

ERRATA

ADDENDUM

*(Fondements mathématiques de la relativité restreinte .
Alain Guimier)*

Errata :

Rappel :

Soit un espace vectoriel E de dimension finie n muni de 3 bases $\mathcal{B} = (e_i)$,

$\mathcal{B}_1 = (e^1_i)$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)$.

Soit M la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , A la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_1 ,

B la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}' . Alors $M = A \cdot B$.

En effet si X est un vecteur de E on a par définition de $M = (\mu_i^j)$: $e'_i = \sum_{j=1}^n \mu_i^j e_j$.

$$\text{De plus } X = \sum_{j=1}^n \lambda^j e_j = \sum_{i=1}^n \lambda^i e'_i = \sum_{i=1}^n \lambda^i \sum_{j=1}^n \mu_i^j e_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^i \mu_i^j e_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda^i \mu_i^j e_j.$$

$$\text{D'où : } \lambda^j = \sum_{i=1}^n \mu_i^j \lambda^i \text{ et } [X]_{\mathcal{B}} = M[X]_{\mathcal{B}'}$$

De même : $[X]_{\mathcal{B}} = A[X]_{\mathcal{B}_1}$ et $[X]_{\mathcal{B}_1} = B[X]_{\mathcal{B}'}$, et donc $[X]_{\mathcal{B}} = AB[X]_{\mathcal{B}'}$.

Par définition la matrice de Lorentz M est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' : $X = MX'$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Donc dans le schéma :} & \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\ & P \downarrow & & \downarrow P \\ & \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) & \xrightarrow{M'} & \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \end{array}$$

on a $M = PM'^tP$.
et dans le schéma :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') \\ & & \downarrow Q \\ & & \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1) \\ & P \downarrow & \downarrow R \\ \mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) & \xrightarrow{\Lambda_1(\vec{\beta})} & \mathcal{B}''_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}''_1, \vec{k}''_1) \end{array}$$

$$M = (P\Lambda_1(\vec{\beta})^tP) (P^tR^tQ) \text{ d'où } \Lambda(\vec{\beta}) = (P\Lambda_1(\vec{\beta})^tP) \text{ et } \hat{\Omega} = P^tR^tQ.$$

$$\text{De même } M^{-1} = QR\Lambda_1(-\vec{\beta})^tP = ((QR)\Lambda_1(-\vec{\beta})^t(QR)^t)(QR)^tP = \Lambda(-\vec{\beta})QR^tP,$$

$$\text{On vérifie que } M = \Lambda(\vec{\beta})\hat{\Omega}, M^{-1} = \Lambda(-\vec{\beta})^t(\hat{\Omega}).$$

Remarques :

(I)

(a) Autre décomposition :

Dans $N \cdot M \cdot J \cdot \text{Woodhouse}$, *Special Relativity*, Springer p.82

l'auteur montre que toute matrice de Lorentz M peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^tHH = Id_3 = {}^tKK.$$

Montrons que cette écriture est équivalente à la formule démontrée dans le fascicule :

$$M = \Lambda(\vec{\beta})\hat{\Omega}.$$

$$\text{Si } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \right),$$

La première parenthèse est symétrique la seconde est orthogonale. Par unicité on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} = \Lambda(\vec{\beta}) \text{ et } \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \right) = \hat{\Omega}.$$

D'où $H^tK = \hat{\Omega}$.

Réciproquement nous avons vu dans le fascicule que :

$$\Lambda(\vec{\beta}) = PL^tP \text{ avec } P \text{ matrice orthogonale.}$$

Donc toute matrice de Lorentz M peut s'écrire sous la forme :

$$M = PL^tP \hat{\Omega}.$$

On a plus généralement le résultat suivant :

Théorème :

On a les équivalences suivantes si M est une matrice d'ordre n :

$$M = O_1S_1O_2 \Leftrightarrow M = SO \Leftrightarrow M = O'S'$$

avec O, O_1, O_2 matrice orthogonales, S, S', S_1 matrices symétriques.

