



# Fondements mathématiques de la relativité restreinte

Alain Guimier

## ► To cite this version:

| Alain Guimier. Fondements mathématiques de la relativité restreinte. 2020. hal-02965773

**HAL Id: hal-02965773**

**<https://amu.hal.science/hal-02965773>**

Preprint submitted on 13 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*A • GUIMIER*

*Fondements mathématiques*

*de la*

*relativité restreinte*

Résumé :

*A partir d'un nombre minimal d'hypothèses physiques on démontre mathématiquement l'expression de la transformation de Lorentz  $\mathbf{M}$  dans le cas général :*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

avec  $\boldsymbol{\Omega}$  une matrice orthogonale dont on donne une évaluation .

On montre que la décomposition est unique .

## **PREFACE**

*Le but de ce fascicule est de proposer une construction mathématique des fondements de la relativité restreinte . Il reprend des éléments dispersés dans de nombreux ouvrages. Il se limite au tout début de la théorie .*

*Il ne demande que la connaissance des mathématiques enseignées au niveau du premier cycle scientifique . Toutefois nous avons rappelé le maximum de résultats nécessaires , ainsi que leur démonstration indispensable à leur bonne compréhension .*

*Il demande aussi une connaissance minimale de la théorie physique étudiée .*

*Nous avons essayé de fragmenter ces démonstrations en de nombreux lemmes pour en faciliter la lecture • Il y aura donc beaucoup de mathématiques et très peu de physique sinon pour donner les axiomes de départ • A partir de ces axiomes on montre que l'on peut arriver à l'expression d'une matrice de Lorentz dans le cas général uniquement à partir d'arguments mathématiques .*

*Papiers précédents : [https://archive.org/details/version-1\\_a\\_202006/mode/2-up](https://archive.org/details/version-1_a_202006/mode/2-up)  
<https://archive.org/details/matricesdelorentz/mode/2-up> .*

*Pour tout commentaire, erreur trouvée ,..., veuillez m'écrire à [guimier@hotmail.fr](mailto:guimier@hotmail.fr) .*

*à Marseille , octobre 2020 .*

## Chapitre 1 :

### Présentation du problème .

Dans notre espace physique  $E$ , assimilé à un espace affine à 3 dimensions, on considère une famille d'observateurs  $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  en mouvement relatif linéaire uniforme les uns

par rapport aux autres • On associe à chaque observateur  $\Omega_\lambda$  un repère spatial  $R_\lambda$  muni

d'une base  $B_\lambda = B_\lambda(\mathbf{O}_\lambda, \vec{i}_\lambda, \vec{j}_\lambda, \vec{k}_\lambda)$  supposée orthormée,  $\mathbf{O}_\lambda$  fixe par rapport à  $\Omega_\lambda$  et choisi tel que les trajectoires des  $(\mathbf{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  se coupent en 1 point unique  $\mathbf{O}$ .

Pour cela, on choisit un point arbitraire  $\mathbf{O}$  de  $E$ , on considère la trajectoire rectiligne  $T_\lambda$  de  $\Omega_\lambda$ , le plan défini par  $\Omega_\lambda$  et  $\mathbf{O}$ , la droite  $\mathcal{D}_\lambda$  parallèle à  $T_\lambda$  passant par  $\mathbf{O}$ .

$\mathbf{O}_\lambda$  étant choisi comme point de  $\mathcal{D}_\lambda$  à distance fixe de  $\Omega_\lambda$ .

On munit chaque observateur  $\Omega_\lambda$  d'une horloge • On munit chaque point fixe par rapport à  $\mathbf{O}_\lambda$  d'une horloge synchronisée avec celle de  $\Omega_\lambda$  (synchronisation des horloges d'Einstein :

cf C • Semay, B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". Dunod 2010),

telle que le temps  $t_\lambda$  ainsi défini confère à l'espace associé à  $\mathbf{O}_\lambda$  une structure d'espace galiléen (Th1.).

On initialise les horloges,  $t_\lambda = 0$ , au moment où  $\mathbf{O}_\lambda = \mathbf{O}$ .

On peut ainsi définir un espace vectoriel  $\mathcal{E}_\lambda$  à 4 dimensions associé à  $\mathbf{O}_\lambda$  puisque  $t_\lambda$  est une variable indépendante des coordonnées spatiales  $(\vec{x}_\lambda, \vec{y}_\lambda, \vec{z}_\lambda)$  d'un point  $M \in \mathcal{E}_\lambda$  muni de la base  $B_\lambda$ .

On peut aussi définir un repère  $\mathcal{R}_\lambda(\mathbf{O}_{t=0}, t, x, y, z)$ ,  $\mathbf{O}_{t=0}$  représentant le point  $\mathbf{O}_\lambda$  au temps  $t = 0$

dans cet espace, associé à une base  $\mathcal{B}_\lambda(\mathbf{O}_{t=0}, c\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $c$  étant le module de la vitesse de la lumière.

Problème à résoudre :

On va déterminer les transformations  $T_{\lambda, \lambda'}$ , qui permettent de passer d'une base  $\mathcal{B}_\lambda$  à une autre base  $\mathcal{B}_{\lambda'}$ , de

même origine et qui vérifient certaines hypothèses énoncées ci — après .

### Hypothèses :

(H1) Les  $(T_{\lambda, \lambda'})$  sont munis de la structure de groupe pour la composition .

(H2) Les  $(T_{\lambda, \lambda'})$  transforment les droites affines de  $\mathcal{E}_\lambda$  (droites d'univers) en droites affines de  $\mathcal{E}_{\lambda'}$ ,

ce qui est équivalent à leur linéarité (Th2.) : tout objet physique ayant un mouvement rectiligne uniforme pour un observateur  $\mathbf{O}_\lambda$  a aussi un mouvement rectiligne uniforme pour tout autre observateur  $\mathbf{O}_{\lambda'}$ .

(H3) Les lois de la physique sont les mêmes pour tous les espaces  $E_\lambda$  : en particulier si un point mobile

$P$  de vitesse  $\vec{V}_P$  constante dans  $E_\lambda$ , muni d'une horloge est observé par  $\mathbf{O}_\lambda$ , le temps mesuré  $t_\lambda$  par  $\mathbf{O}_\lambda$  et le temps  $t$  donné par l'horloge vérifient  $t_\lambda = \alpha(\vec{V}_P) \cdot t$  où  $\alpha(\vec{V}_P)$  est une constante réelle positive .

Dans un autre  $E_{\lambda'}$ , dans la même situation, la constante est la même .

(H4) Le module  $c$  de la vitesse de la lumière est invariante par changement d'observateur .

Cela implique que pour un photon émis depuis  $O_\lambda$  au temps  $t_\lambda = 0$ , c'est à dire aussi depuis un autre  $O_\lambda$ , au temps  $t' = 0$ , ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  vérifieront simultanément :

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \text{ (conservation du cône de lumière) ce qui est équivalent à } c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \mu \cdot (c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2) \text{ avec } \mu \text{ réel non nul (Th3.)}$$

(H5) D'habitude on admet que si la vitesse de  $O_\lambda$ , par rapport à  $O_\lambda$  est  $\vec{V}$  alors la vitesse de  $O_\lambda$  par rapport à  $O_\lambda$ , est  $-\vec{V}$ . (évidemment vrai en mécanique non relativiste) mais c'est en fait une conséquence de (H4) (Th4.).

Démonstration des théorèmes :

### **Théorème 1 :**

( P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968 . )

Dans ce qui suit on se limite au changement de temps de classe  $\mathcal{C}^2$  et à dérivée première strictement positive. La propriété d'un mouvement de point dans un espace  $\mathcal{E}$  d'être de classe  $\mathcal{C}^2$  est invariante dans tout changement de temps défini ci-dessus • Il n'existe dans  $\mathcal{E}$  qu'un seul temps galiléen à un changement d'origine ou à un changement d'unité près .

**Démonstration :**

Considérons une courbes de classe  $\mathcal{C}^2$ , 2 temps  $t$  et  $t_1$  et une fonction de changement de temps  $\chi$  :

$t = \chi(t_1)$  • Considérons une particule  $p$  parcourant cette courbe selon les 2 paramétrages en  $t$  et  $t_1$  :

$t \rightarrow P(t) = P(\chi(t_1)) = P_1(t_1)$ ,  $t_1 \rightarrow P_1(t_1)$  •  $P$  et  $P_1$  sont donc de classe  $\mathcal{C}^2$  et si  $O$  est un point fixe de  $\mathcal{E}$  :

$$\frac{d\vec{OP}_1(t_1)}{dt_1} = \frac{d\vec{OP}(t)}{dt} \frac{d\chi(t_1)}{dt_1} \text{ et } \frac{d^2\vec{OP}_1(t_1)}{dt_1^2} = \frac{d^2\vec{OP}(t)}{dt^2} \left[ \frac{d\chi(t_1)}{dt_1} \right]^2 + \frac{d\vec{OP}(t)}{dt} \frac{d^2\chi(t_1)}{dt_1^2}$$

et les vitesses et les accélérations sont liés par les relations suivantes :

$$\vec{V}_1(t_1) = \frac{d\chi(t_1)}{dt_1} \vec{V}(t) \text{ et } \vec{\Gamma}_1(t_1) = \left[ \frac{d\chi(t_1)}{dt_1} \right]^2 \vec{\Gamma}(t) + \frac{d^2\chi(t_1)}{dt_1^2} \vec{V}(t).$$

Si  $\mathcal{E}$  est galiléen et si aucune force s'exerce sur  $p$  on a :  $\vec{\Gamma}(t) = \vec{\Gamma}_1(t_1) = \vec{0}$  et si  $\vec{V}(t) \neq \vec{0}$ ,

$$\frac{d^2\chi(t_1)}{dt_1^2} = 0 \text{ et donc } \chi(t_1) = a \cdot t_1 + b \text{ avec } a > 0.$$

**Théorème 2 :** ( P • Boyer . "Algèbre et Géométries " . C&M 2015 . )

**Définition :**

On appelle automorphisme de corps toute application bijective  $\iota$  d'un corps  $\mathbb{K}$  sur lui même tel que  $\iota(x + y) = \iota(x) + \iota(y)$  (1) et  $\iota(x \cdot y) = \iota(x) \cdot \iota(y)$  (2)  $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}$ .

**Lemme 0 :**

Il existe un seul automorphisme du corps des nombres réels : l'identité.

