux temps

$t_\lambda = 0$  de leurs horloges respectives au même point de l'espace  $\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}$  au temps  $t_\lambda = 0$  sera l

'origine commune de

tous les repères associés aux  $\mathbf{O}_\lambda$ .

Toute droite d'univers peut être considérée comme ligne d'univers d

'un observateur ne subissant pas de force.

Une droite d'univers pour un observateur est donc une droite d'univers pour tout autre observateur.

La transformation  $T_{\lambda, \lambda'}$  est donc linéaire et peut donc la représenter dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$

'associées à  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{O}'$

par une matrice  $\mathbf{M} = (m_{i,j})$ , matrice de passage de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

De la linéarité de  $T_{\lambda, \lambda'}$ , on en déduit que la vitesse relative de  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{O}'$

'mesurée par les 2 observateurs est la même.

Soit un photon émis depuis l'origine spatiale  $\mathbf{O}$  au temps  $t = 0$  dans une direction quelconque.

Soit  $\Phi$  la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^4$  par  $\Phi(X) = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$  avec  $X = (ct, x, y, z)$ .

Soit  $\mathbf{Z}$  représentant les coordonnées du photon dans la base  $\mathcal{B}$ . On a  $\Phi(\mathbf{Z}) = 0$ .

Soit  $\mathbf{Z}'$  représentant les coordonnées du photon dans la base  $\mathcal{B}'$ . On a aussi  $\Phi(\mathbf{Z}') = 0$ .

On aura donc  $(\Phi(\mathbf{Z}') = 0 \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}') = 0) \Leftrightarrow ({}^t\mathbf{Z}'\mathbf{G}\mathbf{Z}' = 0 \Leftrightarrow {}^t\mathbf{Z}'\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{Z}' = 0)$  avec  $\mathbf{G}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les 2 formes quadratique  $\Phi(\cdot)$  et  $\Phi(\mathbf{M}(\cdot))$  ayant le même cône d'isotropie, elles sont proportionnelles.

D'où  ${}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M} = \mu\mathbf{G}$  avec  $\lambda \neq 0$ .  $\mathbf{O}'$  est représentée par le vecteur  $X = {}^t(ct, x, y, z)$  dans  $\mathcal{B}$ , et par  $X' =$

${}^t(ct', 0, 0, 0)$  dans  $\mathcal{B}'$ .

Comme  $X = \mathbf{M}X'$  on en déduit que le temps  $t$  mesuré par un observateur situé en  $\mathbf{O}$  d'une horloge située en  $\mathbf{O}'$  et qui indique le temps  $t'$  à un observateur situé en  $\mathbf{O}'$  vérifie  $t = m_{1,1}t'$ .

avec  $m_{1,1} > 0$ : on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps.

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} ct' \\ m_{2,1} ct' \\ m_{3,1} ct' \\ m_{4,1} ct' \end{bmatrix}$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en  $O'$  observe une horloge située en  $O$  qui indique un temps  $t$  pour l'observateur situé en  $O$ . L'observateur de  $O'$

mesure alors un temps  $t'$ . Dans cette situation  $X = {}^t(ct, 0, 0, 0)$  dans  $\mathcal{B}$ , et  $X' = {}^t(ct', x', y', z')$  dans  $\mathcal{B}'$ . Comme  $X' = M^{-1}X$  et donc  $t' = (M^{-1})_{1,1}t$  (2)

et  $(M^{-1})_{1,1} > 0$  comme précédemment.

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment, en suivant (N • M • J • Woodhouse • "Special Relativity" • Springer 2002),

les unités dans les 2 repères étant définies de la même façon :  $(M^{-1})_{1,1} = M_{1,1}$ . D'après ce qui précède

$${}^tMGM = \mu G \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}^*.$$

$$D'où \mu GM^{-1} = {}^tMG \Rightarrow M^{-1} = \mu^{-1} G^{-1} {}^tMG = \mu^{-1} G {}^tMG.$$

$$\text{Si } M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \Rightarrow \mu^{-1} G {}^tMG = \begin{bmatrix} \frac{m_{1,1}}{\mu} & \frac{m_{2,1}}{\mu} & \frac{m_{3,1}}{\mu} & \frac{m_{4,1}}{\mu} \\ \frac{m_{1,2}}{\mu} & \frac{m_{2,2}}{\mu} & \frac{m_{3,2}}{\mu} & \frac{m_{4,2}}{\mu} \\ \frac{m_{1,3}}{\mu} & \frac{m_{2,3}}{\mu} & \frac{m_{3,3}}{\mu} & \frac{m_{4,3}}{\mu} \\ \frac{m_{1,4}}{\mu} & \frac{m_{2,4}}{\mu} & \frac{m_{3,4}}{\mu} & \frac{m_{4,4}}{\mu} \end{bmatrix} = M^{-1}$$

Comme  $(M^{-1})_{1,1} = m_{1,1} \Rightarrow \mu = 1$ .

L'opérateur de transformation  $T_{\lambda, \lambda'}$ , est donc défini par une matrice  $M$  qui vérifie  ${}^tMGM = G$ .