Démonstration :

Première équivalence :

$$\text{Si } M = O_1S_1O_2 = (O_1S_1^tO_1)(O_1O_2) = SO \text{ avec } S = O_1S_1^tO_1 \text{ matrice symétrique}$$

$$O = O_1O_2 \text{ matrice orthogonale.}$$

Si $M = SO$, S est symétrique et O orthogonale. Comme S est symétrique, S peut

$$\text{s'écrire } S = \Omega D^t \Omega \text{ donc } M = \Omega D (\Omega O) = O_1S_1O_2 \text{ avec } \Omega = O_1 \text{ orthogonal,}$$

$${}^t\Omega O = O_2 \text{ orthogonal, } D = S_1 \text{ symétrique.}$$

Deuxième équivalence :

$$\text{Si } M = SO \Rightarrow M = O_1S_1O_2 \text{ (première équivalence)}$$

$M = O_1 S_1 O_2 = O_1 (O_2 {}^t O_2) S_1 O_2 = (O_1 O_2) ({}^t O_2 S_1 O_2) = O' S'$ avec :

$O' = O_1 O_2$ orthogonal, $S' = {}^t O_2 S_1 O_2$ symétrique.

Si $M = O' S' = O' S' ({}^t O' O') = (O' S' {}^t O') O' = S O$ avec

$S = O' S' {}^t O'$ symétrique, O' orthogonale.

Corollaire :

Toute matrice inversible M peut s'écrire sous la forme :

$M = O_1 S_1 O_2 = S O = O' S'$, les 2 dernières décompositions étant uniques,

avec O, O_1, O_2 matrice orthogonales, S, S', S_1 matrices symétriques,

et $O' = O, O = O_1 O_2, S' = {}^t O' S O'$.

Démonstration :

On a vu précédemment que $M = OS$ de manière unique, comme $O = O'$ et

$S' = O' S' {}^t O'$ donc O' et S' sont uniques.

La décomposition $M = O_1 S_1 O_2$ n'est pas unique :

Si S_1 n'est pas une matrice diagonale, $S_1 = {}^t \Omega D \Omega$ avec Ω orthogonale et

D diagonale donc $M = (O_1 {}^t \Omega) D (\Omega O_2)$.

Si S_1 est une matrice diagonale et O_3 une matrice orthogonale quelconque :

$M = O_1 S_1 O_2 = (O_1 O_3) ({}^t O_3 S_1 O_3) ({}^t O_3 O_2)$.

(b) Une autre décomposition :

Si $M = SO$ avec S symétrique et O orthogonale alors $M = O [{}^t OSO] = OS'$,

$S' = {}^t OSO$ étant symétrique.

Calculons

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \gamma {}^t [\vec{\beta}] \\ \gamma [\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma {}^t [\vec{\beta}] \Omega \\ \gamma {}^t \Omega [\vec{\beta}] & {}^t \Omega C \Omega \end{bmatrix} \text{ or}$$

$$C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} [\vec{\beta}] {}^t [\vec{\beta}] \text{ et donc}$$

$${}^t \Omega C \Omega = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} {}^t \Omega [\vec{\beta}] {}^t [\vec{\beta}] \Omega = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) ({}^t \Omega [\vec{\beta}])$$

et

$$N = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) \\ {}^t \Omega [\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) ({}^t \Omega [\vec{\beta}]) \end{bmatrix}$$

$$\text{et en reprenant les notations du fascicule, } \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma {}^t [\vec{\beta}] \\ \gamma [\vec{\beta}] & C \end{bmatrix} :$$

$$({}^t \hat{\Omega}) \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega} = \Lambda \left({}^t \hat{\Omega} [\vec{\beta}] \right) \text{ d'où } M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega} = \hat{\Omega} \Lambda \left({}^t \hat{\Omega} [\vec{\beta}] \right) \text{ et si}$$

$$M = \hat{\Omega}' \Lambda(\vec{\beta}') \text{ alors } M' = \Lambda \left(\hat{\Omega}'[\vec{\beta}'] \right) \hat{\Omega}'.$$

$$\text{Donc si } M^{-1} = \hat{\Omega} \Lambda(-\vec{\beta}) = \Lambda(-\hat{\Omega}[\vec{\beta}]) \hat{\Omega}.$$

(c) Encore une autre décomposition :

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{M} \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

↓ P

$$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \quad \downarrow Q$$

↓ T

$$\mathcal{B}_2(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\Lambda_1(\vec{\beta})} \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1)$$

$$\text{On a } M = P T \Lambda_1(\vec{\beta})^t Q = (P T^t Q) (Q \Lambda_1(\vec{\beta})^t Q) = (P T^t Q) \Lambda(\vec{\beta}).$$

(d) On peut calculer Ω comme produit de rotations autour d'un axe si $\det(\Omega) = +1$: il suffit d'appliquer la méthode des angles d'Euler.