**Démonstration :**

$$(1) \Rightarrow \iota(0 + 0) = \iota(0) + \iota(0) = \iota(0) \Rightarrow \iota(0) = 0.$$

$$(2) \Rightarrow \iota(1 \cdot 1) = \iota(1) \cdot \iota(1) = \iota(1) \Rightarrow \iota(1) = 1.$$

$$(1) \Rightarrow 0 = \iota(x - x) = \iota(x) + \iota(-x) = 0 \Rightarrow \iota(-x) = -\iota(x) \quad (3)$$

$$\text{On a } \iota(1 + 1) = \iota(1) + \iota(1) = 2\iota(1) = 2.$$

$$\text{Si } \iota(n) = n \text{ alors } \iota(n + 1) = \iota(n) + \iota(1) = n + 1 \text{ donc } \iota(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Si } p \in \mathbb{N}^* \quad \iota\left(\frac{p \cdot 1}{p}\right) = \iota(1) = 1 = \iota(p) \cdot \iota\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow \iota\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\iota(p)} = \frac{1}{p} \text{ donc}$$

$$\iota\left(\frac{n}{p}\right) = n \cdot \iota\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{n}{p} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4).$$

$$\text{Par (3) et (4) } \forall q \in \mathbb{Q} \quad \iota(q) = q \quad (5).$$

$$\text{Soit } x > 0 \text{ alors } x = y^2 \text{ donc } \iota(x) = \iota(y^2) = \iota(y) \cdot \iota(y) > 0.$$

$$\text{Si } x > y \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow \iota(x - y) > 0 \Rightarrow \iota(x) > \iota(y)$$

donc  $\iota$  est une application croissante.

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  il existe une suite croissante  $(g_n)$  et une suite décroissante  $(h_n)$  de nombres rationnels qui convergent vers  $x$ .

$$\text{On donc } g_n < g_{n+1} < \dots < x < \dots < h_{n+1} < h_n$$

comme  $\iota$  est une application croissante on a :

$$\iota(g_n) = g_n < \iota(g_{n+1}) = g_{n+1} < \dots < \iota(x) < \dots < \iota(h_{n+1}) = h_{n+1} < \iota(h_n) = h_n$$

par unicité de la limite  $x = \iota(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

$$\text{Et par (5) } x = \iota(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### Définition :

Pour toute la suite  $\mathbb{K}$  désignera un corps commutatif.

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ . On note  $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$

le sous espace affine engendré par l'ensemble des points de  $\mathcal{E} : \{a_0, \dots, a_n\}$ .

### Lemme 1 :

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

Soit  $r \geq 2$ ,  $a_0, \dots, a_r \in \mathcal{E}$ ,  $x \in \langle a_0, \dots, a_r \rangle$

alors il existe  $p \in \langle a_0, a_1 \rangle$  et  $q \in \langle a_0, a_2, \dots, a_r \rangle$  tel que  $x \in \langle p, q \rangle$ .

**Démonstration :**

$$\text{On peut écrire } \overrightarrow{a_0 x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} \quad (\text{non forcément d'une manière unique}).$$

Soit  $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ , posons  $p \in \langle a_0, a_1 \rangle$  et  $q \in \langle a_0, a_2, \dots, a_r \rangle$  tel que :

$$\overrightarrow{a_0 p} = \mu \lambda_1 \overrightarrow{a_0 a_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_0 q} = \frac{\mu}{\mu - 1} \sum_{i=2}^r \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} \quad \text{on a :}$$

$$\overrightarrow{a_0 x} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{a_0 p} + \frac{\mu - 1}{\mu} \overrightarrow{a_0 q}.$$

Comme  $\frac{1}{\mu} + \frac{\mu - 1}{\mu} = 1$   $x$  est le barycentre de  $p$  et  $q$  et donc  $x \in \langle p, q \rangle$ .

### Lemme 2 :

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que si  $a, b, c$  sont 3 points alignés quelconques de  $\mathcal{E}$  alors  $f(a), f(b)$  et  $f(c)$  sont alignés on a le résultat suivant :

$$\forall r \geq 1 \quad f(\langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_r) \rangle.$$

**Démonstration :**

On raisonne par récurrence sur  $r$ .

Pour  $r=1$  si  $x \in \langle a_0, a_1 \rangle$  alors  $x$  appartient à la droite définie par  $a_0$  et  $a_1$  donc  $x, a_0$  et  $a_1$  sont alignés donc  $f(a), f(b)$  et  $f(x)$  sont alignés par hypothèse et donc  $f(x) \in \langle f(a_0), f(a_1) \rangle$ .

Pour  $r \geq 2$  supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang  $r-1$  et soit  $x \in \langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle$  d'après le lemme 1  $x \in \langle p, q \rangle$  avec  $p \in \langle a_0, a_1 \rangle$  et  $q \in \langle a_0, a_2, \dots, a_r \rangle$  d'après ce qui précède  $f(x) \in \langle f(p), f(q) \rangle$

avec  $f(p) \in f(\langle a_0, a_1 \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1) \rangle$  et  $f(q) \in f(\langle a_0, a_2, \dots, a_r \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_2), \dots, f(a_r) \rangle$

d'après l'hypothèse de récurrence. Et donc :

$f(x) \in \langle f(p), f(q) \rangle \subseteq \langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_r) \rangle$  et

$f(\langle a_0, a_1, \dots, a_r \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_r) \rangle$ .

### Définition :

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

La famille de points de  $\mathcal{E}$  :  $\{a_i\}_{i=1, \dots, k}$  est dite **affinement indépendante** si

$\dim(\langle a_0, a_2, \dots, a_k \rangle) = k$ .

### Lemme 3 :

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  surjective et telle que

si  $a, b, c$  sont 3 points alignés quelconques de  $\mathcal{E}$

alors  $f(a), f(b)$  et  $f(c)$  sont alignés, on a le résultat suivant :

soit  $\{a_i\}_{i=1, \dots, k}$  une famille affinement indépendante de  $\mathcal{E}$

Alors la famille  $\{f(a_i)\}_{i=1, \dots, k}$  est aussi affinement indépendante.

### Démonstration :

Par l'absurde : supposons que  $\{f(a_i)\}_{i=1, \dots, k}$  ne soit pas affinement indépendante.

Complétons  $\{a_i\}_{i=1, \dots, k}$  pour avoir une base de  $\mathcal{E}$  :  $\{a_i\}_{i=1, \dots, n}$ .

$\{f(a_i)\}_{i=1, \dots, n}$  ne peut être une base de  $\mathcal{E}$  et d'après le lemme 2 :

$\mathcal{E} = f(\mathcal{E}) = f(\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle) \subseteq \langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle \neq \mathcal{E}$  (contradiction)

car  $\dim(\langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle) \neq n$  donc  $< n$ .

### Lemme 4 :

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bijective et telle que

si  $a, b, c$  sont 3 points alignés quelconques de  $\mathcal{E}$

alors  $f(a), f(b)$  et  $f(c)$  sont alignés, on a le résultat suivant :

si  $\mathcal{D}$  est une droite affine de  $\mathcal{E}$ ,  $f(\mathcal{D})$  est une droite affine de  $\mathcal{E}$ ,

et  $f$  est une bijection de  $\mathcal{D}$  sur  $f(\mathcal{D})$ .

### Démonstration :

Une droite  $\mathcal{D}$  peut être considérée comme l'ensemble des barycentres construits à partir de 2 points  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{D}$ . Comme  $f(\langle a, b \rangle) \subseteq \langle f(a), f(b) \rangle$  (lemme 2) donc  $f(\mathcal{D})$  est incluse dans une droite  $\mathcal{D}'$  et  $f$  est une injection de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{D}'$ .

$f$  est surjective. Soit  $y \in \langle f(a), f(b) \rangle = \mathcal{D}'$ , il existe  $x \in \mathcal{E}$  tel que  $f(x) = y$ .

Si  $x \notin \mathcal{D}$   $\langle x, a, b \rangle$  est affinement libre, d'après le lemme 3 :

$\langle f(x), f(a), f(b) \rangle$  l'est aussi mais  $f(x) = y \in \mathcal{D}'$  (contradiction).

Donc  $f$  est donc une surjection de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{D}' = f(\mathcal{D})$  qui est donc une droite.



**Lemme 5 :**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bijective et telle que

si  $a, b, c$  sont 3 points alignés quelconques de  $\mathcal{E}$

alors  $f(a), f(b)$  et  $f(c)$  sont alignés, on a le résultat suivant :

$$\mathcal{D} // \mathcal{D}' \Rightarrow f(\mathcal{D}) // f(\mathcal{D}').$$

**Démonstration :**

On peut supposer que  $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$ . Si  $y \in f(\mathcal{D}) \cap f(\mathcal{D}')$

$y = f(x) = f(x')$  avec  $x \in \mathcal{D}$  et  $x' \in \mathcal{D}'$  ce qui est impossible

puisque  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont distinctes et parallèles :  $f(\mathcal{D}) \cap f(\mathcal{D}') = \emptyset$

On peut décrire  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  comme :

$$\mathcal{D} = \{a_0 + \lambda \overrightarrow{a_0 a_1} / \lambda \in \mathbb{K}\} \text{ et } \mathcal{D}' = \{a_2 + \mu \overrightarrow{a_2 a_3} / \mu \in \mathbb{K}\} \text{ avec } \overrightarrow{a_0 a_1} // \overrightarrow{a_2 a_3}.$$

$$\text{On a } \langle \mathcal{D}, \mathcal{D}' \rangle = \{a_0 + \lambda \overrightarrow{a_0 a_1} + \mu \overrightarrow{a_0 a_2} / \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}\} = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle.$$

D'où :

$$\dim(f(\langle a_0, a_1, a_2 \rangle)) = \dim(\langle f(a_0), f(a_1), f(a_2) \rangle) = 2 \text{ (lemme 3)}$$

Or on peut décrire  $f(\mathcal{D})$  et  $f(\mathcal{D}')$  comme :

$$f(\mathcal{D}) = \{\alpha_0 + \lambda \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_1} / \lambda \in \mathbb{K}\} \text{ et } f(\mathcal{D}') = \{\alpha_2 + \mu \overrightarrow{\alpha_2 \alpha_3} / \mu \in \mathbb{K}\}.$$

Si  $f(\mathcal{D})$  et  $f(\mathcal{D}')$  ne sont pas parallèles :

$$\langle f(\mathcal{D}), f(\mathcal{D}') \rangle = \{\alpha_0 + \lambda \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_1} + \mu \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_2} + \nu \overrightarrow{\alpha_0 \alpha_3} / \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}, \nu \in \mathbb{K}\}$$

qui est de dimension 3. Contradiction.