On peut alors écrire  $M$  sous la forme :

(J-M. Souriau. "Calcul Linéaire" • PUF 1964)

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } Y \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } {}^tYY = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\text{or } \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^t Y \\ \text{sh}(\alpha) Y & (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) Y'Y) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$M = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^t Y \\ \text{sh}(\alpha) Y & (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) Y'Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega \end{bmatrix}.$$

Si  $\mathcal{O}'$  est représentée par le vecteur  $X = {}^t(ct, x, y, z)$  dans  $\mathcal{B}$ , et par  $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$  dans  $\mathcal{B}'$ , en écrivant  $X = MX'$  par identification on montre que si  $\vec{V} = {}^t\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$  et  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$  et  $\gamma$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})}} :$$

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \vec{\beta} \\ \gamma \vec{\beta} & \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega \end{bmatrix} \text{ et cela d'une manière unique.}$$

Pour l'unicité voir : R. Mneimé, F. Testard. "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " Hermann Paris 1986,

ou F. R. Gantmacher. "Théorie des matrices " •Edition J •Gabay 1990.

On en déduit que :

(1) Dans le cas où les observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  constate que  $\vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ ,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$  et s'il n'y a pas retournement du temps, la partie orthogonale de  $M$  vérifie  $\Omega = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .

(2) Si une matrice de Lorentz  $M$  ne conserve pas le parallélisme des vecteurs de base spatiaux, et s'il n'y a pas retournement du temps alors  $M$  s'écrit sous la forme  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$

où  $\overset{\wedge}{\Omega}$  est une matrice orthogonale produit de 3 rotations selon le schéma :

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{M} \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

$\downarrow Q$

$P \downarrow$

$$\mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1)$$

$\downarrow R$

$$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\Lambda_1(\vec{\beta})} \mathcal{B}''_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}''_1, \vec{k}''_1)$$

où  $P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_P \end{bmatrix}$  avec  $\Omega_P$  est la rotation qui amène la partie spatiale de  $\vec{i}$  en  $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ ,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_Q \end{bmatrix}$  avec  $\Omega_Q$  est la rotation qui amène la partie spatiale de  $\vec{i}'$  en  $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ ,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_R \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Omega_R \text{ est la rotation qui aligne les parties spatiales de } \vec{\mathbf{j}}'_1 \text{ et } \vec{\mathbf{k}}'_1 \\ \text{sur celle de } \vec{\mathbf{j}}_1 \text{ et } \vec{\mathbf{k}}_1 .$$

Pour  $\Omega_P$  et  $\Omega_R$  prendre une transformation d'Euler, produit de 3 rotations .

Pour d'autres décomposition voir ci – dessus .

Principales hypothèses :

(H1) On peut définir en chaque point d'un repère tri - dimensionnel une horloge synchronisée avec celle de l'observateur .

(H2) Le module de la vitesse d'un photon est invariant pour tout observateur , indépendamment de la direction choisie pour le photon .

(H3) Les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs et ils utilisent tous le même système d'unités .

Principaux théorèmes

(Th1) (R.Goblot ."Algèbre linéaire "Masson 1995) .

Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie :

( $\alpha$ ) Soit  $\Phi \neq \mathbf{0}$  une forme quadratique sur  $\mathbf{E}$  telle que  $\mathbf{E}^{\perp \Phi} \neq \mathcal{C}(\Phi)$

c'est à dire  $\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{E}^{\perp \Phi} \subsetneq \mathcal{C}(\Phi) \subsetneq \mathbf{E}$  .

Soit  $\Phi'$  une autre forme quadratique .

Pour que  $\Phi' = \lambda \Phi$  avec  $\lambda \neq \mathbf{0}$  , Il faut et il suffit que

$\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$  .

( $\beta$ ) Si  $\Phi = \mathbf{0}$  et  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$  alors  $\Phi' = \mathbf{0}$  .

(Th2) ( P •Brousse •Mécanique •Armand Colin 1968 . )

Dans ce qui suit on se limite au changement de temps de classe  $\mathcal{C}^2$  et à dérivée première strictement positive. La propriété d'un mouvement de point dans un espace  $\mathcal{E}$  d'être de classe  $\mathcal{C}^2$  est invariante dans tout changement de temps défini ci - dessus • Il n'existe dans  $\mathcal{E}$  qu'un seul temps galiléen à un changement d'origine ou à un changement d'unité près .

(Th3) ( P •Boyer ."Algèbre et Géométries " . C&M 2015 )

Si une transformation bijective  $\mathbf{T}$  d'un espace vectoriel  $\mathbf{E}$  dans un espace

vectoriel  $\mathbf{E}'$  , telle que  $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}'}$  , transforme les droites affines de  $\mathbf{E}$  en des droites affines de  $\mathbf{E}'$  alors  $\mathbf{T}$  est linéaire .

(Th4) ( cf •R. Mneimé , F. Testard "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " . Hermann Paris 1986 , p 18 )

Soit  $\mathbf{M}$  une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice  $\mathbf{O}$  orthogonale et  $\mathbf{S}$  symétrique définie positive telles que  $\mathbf{M} = \mathbf{SO}$  .

**Principal résultat :**

toute matrice de Lorentz  $\mathbf{M}$  peut s'écrire sous les formes ( si  $\epsilon = +1$  ) :

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} \gamma & \vec{\gamma\beta} \\ \vec{\gamma\beta} & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \vec{\beta}\vec{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \gamma & \vec{\gamma\beta} \\ \vec{\gamma\beta} & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \vec{\beta}\vec{\beta} \end{bmatrix} PR {}^tQ = PR \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\|\vec{\beta}\| & 0 & 0 \\ \gamma\|\vec{\beta}\| & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^tQ.
\end{aligned}$$