(cf. par exemple J-D Eiden. Espaces vectoriels euclidiens. Calvage et Mounet).

(2) Dépendance de $\hat{\Omega}$ par rapport à $\vec{\beta}$:

Si dans la décomposition $M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}$ était indépendant de $\vec{\beta}$ alors

si on considère le produit $M = \Lambda(\vec{\beta}_1) \Lambda(\vec{\beta}_2)$ c'est une matrice de Lorentz de la forme :

$$M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega} = \Lambda(\vec{\beta}_1) \Lambda(\vec{\beta}_2) \text{ avec } \vec{\beta} \text{ somme relativiste de } \vec{\beta}_1 \text{ et de } \vec{\beta}_2.$$

Si $\hat{\Omega}$ était indépendant de $\vec{\beta}$, en faisant tendre $\vec{\beta}_1$ et $\vec{\beta}_2$ vers $\mathbf{0}$ on aurait :

$$\hat{\Omega} = I_4 \text{ si qui est en général faux.}$$

On a vu que Ω pouvait être construit à partir de la direction de $\vec{\beta}$.

Donc Ω est fonction de \mathcal{B} , \mathcal{B}' et $\frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}$.

(3)

Propriétés des matrices de Lorentz : Soit L l'ensemble des matrices de Lorentz.

Soit M, N 2 matrices de Lorentz : ${}^t M G M = G$, ${}^t N G N = G$

Comme $\det({}^t M G M) = \det(G) \Rightarrow \det^2(M) = 1 \neq 0$, M est donc inversible.

$\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est une matrice de Lorentz donc $L \neq \emptyset$,

${}^t(MN) G (MN) = {}^t N ({}^t M G M) N = {}^t N G N = G$ donc L stable pour la composition,

${}^t M G M = G \Rightarrow G = ({}^t M)^{-1} G M^{-1} = {}^t(M^{-1}) G M^{-1}$ et L est stable pour l'inversion.

Donc L est un sous-groupe de $GL(\mathbb{R}^n)$.

Son inverse M^{-1} vérifie : $G = ({}^tM)^{-1}GM^{-1}$ donc ${}^tMG = GM^{-1}$ et

$M^{-1} = G{}^tM G$ et ${}^tM = GM^{-1}G$ Donc tM est de Lorentz puisque L est un groupe et que G est de Lorentz .

De plus par définition une matrice M de Lorentz vérifie : ${}^tMGM = G$ c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{aligned} & [m_{1,1}^2 - m_{2,1}^2 - m_{3,1}^2 - m_{4,1}^2, m_{1,1}m_{1,2} - m_{2,1}m_{2,2} - m_{3,1}m_{3,2} - m_{4,1}m_{4,2}, m_{1,1}m_{1,3} - m_{2,1}m_{2,3} - m_{3,1}m_{3,3} - m_{4,1}m_{4,3}, m_{1,1}m_{1,4} \\ & - m_{2,1}m_{2,4} - m_{3,1}m_{3,4} - m_{4,1}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{1,2} - m_{2,1}m_{2,2} - m_{3,1}m_{3,2} - m_{4,1}m_{4,2}, m_{1,2}^2 - m_{2,2}^2 - m_{3,2}^2 - m_{4,2}^2, m_{1,2}m_{1,3} - m_{2,2}m_{2,3} - m_{3,2}m_{3,3} - m_{4,2}m_{4,3}, m_{1,2}m_{1,4} \\ & - m_{2,2}m_{2,4} - m_{3,2}m_{3,4} - m_{4,2}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{1,3} - m_{2,1}m_{2,3} - m_{3,1}m_{3,3} - m_{4,1}m_{4,3}, m_{1,2}m_{1,3} - m_{2,2}m_{2,3} - m_{3,2}m_{3,3} - m_{4,2}m_{4,3}, m_{1,3}^2 - m_{2,3}^2 - m_{3,3}^2 - m_{4,3}^2, m_{1,3}m_{1,4} \\ & - m_{2,3}m_{2,4} - m_{3,3}m_{3,4} - m_{4,3}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{1,4} - m_{2,1}m_{2,4} - m_{3,1}m_{3,4} - m_{4,1}m_{4,4}, m_{1,2}m_{1,4} - m_{2,2}m_{2,4} - m_{3,2}m_{3,4} - m_{4,2}m_{4,4}, m_{1,3}m_{1,4} - m_{2,3}m_{2,4} - m_{3,3}m_{3,4} \\ & - m_{4,3}m_{4,4}, m_{1,4}^2 - m_{2,4}^2 - m_{3,4}^2 - m_{4,4}^2] \end{aligned} \right]$$