**Lemme 6 :**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bijective et telle que

si  $a, b, c$  sont 3 points alignés quelconques de  $\mathcal{E}$

alors  $f(a), f(b)$  et  $f(c)$  sont alignés, on a le résultat suivant :

Soit  $p \in \mathcal{E}$ ,  $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  où  $\mathcal{E}$  est l'espace vectoriel défini par le choix

du point  $p$  comme origine dans  $\mathcal{E}$  et définissons  $\Phi$  par :

$$\Phi(\vec{w}) = f(p + \vec{w}) - f(p) \quad \forall w \in \mathcal{E}.$$

Alors  $\Phi$  est additive.

**Démonstration :**

(1) Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  2 vecteurs indépendants et  $p, q, r, s$  4 points de  $\mathcal{E}$  tels que

$p + \vec{u} = q$ ,  $p + \vec{v} = s$ ,  $p + \vec{u} + \vec{v} = r$  : on obtient un parallélogramme

$(p, q, r, s)$  de 4 points distincts avec  $\overrightarrow{pq} // \overrightarrow{sr}$ .

D'après le lemme 5 ( $f(p), f(q), f(r), f(s)$ ) forment un parallélogramme de 4 points distincts ( $p', q', r', s'$ ).

On rappelle la notation suivante : si le point  $a = b + \vec{x}$ , alors on peut noter  $\vec{x} = a - b$  mais  $a + b$  n'a aucun sens.

On peut donc écrire que  $\vec{u} + \vec{v} = r - p$ ,  $\vec{v} = s - p$  et  $\vec{u} = q - p$ .

$$\text{Comme } p'q' = r's' = r'p' - s'p' \Rightarrow q' - p' = r' - s'$$

$$= (r' - p') - (s' - p') \quad (a),$$

or  $f(p + \vec{u}) = f(q) = q'$  et  $f(p) = p'$  d'où :

$$f(p + \vec{u}) - f(p) = q' - p' = \Phi(\vec{u}) \text{ de même :}$$

$$\Phi(\vec{v}) = f(p + \vec{v}) - f(p) = f(s) - f(p) = s' - p', \text{ or}$$

$$\Phi(\vec{u} + \vec{v}) = f(r) - f(p) = r' - p'.$$

En appliquant (a) :  $\Phi(\vec{u}) = \Phi(\vec{u} + \vec{v}) - \Phi(\vec{v})$  et  $\Phi$  est additive.

(2) Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  2 vecteurs dépendants et non nuls. Soit  $\vec{w}$  non colinéaire à  $\vec{u}$  (et donc à  $\vec{v}$ ). D'après le cas précédent :  
 $\Phi(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \Phi(\vec{u} + \vec{v}) + \Phi(\vec{w}) = \Phi(\vec{v} + \vec{w}) + \Phi(\vec{u})$ , or  
 $\Phi(\vec{v} + \vec{w}) = \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w})$  donc :  
 $\Phi(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \Phi(\vec{u}) + \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w})$   
d'où  $\Phi(\vec{u}) + \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w}) = \Phi(\vec{u} + \vec{v}) + \Phi(\vec{w})$ ,  $\Phi$  est encore additive.

**Remarque :**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ . Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bijective et telle que si  $a, b, c$  sont 3 points alignés quelconques de  $\mathcal{E}$  alors  $f(a), f(b)$  et  $f(c)$  sont alignés, alors comme  $p + \mathbb{R}\vec{u}$  est une droite  $\mathcal{D}$  de direction  $\vec{u}$ , passant par  $p$ ,  $f(p + \mathbb{R}\vec{u})$  est aussi une droite  $\mathcal{D}'$  ( lemme 4 ), passant par  $p' = f(p)$  et comme  $f$  étant un bijection de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{D}'$ , par définition de  $\Phi$  ( lemme 6 ) :  
 $\Phi(\lambda \vec{u}) = f(p + \lambda \vec{u}) - f(p) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  
 $f(\mathcal{D}) = f(p + \mathbb{R}\vec{u}) = f(p) + \Phi(\mathbb{R}\vec{u}) = \mathcal{D}' = p' + \mathbb{R}\Phi(\vec{u})$  puisque  
une droite a une seule direction définie par un vecteur, à un scalaire près.

**Lemme 7 :**

Si on définit l'application  $\theta_{\vec{u}}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \forall \vec{u} \neq 0$  par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \Phi(\lambda \vec{u}) = \theta_{\vec{u}}(\lambda) \Phi(\vec{u}),$$

Alors on a  $\theta_{\vec{u}} = \theta_{\vec{v}} \quad \forall \vec{u} \neq 0, \forall \vec{v} \neq 0$ .

**Démonstration :**

(1) Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  2 vecteurs indépendants  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  on a  
 $\Phi(\lambda(\vec{u} + \vec{v})) = \Phi(\lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}) = \Phi(\lambda \vec{u}) + \Phi(\lambda \vec{v})$  ( lemme 6 )  
 $= \theta_{\vec{u}}(\lambda) \Phi(\vec{u}) + \theta_{\vec{v}}(\lambda) \Phi(\vec{v})$   
 $= \theta_{\vec{u} + \vec{v}}(\lambda) \Phi(\vec{u} + \vec{v})$   
 $= \theta_{\vec{u} + \vec{v}}(\lambda) \Phi(\vec{u}) + \theta_{\vec{u} + \vec{v}}(\lambda) \Phi(\vec{v})$ . Donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \Phi(\vec{u}) (\theta_{\vec{u}}(\lambda) - \theta_{\vec{u} + \vec{v}}(\lambda)) + \Phi(\vec{v}) (\theta_{\vec{v}}(\lambda) - \theta_{\vec{u} + \vec{v}}(\lambda)) = \vec{0}$$

Or  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont 2 vecteurs indépendants, ce qui implique que  
 $f(p + \vec{u})$  et  $f(p + \vec{v})$  sont 2 points affinement indépendants ( lemme 4 ) et  
 $\Phi(\vec{u})$  et  $\Phi(\vec{v})$  sont 2 vecteurs indépendants, ce qui implique que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \theta_{\vec{u}}(\lambda) - \theta_{\vec{u} + \vec{v}}(\lambda) = \theta_{\vec{v}}(\lambda) - \theta_{\vec{u} + \vec{v}}(\lambda) = 0 \text{ et donc :}$$

$$\theta_{\vec{u}} = \theta_{\vec{u} + \vec{v}} = \theta_{\vec{v}}.$$

(2) Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  2 vecteurs liés, on considère  $\vec{w}$  un vecteur indépendant de  $\vec{u}$  (et donc aussi de  $\vec{v}$ ) :  $\theta_{\vec{u}} = \theta_{\vec{w}} = \theta_{\vec{v}}$ .

**Lemme 8 :**

$\forall \vec{u} \neq 0$ , posons  $\theta = \theta_{\vec{u}}$  la valeur commune.

Autrement dit  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \Phi(\lambda \vec{u}) = \theta(\lambda) \Phi(\vec{u})$

Alors  $\theta$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}$ .

**Démonstration :**

Si  $\Phi(\vec{w}) = f(p + \vec{w}) - f(p) \quad \forall w \in \vec{\mathcal{E}}$  on a :

$\Phi(\vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow f(p + \vec{w}) = f(p) \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$ ,  $f$  étant bijective.

$\forall \vec{u} \neq \vec{0} \quad \Phi((\lambda + \mu) \vec{u}) = \theta(\lambda + \mu) \Phi(\vec{u}) = \Phi(\lambda \vec{u}) + \Phi(\mu \vec{u})$

$= (\theta(\lambda) + \theta(\mu)) \Phi(\vec{u})$  donc  $(\theta(\lambda + \mu) - (\theta(\lambda) + \theta(\mu))) \Phi(\vec{u}) = \vec{0}$

donc  $\theta(\lambda + \mu) = \theta(\lambda) + \theta(\mu)$  de même :

$\forall \vec{u} \neq \vec{0} \quad \Phi(\lambda \cdot \mu \vec{u}) = \theta(\lambda \cdot \mu) \Phi(\vec{u}) = \theta(\lambda) \Phi(\mu \vec{u}) = \theta(\lambda) \theta(\mu) \Phi(\vec{u})$

donc  $(\theta(\lambda \cdot \mu) - \theta(\lambda) \cdot \theta(\mu)) \Phi(\vec{u}) = \vec{0}$

d'où  $\theta(\lambda \cdot \mu) = \theta(\lambda) \cdot \theta(\mu)$ .

**Lemme 9 :**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $n$ . Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  bijective et telle que si  $a, b, c$  sont 3 points alignés quelconques de  $\mathcal{E}$

cela entraîne que  $f(a), f(b)$  et  $f(c)$  sont alignés alors si  $\Phi$  est définie par :

$\Phi(\vec{w}) = f(p + \vec{w}) - f(p) \quad \forall w \in \vec{\mathcal{E}}$ ,  $\Phi$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire.

**Démonstration :**

Par le lemme 6  $\Phi$  est additive, par le lemme 8 :

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Phi(\lambda \vec{u}) = \theta(\lambda) \Phi(\vec{u})$  avec  $\theta$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}$ ,

par le lemme 0 :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \theta(\lambda) = \lambda$  d'où le résultat.

**Conséquence :**

Si une transformation bijective  $T$  d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $E'$ , telle que  $T(\vec{0}_E) = \vec{0}_{E'}$ , transforme les droites affines de  $E$  en des droites affines de  $E'$  alors  $T$  est linéaire.

**Théorème 3 :**

( Etudes des cônes d'isotropie . )

(J. Dieudonné."Eléments d'analyse " •Gauthier – villars 1969 •

J-M. Monier."Algèbre 1 et 2". Dunod 1997 .

J •Grifone."Algèbre Linéaire" •Cépaduès éditions 2002 •

R.Goblot ."Algèbre linéaire "Masson 1995 . )

**Remarque :** Dans une première lecture , on pourra se contenter du lemme 10 •Le but des autres lemmes est de montrer que ce lemme 10 est un cas particulier de l'étude des cônes d'isotropie invariants.

**Lemme 1 :**

Soient  $f$  et  $g$  2 formes linéaires définies sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie .

On a l'équivalence :  $\text{Ker}(f) = \text{ker}(g) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} f = \lambda g$  .

**Démonstration :**

On peut supposer  $f \neq 0$  et  $g \neq 0$  .

(1)  $\text{Ker}(f) = \text{ker}(g) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} f = \lambda g$  .

Si  $H = \text{Ker}(f) = \text{ker}(g) \subsetneq E$

alors  $E = \mathbb{K}x_0 \oplus H$ , avec  $x_0 \neq 0, x_0 \notin H$  .

$$\forall x \in E \quad x = x_1 + \mu x_0, x_1 \in H .$$

On a  $f(x) = \mu f(x_0)$  et  $g(x) = \mu g(x_0)$  d'où

$$\forall x \notin H \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \Rightarrow f(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x)$$

(2)  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} f = \lambda g \Rightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$  .