Par identification si m_j est la j - ième colonne de M et $\varphi(m_i, m_j) = m_{1,i} \cdot m_{1,j} - \sum_{k=2}^4 m_{k,i} \cdot m_{k,j}$
 $= {}^t m_i G m_j$ on a :

$\varphi(m_i, m_j) = 0$ si $i \neq j$

$$\varphi(m_i, m_i) = (m_{1,i})^2 - \sum_{k=2}^4 (m_{k,i})^2 = -1 \text{ pour } i \neq 1 \text{ et } \varphi(m_1, m_1) = (m_{1,1})^2 - \sum_{k=2}^4 (m_{k,1})^2 = +1.$$

C'est à dire que les vecteurs colonnes de M forment une base φ - orthogonale .

Comme tM est de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{aligned} & [m_{1,1}^2 - m_{1,2}^2 - m_{1,3}^2 - m_{1,4}^2, m_{1,1}m_{2,1} - m_{1,2}m_{2,2} - m_{1,3}m_{2,3} - m_{1,4}m_{2,4}, m_{1,1}m_{3,1} - m_{1,2}m_{3,2} - m_{1,3}m_{3,3} - m_{1,4}m_{3,4}, m_{1,1}m_{4,1} \\ & - m_{1,2}m_{4,2} - m_{1,3}m_{4,3} - m_{1,4}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{2,1} - m_{1,2}m_{2,2} - m_{1,3}m_{2,3} - m_{1,4}m_{2,4}, m_{2,1}^2 - m_{2,2}^2 - m_{2,3}^2 - m_{2,4}^2, m_{2,1}m_{3,1} - m_{2,2}m_{3,2} - m_{2,3}m_{3,3} - m_{2,4}m_{3,4}, m_{2,1}m_{4,1} \\ & - m_{2,2}m_{4,2} - m_{2,3}m_{4,3} - m_{2,4}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{3,1} - m_{1,2}m_{3,2} - m_{1,3}m_{3,3} - m_{1,4}m_{3,4}, m_{2,1}m_{3,1} - m_{2,2}m_{3,2} - m_{2,3}m_{3,3} - m_{2,4}m_{3,4}, m_{3,1}^2 - m_{3,2}^2 - m_{3,3}^2 - m_{3,4}^2, m_{3,1}m_{4,1} \\ & - m_{3,2}m_{4,2} - m_{3,3}m_{4,3} - m_{3,4}m_{4,4}], \\ & [m_{1,1}m_{4,1} - m_{1,2}m_{4,2} - m_{1,3}m_{4,3} - m_{1,4}m_{4,4}, m_{2,1}m_{4,1} - m_{2,2}m_{4,2} - m_{2,3}m_{4,3} - m_{2,4}m_{4,4}, m_{3,1}m_{4,1} - m_{3,2}m_{4,2} - m_{3,3}m_{4,3} \\ & - m_{3,4}m_{4,4}] \end{aligned} \right]$$

$$-m_{3,4} \quad m_{4,4} \quad m_{4,1}^2 \quad -m_{4,2}^2 \quad -m_{4,3}^2 \quad -m_{4,4}^2]]$$

C'est à dire que les vecteurs lignes de \mathbf{M} forment une base φ - orthogonale .

(4)

Dans (C •Semay , B •Silvestre -Brac • "Relativité restreinte"

. Dunod 2010. p123) il est proposé un test pour savoir

si 2 bases en mouvement ont leur vecteurs de base parallèles : mesurer les coefficients directeur de $\vec{\beta}$ dans les 2 bases .