Immédiat .

**Lemme 2 :**

Si 2 équations polynomiales de degré  $n > 0$ , avec  $n$  racines , ont des coefficients proportionnels alors elles ont les mêmes racines et réciproquement .

**Démonstration :**

La partie directe est immédiate . Réciproquement , il suffit de factoriser les 2 équations : comme  $a_n \neq 0$  et  $b_n \neq 0$  ,

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) = 0, \quad \sum_{k=0}^n b_k x^k = b_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) = 0 \quad \text{et donc :}$$

$$a_k = \frac{a_n b_k}{b_n}, \quad \forall k = 0 \dots n .$$

**Lemme 3 :**

Le complémentaire de l'intérieur d'une partie  $A$  d'un ensemble topologique  $E$

est égale à l'adhérence du complémentaire de  $A$  :  $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$  .

**Démonstration :**

$\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert inclu dans  $A$  donc  $E \setminus \overset{\circ}{A}$  est le plus petit fermé contenant  $E \setminus A$  d'où le résultat .

**Lemme 4 :**

Soient  $f$  et  $g$  2 applications continues d'un espace métrique  $(E, d)$  dans un espace métrique  $(E', d')$ .

Si  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in B \subseteq E$  tel que  $\overline{B} = E$  alors  $f = g$ .

**Démonstration :**

Montrons que  $A = \{x \in E / f(x) = g(x)\}$  est fermé dans  $E$  i.e.  $E \setminus A$  est ouvert dans  $E$ . Soit  $a \in E \setminus A$ ,  $f(a) \neq g(a)$

et donc  $d'(f(a), g(a)) = \alpha > 0$ .

$f$  et  $g$  étant continues il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout  $x$  de  $V$

on ait  $d'(f(x), f(a)) < \frac{\alpha}{2}$  et  $d'(g(x), g(a)) < \frac{\alpha}{2}$ .

S'il existait  $x \in V$  tel que  $f(x) = g(x)$  alors :

$$\alpha = d'(f(a), g(a)) \leq d'(f(x), f(a)) + d'(g(x), g(a)) < \alpha :$$

contradiction !

Donc  $\forall x \in V$   $f(x) \neq g(x)$  et  $E \setminus A$  est ouvert et  $A$  est fermé dans  $E$ .

On a  $B \subseteq A \subseteq E$  donc  $\overline{B} = E \subseteq A = A \subseteq E$  et donc  $A = E$ .

**Lemme 5 :**

(1) Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n$  alors tout sous-espace vectoriel  $V$  strict est d'intérieur vide et son complémentaire dans  $E$  est dense dans  $E$ .

(2) Tout sous-espace vectoriel  $V$  est fermé pour  $E$ .

(3) Soit  $\Phi \neq 0$  une forme quadratique sur  $E$ ,  $\mathcal{C}(\Phi) = \{x \in E / \Phi(x) = 0\}$  qui un cône de  $E$ , le cône d'isotropie de  $\Phi$ , est un fermé d'intérieur vide.

(4) Soient  $f$  une fonction définie sur  $E$ , nulle sur le complémentaire d'un sous-espace vectoriel  $V$  strict, alors elle est nulle partout.

**Démonstration :**

(1) Si  $V$  n'était pas d'intérieur vide dans  $E$  :  $\exists x \in V, \exists B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq V$ .

Comme  $V$  est un espace vectoriel  $\forall \lambda > 0$   $\lambda B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq V$  et donc

$E \subseteq V$ , impossible puisque  $V$  est un sous-espace strict de  $E$ .

Donc  $V = \emptyset$  et donc, d'après le lemme 3,  $E \setminus V = \overline{E \setminus V} = E$ .

(2) Il faut montrer que toute suite convergente de  $V$ , converge vers un point de  $V$ .

Soit  $(x_n)$  une suite convergente de  $V$  donc de  $E$ . Soit  $(e_i)_{i=1, \dots, p}$  une base de  $V$

que l'on peut compléter par  $(e_i)_{i=p+1, \dots, n}$  pour obtenir une base de  $E$ .

Dire qu'une suite converge dans un espace  $E$  vers  $x$ ,

c'est dire que chaque composante des termes de la suite converge.

Si les termes sont dans  $V$ , les composantes selon  $(e_i)_{i=p+1, \dots, n}$

seront constamment nulles et donc leur limite  $x$  aussi et  $x$  appartiendra bien à  $V$ .

(3)  $\mathcal{C}(\Phi) = \Phi^{-1}(\{0\})$  est fermé car  $\Phi$  est continue. Si l'intérieur de  $\mathcal{C}(\Phi) \neq \emptyset$

il existe  $x \in \mathcal{C}(\Phi)$  et, il existe  $B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$  qui est un cône,

donc  $\forall \lambda > 0$   $\lambda B_E(x, \varepsilon > 0) \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$  et donc  $E \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$  impossible car

$\Phi \neq 0$ .

(4)  $E$  étant de dimension finie,  $f$  est continue et, d'après ce qui précède, nulle sur un sous-ensemble dense de  $E$  donc nulle partout d'après le lemme 4.

**Lemme 6 :**

Si  $O_1$  et  $O_2$  sont 2 ouverts denses dans un espace topologique  $E$ , alors  $O_1 \cap O_2$  est encore dense dans  $E$ .

**Démonstration :**

On a la caractérisation évidente si  $E$  est un espace topologique,  $A \subseteq E$  :

$A = E \Leftrightarrow \forall \Omega, \Omega \text{ ouvert de } E, \Omega \cap A \neq \emptyset$ .

Soit donc  $\Omega$  ouvert de  $E$ , on a  $\Omega \cap O_1 \neq \emptyset$ . Soit  $a_1 \in \Omega \cap O_1$ ,

comme  $\Omega \cap O_1$  est un ouvert, il existe une boule  $B(a_1, \varepsilon) \subseteq \Omega \cap O_1$ ,

alors  $B(a_1, \varepsilon) \cap O_2 \neq \emptyset$ . Soit  $a_2 \in B(a_1, \varepsilon) \cap O_2$  :

$a_2 \in O_2, a_2 \in B(a_1, \varepsilon)$ ,

donc  $a_2 \in \Omega \cap O_1$ , et  $a_2 \in \Omega \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ .

**Notations :**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$\Phi$  une forme quadratique sur  $E$  et  $\varphi$  la forme bilinéaire associée.

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ; on note :

$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\}$  qui est un s.e.v de  $E$ ,

$\text{Ker}(\Phi) = E^\perp \subseteq \mathcal{C}(\Phi)$ ,

$x^\perp = \{y \in E / \varphi(x, y) = 0\}$  qui est un sous-espace vectoriel de  $E$ , strict si  $\Phi \neq 0$ .

**Résultat 1 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie,

( $\alpha$ ) Soit  $\Phi \neq 0$  une forme quadratique sur  $E$  telle que  $E^\perp \neq \mathcal{C}(\Phi)$

c'est à dire  $\{0\} \subset E^\perp \subsetneq \mathcal{C}(\Phi) \subsetneq E$ . (1)

Soit  $\Phi'$  une autre forme quadratique.

Pour que  $\Phi' = \lambda \Phi$  avec  $\lambda \neq 0$ , Il faut et il suffit que

$\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ .

( $\beta$ ) Si  $\Phi = 0$  et  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$  alors  $\Phi' = 0$ .

**Démonstration :**

( $\alpha$ ) On notera  $\varphi$  et  $\varphi'$  les formes bilinéaires associées à  $\Phi$  et  $\Phi'$ .

Si  $\Phi' = \lambda \Phi$  avec  $\lambda \neq 0$ , il est immédiat que  $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$  et  $E^\perp = E'^\perp$ .

Réciproquement, soit  $x \in \mathcal{C}(\Phi) \setminus E^\perp$  : comme  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ ,

$\Phi(x) = 0 = \Phi'(x)$ , de plus  $\exists y \neq 0$  tel que  $\varphi(x, y) \neq 0$  i.e.  $y \notin x^\perp$  qui est un sous-espace strict de  $E$ . D'après le lemme 5 :

$x^\perp$  est un fermé d'intérieur vide, de même  $\mathcal{C}(\Phi)$ ,

d'où  $U = E \setminus (x^\perp \cup \mathcal{C}(\Phi))$  est d'après le **lemme 6**  
un ouvert dense non vide de  $E$ .

Soit  $y \in U$  :  $\Phi(y) \neq 0$ ,  $\varphi(x, y) \neq 0$ .

Soit  $x + ty$  avec  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x) = 0$ ,  $\Phi(y) \neq 0$ ; déterminons les ensembles :

$\{t \in \mathbb{R} / \Phi(x + ty) = 0\}$  et  $\{t \in \mathbb{R} / \Phi'(x + ty) = 0\}$ .

On a :

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \Phi(x + ty) = \Phi(x) + t\varphi(x, y) + t^2\Phi(y) + t\varphi(y, x) \\ &= t^2\Phi(y) + 2t\varphi(x, y) = t(t\Phi(y) + 2\varphi(x, y)) \quad (1)\end{aligned}$$

de même  $\Psi'(t) = t^2\Phi'(y) + 2t\varphi'(x, y) \quad (2)$ .

Comme  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$  alors  $\Psi(t) = 0 \Rightarrow \Psi'(t) = 0$ .

(1) et (2) sont 2 équations de degré 2 ayant les mêmes racines distinctes :

$t_1 = 0$  qui correspond à  $z_1 = x$ ,  $t_2 = -\frac{2\varphi(x, y)}{\Phi(y)} \neq 0$  qui correspond à

$z_2 = x - \frac{2\varphi(x, y)}{\Phi(y)}y \neq z_1$ . Ce qui implique que  $\Phi'(y) \neq 0$  et  $\varphi'(x, y) \neq 0$  et que

les coefficients de (1) et (2) sont proportionnels d'après le **lemme 2** :

$$\Phi(y) = \lambda \Phi'(y) \quad (3) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \lambda \varphi'(x, y) \quad (4),$$

le paramètre  $\lambda$  d'après (3) est un réel non nul qui ne dépend que de  $y$  :  $\lambda = \lambda(y)$ .

Considérons les formes linéaires  $\varphi(x, \cdot)$  et  $\varphi'(x, \cdot)$

elles vérifient  $\varphi(x, \cdot) = \lambda(\cdot) \varphi'(x, \cdot)$ , elles ont mêmes noyaux puisque  $\lambda(\cdot) \neq 0$ .