Cela peut être déduit du résultat suivant :

Soit 2 bases \mathbf{B} et \mathbf{B}' orthormées , s'il existe un vecteur $\vec{V} \neq \vec{0}$ ayant les mêmes composantes dans \mathbf{B} et \mathbf{B}' alors ou bien

\mathbf{B} et \mathbf{B}' se déduisent l'une de l'autre par une rotation d'axe \vec{V} ou bien \mathbf{B} et \mathbf{B}' ont leur vecteurs de base parallèles :

Démonstration :

Si $\vec{V} = \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{B}'\mathbf{X}$, soit \mathbf{A} la matrice orthormée de passage de \mathbf{B} à \mathbf{B}' on a $\mathbf{B}' = \mathbf{A}\mathbf{B}$ et donc si $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$

$$\vec{0} = (\mathbf{B} - \mathbf{B}')\mathbf{X} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{X} = (\mathbf{Id}$$

- $\mathbf{A})\mathbf{B}\mathbf{X}$ donc $\mathbf{B}\mathbf{X}$ est un vecteur propre de \mathbf{A} qui est une matrice orthonormée

de dimension 3 qui est une rotation d'axe \vec{V} . Donc si \mathbf{A} n'est pas une rotation d'axe \vec{V} $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$.

Dans le cas où \mathbf{B} et \mathbf{B}' on pour vecteur commun $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$, \mathbf{B} et \mathbf{B}' se déduisant l'une de l'

'autre par une rotation d'axe \vec{V} ,

il est possible pour l'observateur \mathbf{O}' , par signaux lumineux parallèles à $\vec{\beta}$, d'obtenir une base \mathbf{B}_1 dont les vecteurs seraient parallèle à ceux de \mathbf{B} et de calculer la rotation qui permet de passer de \mathbf{B}_1 à \mathbf{B} .

(5) Nouvelle expérience :

On se place d'abord du point de vue de l'observateur \mathbf{O} .

\mathbf{O}' s'éloignant de \mathbf{O} .

Un rayon lumineux part de \mathbf{O} vers \mathbf{O}' au temps t_0 , atteint \mathbf{O}' au temps t_1 , au point \mathbf{P}_1 ,

et revient immédiatement vers \mathbf{O} ,

qui est atteint au temps t_2 puis repart immédiatement vers \mathbf{O}' qui est atteint au temps t_3 au point \mathbf{P}_2

puis retourne immédiatement vers \mathbf{O} qui est atteint au temps t_4 .

La vitesse numérique c du rayon lumineux étant la même dans les 2 sens on a : $t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2}$ et t_3

$$= \frac{t_2 + t_4}{2} .$$

Lorsque le rayon lumineux atteint , au temps t_1 , le point \mathbf{P}_1 , \mathbf{O}' continue à s

'éloigner de \mathbf{O} alors que le rayon retourne vers \mathbf{O} .

$t_3 - t_1 = \frac{t_4 - t_0}{2}$ est la durée entre les 2 contacts du rayon lumineux et \mathbf{O}' .

Si on suppose que \mathbf{O}' a une vitesse uniforme de module V on a $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\| = V \cdot \frac{t_4 - t_0}{2}$.

On peut remarquer que $\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\|$ est aussi égal à la la différence $\|\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{P}_2}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{P}_1}\| = c \left(\frac{t_4 - t_2}{2} \right)$

$$- \frac{t_2 - t_0}{2} \Bigg) .$$

$$\text{Donc } V = c \left(\frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}} \right) = c \left(\frac{t_4 - 2t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right) = c \left(\frac{(t_4 - t_0) - 2(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) = c \left(1 - 2 \frac{(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) .$$

Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice de passage des repères associés à

O' et à O dans l'espace à 4 dimensions :

O a pour coordonnée $(ct, 0, 0, 0)$ pour l'observateur O ,

O' aura pour coordonnées $(ct', x', y', z') = (m_1, {}_R ct, m_2, {}_R ct, m_3, {}_R ct, m_4, {}_R ct)$ pour O' et

donc $ct' = m_1, {}_R ct$. On peut écrire qu'en O $t' = \alpha \cdot t$ avec $\alpha \neq 0$.