D'après le **lemme 1** elle sont proportionnelles :

$$\exists \mu \neq 0 \text{ tel que } \varphi(x, \cdot) = \mu \varphi'(x, \cdot), \text{ avec } \mu = \mu(x) \quad (5).$$

En rapprochant (4) et (5) :

$$\varphi(x, y) = \lambda(y) \varphi'(x, y) = \mu(x) \varphi'(x, y) \text{ il vient que :}$$

$$\lambda(y) = \mu(x) = k, \quad k \text{ étant une constante indépendantes de } x \text{ et } y.$$

On en déduit que :

$$\Phi(y) = k \Phi'(y), \quad \forall y \in E \setminus (\mathcal{C}(\Phi) \cap x^\perp) \quad (6).$$

Et d'après le **lemme 4**,  $\Phi(y) = k \Phi'(y) \quad \forall y \in E$

puisque  $\Phi$  et  $\Phi'$  sont continues et  $(\mathcal{C}(\Phi) \cap x^\perp)$  est d'intérieur vide.

( $\beta$ ) Si  $\Phi = 0$  alors  $\mathcal{C}(\Phi) = E$  et donc  $\mathcal{C}(\Phi') = E$  et  $\Phi' = 0$ .

**Remarque** : L'hypothèse  $\mathcal{C}(\Phi) \neq E^\perp$  est essentielle :

Si l'on considère dans  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $\Phi([x, y, z]) = x^2 + y^2$  et  $\Phi'([x, y, z]) = x^2 + 2y^2$ ,

on a bien :  $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi') = \{[x, y, z] / x = y = 0\}$  qui est une droite,

et  $\mathcal{C}(\Phi) = E^\perp$  mais  $\Phi$  et  $\Phi'$  ne sont pas proportionnelles.

Il est facile de voir en utilisant le théorème que :

$$(\Phi \neq 0, \mathcal{C}(\Phi) \neq E^\perp \text{ et } \mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')) \Rightarrow E^\perp = E^{\perp \Phi'}.$$

Si le corps de base est  $\mathbb{C}$  on a le théorème suivant qui supprime l'hypothèse

$$\mathcal{C}(\Phi) \neq E^\perp.$$

Résultat 2 :

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension finie,

$\Phi$  et  $\Phi'$  2 formes quadratiques sur  $E$ .

Pour que  $\Phi' = \lambda \Phi$  avec  $\lambda \neq 0$ , Il faut et il suffit que

$$\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi').$$

**Démonstration :**

(1) Si  $\Phi = 0$  alors  $\mathcal{C}(\Phi) = E$  et donc  $\mathcal{C}(\Phi') = E$  et  $\Phi' = 0$ .

(2) Si  $\Phi \neq 0$  alors il existe  $x \in E$  tel que  $\Phi(x) \neq 0$  c'est à dire que  $x \notin \mathcal{C}(\Phi)$ ,

donc  $x \notin E^{\perp \Phi}$  et  $x^{\perp \Phi} \neq E$  et  $E \setminus x^{\perp \Phi} \neq \emptyset$  et un ouvert dense non vide de  $E$ .

De même  $E \setminus \mathcal{C}(\Phi)$  et  $E \setminus (\mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp \Phi})$ .

Soit  $y \notin \mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp \Phi}$  et  $z \in \mathbb{C}$  et considérons :

$$(a) P(z) = \Phi(y + zx) = z^2 \Phi(x) + 2z\varphi(x, y) + \Phi(y) \text{ et}$$

$$(b) Q(z) = \Phi'(y + zx) = z^2 \Phi'(x) + 2z\varphi'(x, y) + \Phi'(y).$$

Considérons l'équation  $P(z) = 0$  c'est une équation du second degré dans  $\mathbb{C}$  :

d'où l'existence de 2 racines, que l'on retrouve exactement dans (b) puisque

$$\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi').$$

Ce qui implique que  $\Phi'(y) \neq 0$  et  $\varphi'(x, y) \neq 0$  et que

les coefficients de (a) et (b) sont proportionnels d'après le lemme 2 :

$$\Phi(x) = \lambda \Phi'(x) \quad (c) \text{ et } \varphi(x, y) = \lambda \varphi'(x, y) \quad (d).$$

On conclut comme dans le théorème 1.

Lemme 7 :

Soit un plan vectoriel  $\Pi$  sur un corps  $\mathbb{K}$ ,  $\Phi$  une forme quadratique définie sur  $\Pi$ ,  
et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base  $\Phi$ -orthogonale de  $\Pi$ .

Dans ce plan  $\Pi$  il y a au plus 2 droites isotropes sinon c'est tout le plan qui est isotrope.

**Démonstration :**

Soit  $\varphi$  la forme bilinéaire symétrique associée à  $\Phi$ .

Dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice de  $\varphi$  s'écrit  $(\varphi)_{1,1} = q_1, (\varphi)_{1,2} = q_2, (\varphi)_{2,2} = 0$ .

Soit  $r$  le rang de  $\Phi = 2 - \dim(\Pi^{\perp \Phi})$ .

Si  $r = 0$ ,  $q_1 = 0 = q_2$  et  $\Pi^{\perp \Phi} = \mathcal{C}(\Phi) = \Pi$ .

Si  $r = 1$ , l'un des 2 scalaires  $q_1$  ou  $q_2$  est nul, l'autre non, par exemple :

$$q_1 \neq 0 \text{ et } q_2 = 0.$$

On a  $\Pi^{\perp \Phi} = \mathcal{C}(\Phi) = \mathbb{K}e_2$  et comme  $\Phi(x) = q_1 \cdot x_1^2$  avec  ${}^t(x) = (x_1, x_2)$ ,  
toute autre droite vectorielle privée de  $\{0\}$ , autre que  $\mathbb{K}e_2$  n'appartient pas  
à  $\mathcal{C}(\Phi)$  donc il y a au plus une droite isotrope dans  $\Pi$

Si  $r = 2$ , c'est à dire que  $q_1 \cdot q_2 \neq 0$  et  $\Phi(x) = q_1 \cdot x_1^2 + q_2 \cdot x_2^2$ .

$$\text{De } q_1 \cdot x_1^2 + q_2 \cdot x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{q_2}{q_1} \cdot x_2^2 = 0 \text{ on a :}$$



ou bien :  $\frac{q_2}{q_1} > 0$  alors  $x=0$  est la seule solution et il n'y a pas de droite isotrope ,

ou bien :  $\frac{q_2}{q_1} < 0$  alors si on pose  $-\frac{q_2}{q_1} = \alpha^2$  on a :

$x_1^2 - \alpha^2 \cdot x_2^2 = (x_1 - \alpha \cdot x_2) \cdot (x_1 + \alpha \cdot x_2) = 0$  montre l'existence de exactement 2 droites isotropes .

### Lemme 8 :

Soit un plan vectoriel  $\Pi$  sur un corps  $\mathbb{K}$  fini de caractéristique différente de 2 , alors il possède au moins 4 droites vectorielles distinctes .

### Démonstration :

La caractéristique d'un corps  $\mathbb{K}$  fini étant le plus petit entier  $n > 0$  tel que :  $n \cdot 1 = 0$ , et tout corps fini a pour caractéristique un nombre premier, et pour cardinal une puissance de ce nombre.

Si  $\mathbb{K}$  es un corps fini de caractéristique différente de 2 , il a au moins 3 éléments .

Soit un plan vectoriel  $\Pi$  sur un corps  $\mathbb{K}$  fini de caractéristique différente de 2 , il possède une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  et soit  $\mathbb{F}_3$  le corps à 3 éléments  $\{0, 1, 2\}$ ,

les droites de  $\Pi$  seront de la forme  $(xe_1, ye_2)$  avec  $x$  et  $y$  éléments non nul de  $\mathbb{F}_3$  :

d'où l'existence d'au moins 4 droites vectorielles définies par les scalaires :

(1)  $x=y$  , (2)  $x=0, y=1$  ou 2 , (3)  $y=0, x=1$ , ou 2 , (4)  $x=1, y=2$  ou  $x=2, y=1$  car  $e_1 + 2e_2 = 2(2e_1 + e_2)$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ .

Plus généralement si  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$  avec  $p > 2$  , on aura au moins les 4 droites  $x=y$  ,  $x=0, y=0$  et  $y=2x$  .

### Résultat 3 :

(R.Goblot ."Algèbre linéaire "Masson 1995 ).

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique différente de 2 .

( $\alpha$ ) Soit  $\Phi \neq 0$  une forme quadratique sur  $E$  telle que  $E^{\perp \Phi} \neq \mathcal{C}(\Phi)$  , c'est à dire  $\{0\} \subset E^{\perp \Phi} \subsetneq \mathcal{C}(\Phi) \subsetneq E$  . (1)

Soit  $\Phi'$  une autre forme quadratique .

Pour que  $\Phi' = \lambda \Phi$  avec  $\lambda \neq 0$  , Il faut et il suffit que  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ .

( $\beta$ ) Si  $\Phi = 0$  et  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$  alors  $\Phi' = 0$  .

### Démonstration :

( $\alpha$ ) On notera  $\varphi$  et  $\varphi'$  les formes bilinéaires associées à  $\Phi$  et  $\Phi'$  .

Si  $\Phi' = \lambda \Phi$  avec  $\lambda \neq 0$ , il est immédiat que  $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$  et  $E^{\perp \Phi} = E^{\perp \Phi'}$  .

Réciproquement, soit  $x \in \mathcal{C}(\Phi) \setminus E^{\perp \Phi}$  : comme  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$  ,

$\Phi(x) = 0 = \Phi'(x)$  , de plus  $\exists y \neq 0$  tel que  $\varphi(x, y) \neq 0$  .

Supposons d'abord que  $y$  soit , en plus , tel que  $\Phi(y) \neq 0$  .

Soit  $x + ty$  avec  $t \in \mathbb{R}$  ,  $\Phi(x) = 0$  ,  $\Phi(y) \neq 0$ ; déterminons les ensembles :

$$\{t \in \mathbb{R} / \Phi(x + ty) = 0\} \text{ et } \{t \in \mathbb{R} / \Phi'(x + ty) = 0\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Phi(x + ty) = \Phi(x) + t\varphi(x, y) + t^2\Phi(y) + t\varphi(y, x) \\ &= t^2\Phi(y) + 2t\varphi(x, y) = t(t\Phi(y) + 2\varphi(x, y)) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{de même } \Psi'(t) = t^2\Phi'(y) + 2t\varphi'(x, y) \quad (2).$$

Comme  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$  alors  $\Psi(t) = 0 \Rightarrow \Psi'(t) = 0$ .