Donc si O' évalue V en observant l'horloge sur O , il obtiendra la même valeur que O :

$$c \left(1 - 2 \frac{\alpha \cdot t_2 - \alpha \cdot t_0}{\alpha \cdot t_4 - \alpha \cdot t_0} \right) = c \left(1 - 2 \frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) = V .$$

$\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0}$ et c sont indépendants de l'observateur considéré, de plus $\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0}$ est indépendant de l'

'origine temporelle

et de l'unité de temps choisies .

Tout autre observateur O'' en translation uniforme par rapport O évaluera la même valeur V pour la vitesse relative entre O et O' .

(6) Résumé des définitions, postulats et résultats :

Soit E notre espace physique assimilé à un espace affine à 3 dimensions .

On appellera observateur O tout point plongé dans E , associé à un repère orthormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et à une horloge H .

On suppose qu'on puisse, à chaque point P du repère mobile \mathcal{R}_3 défini par $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

associer une horloge H_P ,

synchrone à H . On obtient donc un temps t qui est indépendant des variables spatiales

• On peut donc définir

un espace vectoriel à 4 dimensions \mathcal{E} et associer à O une base vectorielle \mathcal{B} .

On peut prendre comme base $\mathcal{B} = \mathcal{B}(T, I, J, K)$ avec (I, J, K) les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pris au temps $t = 0$. Cela implique que (I, J, K) est une famille libre et T un vecteur normé de même direction que la droite d'univers de O .

T est donc indépendant de (I, J, K) et la famille (T, I, J, K) est libre et forme donc une base .

On suppose que O ne subit aucune force et que l'espace observé par O est galiléen :

tout point mobile P du repère \mathcal{R}_3

sur lequel n'agit aucune force est rectiligne uniforme et sa ligne d'univers est une droite dans l'espace à 4 dimensions

et réciproquement . Dans ce cas il existe un seul temps t possible à un choix d'unité et d'origine temporelle près .

On considère maintenant une famille $(\mathbf{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'observateurs ayant les mêmes propriétés que \mathbf{O} .

Cela suppose que tous les \mathbf{O}_λ sont sans masse sinon ils interagiraient entre eux ou pourraient être affectés

par d'autres objets ayant une masse.

Les espaces $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ étant galiléens les $(\mathbf{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sont animés les uns par rapport aux autres d

'un mouvement

rectiligne uniforme. On cherche une transformation $T_{\lambda, \lambda'}$, qui permette de passer d

'un espace \mathcal{E}_λ à un espace $\mathcal{E}_{\lambda'}$;

Sans nuire à la généralité des résultats,

quitte à faire des translations que tous les $(\mathbf{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ coïncident aux temps

$t_\lambda = 0$ de leurs horloges respectives au même point de l'espace $\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}$ au temps $t_\lambda = 0$ sera l

'origine commune de

tous les repères associés aux \mathbf{O}_λ .

Toute droite d'univers peut être considérée comme ligne d'univers d

'un observateur ne subissant pas de force.

Une droite d'univers pour un observateur est donc une droite d'univers pour tout autre observateur.

La transformation $T_{\lambda, \lambda'}$ est donc linéaire et peut donc la représenter dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'

'associées à \mathbf{O} et \mathbf{O}'

par une matrice $\mathbf{M} = (m_{i,j})$, matrice de passage de \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

De la linéarité de $T_{\lambda, \lambda'}$, on en déduit que la vitesse relative de \mathbf{O} et \mathbf{O}'

'mesurée par les 2 observateurs est la même.

Soit un photon émis depuis l'origine spatiale \mathbf{O} au temps $t = 0$ dans une direction quelconque.

Soit Φ la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^4 par $\Phi(X) = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ avec $X = (ct, x, y, z)$.

Soit \mathbf{Z} représentant les coordonnées du photon dans la base \mathcal{B} . On a $\Phi(\mathbf{Z}) = 0$.

Soit \mathbf{Z}' représentant les coordonnées du photon dans la base \mathcal{B}' . On a aussi $\Phi(\mathbf{Z}') = 0$.

On aura donc $(\Phi(\mathbf{Z}') = 0 \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}') = 0) \Leftrightarrow ({}^t\mathbf{Z}'\mathbf{G}\mathbf{Z}' = 0 \Leftrightarrow {}^t\mathbf{Z}'\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{Z}' = 0)$ avec \mathbf{G}

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les 2 formes quadratique $\Phi(\cdot)$ et $\Phi(\mathbf{M}(\cdot))$ ayant le même cône d'isotropie, elles sont proportionnelles.