(1) et (2) sont 2 équations de degré 2 ayant les mêmes racines distinctes :

$$t_1 = 0 \text{ qui correspond à } z_1 = x, t_2 = -\frac{2\varphi(x, y)}{\Phi(y)} \neq 0 \text{ qui correspond à}$$

$$z_2 = x - \frac{2\varphi(x, y)}{\Phi(y)}y \neq z_1. \text{ Ce qui implique que } \Phi'(y) \neq 0 \text{ et } \varphi'(x, y) \neq 0 \text{ et que}$$

les coefficients de (1) et (2) sont proportionnels d'après le lemme 2 :

$$\Phi(y) = \lambda \Phi'(y) \quad (3) \text{ et } \varphi(x, y) = \lambda \varphi'(x, y) \quad (4),$$

le paramètre  $\lambda$  d'après (3) est un réel non nul qui ne dépend que de  $y$  :  $\lambda = \lambda(y)$ .

Considérons les formes linéaires  $\varphi(x, \cdot)$  et  $\varphi'(x, \cdot)$

elles vérifient  $\varphi(x, \cdot) = \lambda(\cdot) \varphi'(x, \cdot)$ , elles ont mêmes noyaux puisque  $\lambda(\cdot) \neq 0$ .

D'après le lemme 1 elle sont proportionnelles :

$$\exists \mu \neq 0 \text{ tel que } \varphi(x, \cdot) = \mu \varphi'(x, \cdot), \text{ avec } \mu = \mu(x) \quad (5).$$

En rapprochant (4) et (5) :

$$\varphi(x, y) = \lambda(y) \varphi'(x, y) = \mu(x) \varphi'(x, y) \text{ il vient que :}$$

$$\lambda(y) = \mu(x) = k, k \text{ étant une constante indépendante de } x \text{ et } y.$$

$$\text{Donc } \Phi' = \lambda \Phi \text{ avec } \lambda \neq 0 \text{ sur } E \setminus \left( \mathcal{C}(\Phi) \cap x^{\perp \varphi} \right).$$

$$\text{Si } \Phi(y) = 0 \text{ alors } \Phi'(y) = 0 \text{ et } \Phi' = \lambda \Phi \text{ aussi sur } \{y / \Phi(y) = 0\}.$$

$$\text{On vient donc de montrer que } \Phi' - \lambda \Phi = 0 \text{ sur } E \setminus x^{\perp \varphi}.$$

$$\text{Si } x^{\perp \varphi} = \{0\} \text{ le théorème est démontré.}$$

$$\text{Supposons maintenant que } x^{\perp \varphi} \neq \{0\}. \text{ Et comme } \exists y \neq 0 \text{ tel que } \varphi(x, y) \neq 0 :$$

$$\dim(x^{\perp \varphi}) = \dim(E) - 1. \text{ Montrons que :}$$

$$\Phi' - \lambda \Phi = 0 \text{ aussi sur } x^{\perp \varphi} = \text{Ker}(\varphi(x, \cdot)) = \text{Ker}(\varphi'(x, \cdot)).$$

Le théorème est trivial si  $\dim(E) = 1$ . Considérons le cas  $\dim(E) = 2$  :

D'après ce qui précède  $\dim(x^{\perp \varphi}) = 1$ .  $E$  étant un plan vectoriel, toute droite vectorielle de ce plan, sauf peut-être  $x^{\perp \varphi}$ , est isotrope pour  $\Phi' - \lambda \Phi$  car contenue dans  $E \setminus x^{\perp \varphi} \cup \{0\}$ .

D'après les lemmes 8 et 7  $E$  tout entier est isotrope pour  $\Phi' - \lambda \Phi$ .

Considérons maintenant le cas  $\dim(E) > 2$  :

Soit  $z \in x^{\perp \varphi}$  qui est un hyperplan et  $\Pi$  un plan vectoriel contenant  $z$  et non contenu dans  $x^{\perp \varphi}$ , c'est un plan engendré par  $z$  et un autre vecteur  $v \notin x^{\perp \varphi}$ . On a évidemment  $\Pi \cap x^{\perp \varphi} = \mathbb{K}z$ .

Toute droite vectorielle de  $\Pi$ , sauf peut-être  $\mathbb{K}z$ , est isotrope pour  $\Phi' - \lambda \Phi$ .

D'après les lemmes 8 et 7  $E$  est isotrope pour  $\Phi' - \lambda \Phi$ .

$$(\beta) \text{ Si } \Phi = 0 \text{ alors } \mathcal{C}(\Phi) = E \text{ et donc } \mathcal{C}(\Phi') = E \text{ et } \Phi' = 0.$$

**Remarque :**

Dans le cas particulier où  $\dim(E) = n \geq 2$  et  $\Phi(x) = (x_1)^2 - \sum_{i=2}^n (x_i)^2$ , on peut utiliser une démonstration de type calcul matriciel qui a l'avantage d'être rapide et astucieuse mais a l'inconvénient de cacher sa vraie nature.

**Notation :** On note  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles d'ordre  $n$ ,  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  les matrices colonnes d'ordre  $n$ ,  $^t$  la transposition.

**Lemme 9:** Soit  $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ . On a l'équivalence :

$$\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad ^tXAY = ^tXBY \Leftrightarrow A = B.$$

**Démonstration :**

On remarque que : si pour  $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad ^tXY = 0$  alors  $Y = 0$ ,

si pour  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad ^tXY = 0$  alors  $X = 0$ .

Il suffit de prendre  $X = Y$ .

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad ^tXAY = ^tXBY &\Leftrightarrow ^tX(A - B)Y = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad (A - B)Y = 0 \Leftrightarrow (A - B) = 0. \end{aligned}$$

**Corollaire :** Si de plus  $A$  et  $B$  sont symétriques on a l'équivalence :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad ^tXAX = ^tXBX \Leftrightarrow A = B.$$

En particulier  $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad ^tXAX = 0 \Leftrightarrow A = 0$ .

**Démonstration :**

Comme  $^tXAX = ^tXBX$  on a :

$$\begin{aligned} \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad ^tXAX = ^tXBX \quad (1), \quad ^tYAY = ^tYBY \quad (2), \\ ^t(X + Y)A(X + Y) = ^t(X + Y)B(X + Y) \quad (3). \end{aligned}$$

(3) se développe en :

$$^tXAX + ^tXAY + ^tYAX + ^tYAY = ^tXBX + ^tXBY + ^tYBX + ^tYBY,$$

en appliquant (1) et (2) il vient :

$$^tXAY + ^tYAX = ^tXBY + ^tYBX,$$

et comme  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques :

$A = ^tA$  et  $B = ^tB$ , donc comme  $^t(^tXAY) = ^tXAY \in \mathbb{R}$  d'où :

$$^tYAX = ^tXAY \text{ de même : } ^tYBX = ^tXBY \text{ d'où :}$$

$$^tXAY = ^tXBY \quad \forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2.$$

D'après le lemme précédent :  $A = B$ .

**Autre démonstration possible du corollaire :**

$C = A - B$  est symétrique telle que :  $^tXCX = 0 \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

la symétrie implique l'existence de  $P \in M_n(\mathbb{R})$  orthogonale telle que  $PCP^t = D = (d_i)$  matrice diagonale.

$$^tXCX = 0 \Leftrightarrow ^tX(P^tDP)X = 0 \Leftrightarrow ^tZDZ = 0 \text{ avec } Z = PX.$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^n d_i (Z^i)^2 = 0 \quad \forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

donc en particulier pour  $Z = {}^t(0, \dots, d_i, \dots)$ ,  $d_i$  en  $i$ -ième position, d'où  $D = 0$  et  $C = 0$ .

**Lemme 10 :**

(N.M.J. Woodhouse. " Special Relativity " • Springer 2002 .)

$$\text{Soit } M \in M_4(\mathbb{R}) \text{ une matrice symétrique et } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On suppose que  $M$  vérifie :  $\forall X : {}^tXGX = 0 \Rightarrow {}^tXMX = 0$ ,  
alors  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $M = \alpha G$ .

**Démonstration :**

Si  $M$  est symétrique on peut écrire  $M$  sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & {}^t a \\ a & S \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, a \in M_{3,1}(\mathbb{R}), S \in M_3(\mathbb{R}) \text{ } S \text{ symétrique.}$$

On calcule pour  ${}^tX = [r, {}^tY]$ ,  $Y \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ ,  $r \in \mathbb{R}$ :

$${}^tXMX = [r, {}^tY] \begin{bmatrix} \alpha & {}^t a \\ a & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ Y \end{bmatrix} = \alpha r^2 + r {}^tYa + r {}^t aY + {}^tYSY \text{ d'où :}$$

$${}^tXMX = \alpha r^2 + 2 r {}^t aY + {}^tYSY. \quad (1)$$

On pose  ${}^tU = [u, v, w]$  avec  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$  (2)

et on affecte à  ${}^tX$  la valeur :  ${}^tX = [1, {}^tU]$ .

Dans ce cas  ${}^tXGX = 0$  et donc  ${}^tXMX = 0$ ,

et (1) s'écrit avec  $r = 1$ ,  $Y = U$ :

$$\forall U \text{ défini par (2) : } {}^tXMX = \alpha + 2 {}^t aU + {}^tUSU = 0. \quad (3)$$

Si  $U$  vérifie (3) -  $U$  vérifie (2) et (3) donc :

$$\alpha + 2 {}^t a(-U) + {}^t(-U)S(-U) = 0 \quad (4).$$

En ajoutant t (3) et (4) il vient :

$$\forall U \text{ défini par (2) : } \alpha + {}^tUSU = 0 \Leftrightarrow {}^tU(\alpha Id_3 + S)U = 0.$$

Si  ${}^tU(\alpha Id_3 + S)U = 0 \quad \forall U$  défini par (2)

$${}^tU(\alpha Id_3 + S)U = 0 \text{ est aussi vrai } \forall U \in \mathbb{R}^3$$

D'après le corollaire du lemme 9 précédent :  $S = -\alpha \cdot Id_3$ .

En retranchant (3) et (4) il vient :  $\forall U \quad {}^t aU = 0 \Rightarrow a = 0$ .

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \alpha G.$$

Résultat 4 :

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension 4,

et  $\Phi(x) = (x_1)^2 - \sum_{i=2}^4 (x_i)^2$ , une forme quadratique sur  $E$ .

Si  $\Phi'$  est une autre forme quadratique sur  $E$  telle que :  $\mathcal{C}(\Phi) \subseteq \mathcal{C}(\Phi')$ ,

alors  $\Phi' = \lambda \Phi$  avec  $\lambda \neq 0$ .

**Démonstration :**

Il suffit d'appliquer le lemme 10.

**Théorème 4 :**

(Vitesse relative de 2 repères) .