D'où ${}^t\mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{M} = \mu\mathbf{G}$ avec $\lambda \neq 0$. \mathbf{O}' est représentée par le vecteur $X = {}^t(ct, x, y, z)$ dans \mathcal{B} , et par $X' =$

${}^t(ct', 0, 0, 0)$ dans \mathcal{B}' .

Comme $X = \mathbf{M}X'$ on en déduit que le temps t mesuré par un observateur situé en \mathbf{O} d'une horloge située en \mathbf{O}' et qui indique le temps t' à un observateur situé en \mathbf{O}' vérifie $t = m_{1,1}t'$.

avec $m_{1,1} > 0$: on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps.

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} ct' \\ m_{2,1} ct' \\ m_{3,1} ct' \\ m_{4,1} ct' \end{bmatrix}$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en O' observe une horloge située en O qui indique un temps t pour l'observateur situé en O . L'observateur de O'

mesure alors un temps t' . Dans cette situation $X = {}^t(ct, 0, 0, 0)$ dans \mathcal{B} , et $X' = {}^t(ct', x', y', z')$ dans \mathcal{B}' . Comme $X' = M^{-1}X$ et donc $t' = (M^{-1})_{1,1}t$ (2)

et $(M^{-1})_{1,1} > 0$ comme précédemment.

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment, en suivant (N. M. J. Woodhouse "Special Relativity" Springer 2002),

les unités dans les 2 repères étant définies de la même façon : $(M^{-1})_{1,1} = M_{1,1}$. D'après ce qui précède

$${}^tMGM = \mu G \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}^*.$$

$$D'où \mu GM^{-1} = {}^tMG \Rightarrow M^{-1} = \mu^{-1} G^{-1} {}^tMG = \mu^{-1} G {}^tMG.$$

$$\text{Si } M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \Rightarrow \mu^{-1} G {}^tMG = \begin{bmatrix} \frac{m_{1,1}}{\mu} & \frac{m_{2,1}}{\mu} & \frac{m_{3,1}}{\mu} & \frac{m_{4,1}}{\mu} \\ \frac{m_{1,2}}{\mu} & \frac{m_{2,2}}{\mu} & \frac{m_{3,2}}{\mu} & \frac{m_{4,2}}{\mu} \\ \frac{m_{1,3}}{\mu} & \frac{m_{2,3}}{\mu} & \frac{m_{3,3}}{\mu} & \frac{m_{4,3}}{\mu} \\ \frac{m_{1,4}}{\mu} & \frac{m_{2,4}}{\mu} & \frac{m_{3,4}}{\mu} & \frac{m_{4,4}}{\mu} \end{bmatrix} = M^{-1}$$

Comme $(M^{-1})_{1,1} = m_{1,1} \Rightarrow \mu = 1$.

L'opérateur de transformation $T_{\lambda, \lambda'}$ est donc défini par une matrice M qui vérifie ${}^tMGM = G$.

On peut alors écrire M sous la forme :

(J.-M. Souriau. "Calcul Linéaire" PUF 1964)

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tY \\ Y & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } Y \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } {}^tYY = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\text{or } \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^t Y \\ \text{sh}(\alpha) Y & (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) Y'Y) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$M = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^t Y \\ \text{sh}(\alpha) Y & (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) Y'Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega \end{bmatrix}.$$

Si \mathcal{O}' est représentée par le vecteur $X = {}^t(ct, x, y, z)$ dans \mathcal{B} , et par $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ dans \mathcal{B}' , en écrivant $X = MX'$ par identification on montre que si $\vec{V} = {}^t\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$ et $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ et γ

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})}} :$$

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \vec{\beta} \\ \gamma \vec{\beta} & \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega \end{bmatrix} \text{ et cela d'une manière unique.}$$

Pour l'unicité voir : R. Mneimé, F. Testard. "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " Hermann Paris 1986,

ou F. R. Gantmacher. "Théorie des matrices " •Edition J •Gabay 1990.