En mécanique classique , si on considère 2 observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre on peut écrire directement que  $\overrightarrow{V_{O'|O}} = -\overrightarrow{V_{O|O'}}$  pour ces 2 observateurs :

le temps est absolu ainsi que la distance  $\|\overrightarrow{OO'}\|$  .

Si les lois de la physique sont les mêmes dans les 2 repères , c'est à dire que de mêmes objets placés dans les mêmes conditions produiront les mêmes effets : mesurer la vitesse de  $O'$  par rapport à  $O$  et mesurer la vitesse de  $O$  par rapport à  $O'$  donneront le même résultat à condition que ces 2 vitesses aient le même module . Comme les 2 temps mesurés  $t$  et  $t'$  sont différents , de même pour les coordonnées spatiales , et en se rappelant qu'à ce stade de l'étude on sait seulement que la transformation est linéaire et que le module  $c$  de la vitesse de la lumière est invariant , on va justifier de façon élémentaire que la vitesse relative de 2 repères en translation uniforme est la même , en module , mesurée dans l'un ou l'autre des repères et opposée vectoriellement en signe .

**Vitesse relative de deux repères spatiaux en translation uniforme :**

Soit deux repères spatiaux  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme qu'on supposera tels que leurs origines  $O$  et  $O'$  coïncident une seule fois au cours de leur mouvement relatif en un point de l'espace spatial  $E$  et en ce point les horloges des deux repères spatiaux sont mises à zéro :  $t = t' = 0$ .

On rappelle que le temps associé à tout point fixe par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}$  est le temps de  $O$  , de même pour le temps associé à tout point fixe par rapport à  $O'$  dans  $\mathcal{R}'$  est le temps de  $O'$  (synchronisation des horloges) .

On peut ainsi définir la vitesse uniforme d'un point  $P(t)$  par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}$  par :

$$(\vec{V}_{P|O})_{\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{OP}(t_1) - \overrightarrow{OP}(t_0)}{t_1 - t_0} . \text{ De même dans } \mathcal{R}' .$$

Sachant que  $\overrightarrow{OO'}(0) = \vec{0}$  , on a dans  $\mathcal{R}$  :

$$(\vec{V}_{O'|O})_{\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{OO'}(t)}{t} = - \frac{\overrightarrow{O'O}(t)}{t} = - (\vec{V}_{O|O'})_{\mathcal{R}}$$

de même dans  $\mathcal{R}'$  sachant que  $\overrightarrow{O'O}(0) = \vec{0}$  :

$$(\vec{V}_{O|O'})_{\mathcal{R}'} = \frac{\overrightarrow{O'O}(t')}{t'} = - \frac{\overrightarrow{OO'}(t')}{t'} = - (\vec{V}_{O'|O})_{\mathcal{R}'} .$$

Est-ce que :  $(\vec{V}_{O'|O})_{\mathcal{R}} = - (\vec{V}_{O|O'})_{\mathcal{R}'}$  ?

On sait déjà que ces 2 vitesses sont parallèles à  $\overrightarrow{OO'}$  , constante et de sens opposés .  
Evaluons leur module respectif .

Soit  $\vec{V}$  la vitesse de  $O'$  par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}$  . Comment mesurer  $\|\vec{V}\|$  ?

Pour cela on va procéder à une expérience simple mesurée à partir de  $O$  et  $O'$  .

On notera  $\mathcal{R}_4$  et  $\mathcal{R}'_4$  les repères , dans l'espace à 4 dimensions , associés à  $\mathcal{R}$  et à  $\mathcal{R}'$

les repères spatiaux et à leur horloge respective .

la transformation qui permet de passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  est linéaire elle peut

être représentée par une matrice  $4 \times 4$   $M$ ,  $\mathcal{R}_4$  à  $\mathcal{R}_4'$  étant munis de bases orthonormales adéquates  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . Comme la transformation qui permet de passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  est linéaire elle peut être représentée par une matrice  $4 \times 4$   $M$ ,  $\mathcal{R}_4$  et  $\mathcal{R}_4'$  étant munis de bases orthonormales adéquates  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

**Expérience :**

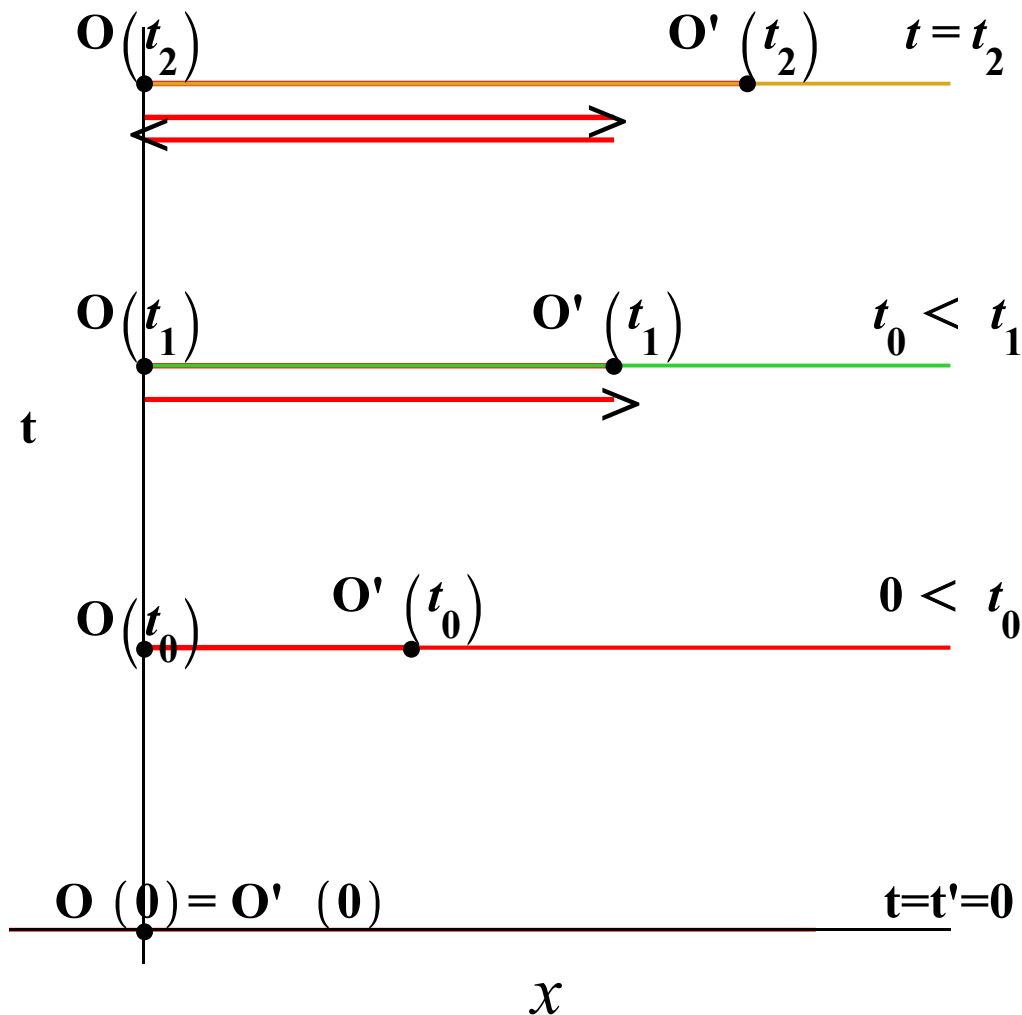
Au temps  $t = t' = 0$ ,  $O$  et  $O'$  coïncident.

Au temps  $t = t_0 > 0$  on envoie un rayon lumineux de  $O$  vers  $O'$

qui le renvoie vers  $O$  au temps  $t = t_1$ , et atteint  $O$  au temps  $t = t_2$ .

On note  $O'(t)$  et  $O(t)$  la position de  $O'$  et  $O$  au temps  $t$  dans  $\mathcal{R}$ .

Pour le graphique on a supposé que l'axe  $Ox$  est parallèle à  $\overrightarrow{OO'}$  :



Comme le mouvement est rectiligne uniforme le long de droite définie par  $O$  et  $\vec{V}$ :  
on a donc  $\overline{OO'(t_0)} = \|\vec{V}\| \cdot t_0$ , de même  $\overline{O'(t_0)O'(t_1)} = \|\vec{V}\| \cdot (t_1 - t_0)$ .

La durée étant la même à l'aller et au retour  $t_1 = t_0 + \frac{(t_2 - t_0)}{2} = \frac{(t_2 + t_0)}{2}$ .

Si  $c$  est la vitesse de la lumière :

$$(t_2 - t_0)c = 2\|\vec{V}\| t_0 + 2\|\vec{V}\| (t_1 - t_0)$$

$$\text{donc : } (t_2 - t_0)c = 2\|\vec{V}\| t_1 \text{ et donc : } \|\vec{V}\| = \frac{(t_2 - t_0)}{2 t_1} c = \frac{(t_2 - t_0)}{t_2 + t_0} c.$$

Du point de vue de l'observateur sur  $O'$ , il voit un rayon partir de  $O$  au temps  $t'_0$ ,

et  $\overrightarrow{OO'}(t'_0) = \|\vec{V}'\|.t'_0$ , le rayon arrivera au temps  $t'_1$ , puis repartira vers  $O$  qu'il touchera au temps  $t'_2$ . Le rayon aura donc parcouru la distance  $c(t'_2 - t'_0)$ .

Dans le sens  $\overrightarrow{OO'}$  la distance parcourue est :  $\overrightarrow{OO'}(t'_0) = \|\vec{V}'\|.t'_0$  et dans le sens retour :

$$\|\vec{V}'\|.t'_0 + \|\vec{V}'\|. (t'_1 - t'_0) + \|\vec{V}'\|. (t'_2 - t'_1) = \|\vec{V}'\| t'_2 \text{ et donc :}$$

$$(t'_2 - t'_0)c = \|\vec{V}'\| t'_1 + \|\vec{V}'\| t'_2 \text{ et } \|\vec{V}'\| = \frac{(t'_2 - t'_0)}{t'_2 + t'_0} c.$$

Soit  $M = \begin{pmatrix} m_{i,j} \end{pmatrix}$  la matrice de passage des repères  $\mathcal{R}_4'$  à  $\mathcal{R}_4$  associés à

$\mathcal{R}'$  et à  $\mathcal{R}$  et à leur horloge respective dans l'espace à 4 dimensions :

$O$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} ct, 0, 0, 0 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{R}_4$ ,

$O$  aura pour coordonnées  $\begin{pmatrix} m_{1,1}ct, m_{2,1}ct, m_{3,1}ct, m_{4,1}ct \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{R}_4'$

$$\text{donc } ct' = m_{1,1}ct \text{ et donc } \|\vec{V}\| = \frac{(t'_2 - t'_0)}{t'_2 + t'_0} .c = \frac{(t_2 - t_0)}{t_2 + t_0} .c$$

a la même valeur dans  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$  et comme l'expérience peut être vue par les 2 observateurs  $O$  et  $O'$  comme une expérience pour mesurer la vitesse relative entre  $O$  et  $O'$  on a :

$$\|\vec{V}_{O'|O}\|_{\mathcal{R}} = \|\vec{V}_{O|O'}\|_{\mathcal{R}'}$$

On pourra donc parler de vitesse relative de 2 repères en translation uniforme

$\vec{V}$  et  $-\vec{V}$  porté par  $\overrightarrow{OO'}$  de module  $\|\vec{V}\|$  commun aux 2 repères.