On en déduit que :

(1) Dans le cas où les observateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' constate que $\vec{Ox} // \vec{O'x'}$, $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$, $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ et s'il n'y a pas retournement du temps, la partie orthogonale de M vérifie $\Omega = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

(2) Si une matrice de Lorentz M ne conserve pas le parallélisme des vecteurs de base spatiaux, et s'il n'y a pas retournement du temps alors M s'écrit sous la forme $M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$

où $\overset{\wedge}{\Omega}$ est une matrice orthogonale produit de 3 rotations selon le schéma :

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{M} \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

↓ Q

P ↓

$$\mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1)$$

↓ R

$$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\Lambda_1(\vec{\beta})} \mathcal{B}''_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}''_1, \vec{k}''_1)$$

où $P = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_P \end{bmatrix}$ avec Ω_P est la rotation qui amène la partie spatiale de \vec{i} en $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_Q \end{bmatrix}$ avec Ω_Q est la rotation qui amène la partie spatiale de \vec{i}' en $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_R \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Omega_R \text{ est la rotation qui aligne les parties spatiales de } \vec{\mathbf{j}}'_1 \text{ et } \vec{\mathbf{k}}'_1 \\ \text{sur celle de } \vec{\mathbf{j}}_1 \text{ et } \vec{\mathbf{k}}_1 .$$

Pour Ω_P et Ω_R prendre une transformation d'Euler, produit de 3 rotations .

Pour d'autres décomposition voir ci – dessus .

Principales hypothèses :

(H1) On peut définir en chaque point d'un repère tri - dimensionnel une horloge synchronisée avec celle de l'observateur .

(H2) Le module de la vitesse d'un photon est invariant pour tout observateur , indépendamment de la direction choisie pour le photon .

(H3) Les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs et ils utilisent tous le même système d'unités .

Principaux théorèmes

(Th1) (R.Goblot ."Algèbre linéaire "Masson 1995) .

Soit \mathbf{E} un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie :

(α) Soit $\Phi \neq \mathbf{0}$ une forme quadratique sur \mathbf{E} telle que $\mathbf{E}^{\perp \Phi} \neq \mathcal{C}(\Phi)$

c'est à dire $\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{E}^{\perp \Phi} \subsetneq \mathcal{C}(\Phi) \subsetneq \mathbf{E}$.

Soit Φ' une autre forme quadratique .

Pour que $\Phi' = \lambda \Phi$ avec $\lambda \neq \mathbf{0}$, Il faut et il suffit que

$\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$.

(β) Si $\Phi = \mathbf{0}$ et $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ alors $\Phi' = \mathbf{0}$.

(Th2) (P •Brousse •Mécanique •Armand Colin 1968 .)

Dans ce qui suit on se limite au changement de temps de classe \mathcal{C}^2 et à dérivée première strictement positive. La propriété d'un mouvement de point dans un espace \mathcal{E} d'être de classe \mathcal{C}^2 est invariante dans tout changement de temps défini ci - dessus • Il n'existe dans \mathcal{E} qu'un seul temps galiléen à un changement d'origine ou à un changement d'unité près .

(Th3) (P •Boyer ."Algèbre et Géométries " . C&M 2015)

Si une transformation bijective \mathbf{T} d'un espace vectoriel \mathbf{E} dans un espace

vectoriel \mathbf{E}' , telle que $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}}) = \vec{\mathbf{0}}_{\mathbf{E}'}$, transforme les droites affines de \mathbf{E} en des droites affines de \mathbf{E}' alors \mathbf{T} est linéaire .

(Th4) (cf •R. Mneimé , F. Testard "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " . Hermann Paris 1986 , p 18)

Soit \mathbf{M} une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice \mathbf{O} orthogonale et \mathbf{S} symétrique définie positive telles que $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{O}$.

Principal résultat :

toute matrice de Lorentz \mathbf{M} peut s'écrire sous les formes (si $\epsilon = +1$) :

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} \gamma & \vec{\gamma\beta} \\ \vec{\gamma\beta} & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \vec{\beta}\vec{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \gamma & \vec{\gamma\beta} \\ \vec{\gamma\beta} & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \vec{\beta}\vec{\beta} \end{bmatrix} PR {}^tQ = PR \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\|\vec{\beta}\| & 0 & 0 \\ \gamma\|\vec{\beta}\| & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^tQ.
\end{aligned}$$