#### Remarque :

Si on considère un observateur sur  $O$  qui observe une horloge sur  $O'$  qui s'éloigne de  $O$ , avec une vitesse uniforme donnée pour ce repère et un observateur sur  $O'$  qui observe une horloge identique sur  $O$  qui s'éloigne de  $O'$

nous sommes dans une situation complètement symétrique puisque  $O$  voit s'éloigner  $O'$  et  $O'$  voit s'éloigner  $O$  avec la même vitesse numérique en module.

Les lois physiques étant les mêmes dans 2 repères galiléens en translation uniforme le coefficient de dilatation  $m_{1,1}$  des durées sera le même dans les 2 mesures

faites dans chacun des 2 repères. Donc si on note  $N = (n_{i,j})$  la matrice inverse de  $M$ , sachant que  $t' = m_{1,1}.t$  (1) et  $t = n_{1,1}.t'$  (2), par ce qui précède

on aura  $m_{1,1} = n_{1,1}$ . On notera par la suite  $\gamma$  cette valeur commune.

**Attention** à cette écriture, dans (1)  $t'$  est la valeur mesurée par  $O'$  de l'horloge placée



en  $\mathbf{O}$ , dans (2)  $t'$  est la valeur indiquée par l'horloge placée en  $\mathbf{O}'$ .

## Chapitre 2 :

### Solution du problème .

Notre but est d'expliciter  $T$  en fonction de  $\vec{V}$  ou ce qui revient au même en fonction de  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ .

D'après le chapitre 1  $T$  est linéaire donc représentée par une matrice  $M = M(\vec{\beta}) = (m_{i,j})$ .

$O'$  est représentée par le vecteur  $X = {}^t(ct, x, y, z)$  dans  $\mathcal{B}$ , et par  $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$  dans  $\mathcal{B}'$ .

Comme  $X = MX'$  on en déduit que le temps  $t$  mesuré par un observateur situé en  $O$  d'une horloge située en  $O'$  et qui indique le temps  $t'$  à un observateur situé en  $O'$  vérifie  $t = m_{1,1} t' \quad (1)$

avec  $m_{1,1} > 0$  : on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps .

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} ct' \\ m_{2,1} ct' \\ m_{3,1} ct' \\ m_{4,1} ct' \end{bmatrix} .$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en  $O'$  observe une horloge située en  $O$  qui indique un temps  $t$  pour l'observateur situé en  $O$  . L'observateur de  $O'$

mesure alors un temps  $t'$  . Dans cette situation  $X = {}^t(ct, 0, 0, 0)$  dans  $\mathcal{B}$ ,

et  $X' = {}^t(ct', x', y', z')$  dans  $\mathcal{B}'$  . Comme  $X' = M^{-1}X$  et donc  $t' = M^{-1}_{1,1} t \quad (2)$

et  $M^{-1}_{1,1} > 0$  comme précédemment.

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment , les unités dans les 2 repères étant définies de la même façon :  $M^{-1}_{1,1} = M_{1,1}$  .

**Attention** : dans (2)  $t'$  est la valeur mesurée par  $O'$  de l'horloge placée en  $O$  , dans (1)  $t'$  est la valeur indiquée par l'horloge placée en  $O'$  .

Considérons maintenant un photons issu de  $O$  au temps  $t = 0 = t'$ , ses coordonnées vérifient :

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \text{ pour } O \text{ et vérifie } c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \text{ pour } O'.$$

D'après le chapitre 1 (th.3) :

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \lambda (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Posons  $X = {}^t(ct, x, y, z)$  et  $X' = {}^t(ct', x', y', z')$  et si on note

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ on peut écrire } {}^tX'GX' = \lambda {}^tXGX = \lambda {}^t(MX')GMX' \text{ et donc}$$

${}^tX'GX' = \lambda {}^tX'{}^tMGMX'$  et cela pour tout  $X'$  .  ${}^tMGM$  étant symétrique , en appliquant le corollaire du lemme 9 du chapitre 1  ${}^tMGM = \lambda G$ .

#### Théorème :

Sous les hypothèses précédentes  ${}^tMGM = G$ .

#### Démonstration :

D'après ce qui précède  ${}^tMGM = \lambda G$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

$$D'où \lambda \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} = {}^t \mathbf{M} \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{G}^{-1} {}^t \mathbf{M} \mathbf{G} = \lambda^{-1} \mathbf{G} {}^t \mathbf{M} \mathbf{G}.$$

$$\text{Si } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^{-1} \mathbf{G} {}^t \mathbf{M} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{m_{1,1}}{\lambda} & -\frac{m_{2,1}}{\lambda} & -\frac{m_{3,1}}{\lambda} & -\frac{m_{4,1}}{\lambda} \\ -\frac{m_{1,2}}{\lambda} & \frac{m_{2,2}}{\lambda} & \frac{m_{3,2}}{\lambda} & \frac{m_{4,2}}{\lambda} \\ -\frac{m_{1,3}}{\lambda} & \frac{m_{2,3}}{\lambda} & \frac{m_{3,3}}{\lambda} & \frac{m_{4,3}}{\lambda} \\ -\frac{m_{1,4}}{\lambda} & \frac{m_{2,4}}{\lambda} & \frac{m_{3,4}}{\lambda} & \frac{m_{4,4}}{\lambda} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}$$

$$\text{Comme } m_{1,1}^{-1} = m_{1,1} \Rightarrow \lambda = 1.$$

L'opérateur de transformation  $\mathbf{T}$  est donc défini par une matrice  $\mathbf{M}$  qui vérifie  ${}^t \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{M} = \mathbf{G}$ .

Son inverse  $\mathbf{M}^{-1}$  vérifie :  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{G} {}^t \mathbf{M} \mathbf{G}$ .

De telles matrices sont appelées matrice de Lorentz dont on va déterminer les coefficients .

On peut remarquer déjà que si  $\mathbf{M}$  est de Lorentz alors  ${}^t \mathbf{M}$  est aussi de Lorentz :

De  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{G} {}^t \mathbf{M} \mathbf{G}$  on a  ${}^t \mathbf{M} = \mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}$  puisque  $\mathbf{G}^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ , on en déduit que :

$${}^t ({}^t \mathbf{M}) \mathbf{G} {}^t \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{G} {}^t \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{G} (\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}) = \mathbf{G}. \text{ Donc } {}^t \mathbf{M} \text{ est de Lorentz .}$$

De même  $\mathbf{G}$  est de Lorentz .

On cherche donc à déterminer les matrices  $\mathbf{M}$  qui vérifient  ${}^t \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{M} = \mathbf{G}$ .

( Pour une meilleure lisibilité on énonce les résultats dans une première partie ,  
et les démonstrations dans une seconde ) .

**Définition :** ( J - M • Souriau . "Calcul Linéaire " . PUF 1964 . )

On note  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices d'ordre  $n$ , à coefficients réels

et  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  le groupe des matrices inversibles d'ordre  $n$ , à coefficients réels.

On appelle matrice de **Lorentz** d'ordre  $n \geq 2$  toute matrice  $\mathbf{M}$  d'ordre  $n$ ,  
à coefficients réels vérifiant :  ${}^t \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{M} = \mathbf{G}$  .

**Lemme 0 :**

Les matrices de **Lorentz** forment un sous - groupe  $\mathbf{L}$  du groupe  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Lemme 1 :**

Soit  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  tel que  ${}^t \mathbf{X} \mathbf{X} = 1$  . Soit  $\mathbf{N}$  la matrice définie par :

$\mathcal{O}_{n-1}$  étant la matrice nulle de  $\mathbf{M}_{n-1}(\mathbb{R})$  ,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & {}^t \mathbf{X} \\ \mathbf{X} & \mathcal{O}_{n-1} \end{bmatrix} . \text{ On a alors } \forall \alpha \in \mathbb{R} :$$

$$M = \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha)X & (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX) \end{bmatrix}$$

est une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  de Lorentz de déterminant égal à 1.

**Lemme 2 :**

Si  $M$  est une matrice de Lorentz dont la première colonne  $K_1$  est de la forme :  $K_1 = {}^t(\alpha, 0, \dots, 0)$  alors  $M$  est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \varepsilon & {}^tQ \\ Q & \Omega \end{bmatrix} \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1, {}^tQ = (0, 0, 0), {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^n-1} \quad (1).$$

Réciproquement toute matrice de cette forme (1) est de Lorentz.

**Lemme 3 :**

Toute matrice carrée **symétrique**  $A$  d'ordre  $n \geq 1$ , à coefficients réels, est **diagonalisable**. De plus les sous-espaces propres de  $A$  sont orthogonaux 2 à 2.

On peut donc écrire que  $A = PD {}^tP$  avec  $P$  matrice orthogonale,  $D$  matrice diagonale.

**Lemme 4 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$

Soit  $f$  et  $g$  2 endomorphismes symétriques de  $E$  qui commutent :  $f \circ g = g \circ f$  alors il existe une même base de vecteurs propres dans laquelle  $f$  et  $g$  se diagonalisent.

**Lemme 5 :**

Soit  $M$  une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice  $O$  orthogonale et  $S$  symétrique définie positive telles que  $M = OS$ .

**Corollaire :**

Soit  $M$  une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice  $O_1$  orthogonale et  $S_1$  symétrique définie positive telles que  $M = S_1 O_1$ .

De plus  $S_1$  et  $S$  définie au lemme précédent vérifient  $S_1 = MSM^{-1}$ .

**Théorème 1 :**

Toute matrice  $M$  de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que : } {}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^n-1}.$$

Cette décomposition est unique.

**Matrice de Lorentz en Relativité restreinte :**

Soit un observateur ponctuel  $O$  situé dans notre espace physique  $E$  à 3 dimensions, muni d'une horloge. On peut lui attribuer un repère à 3 dimension  $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthormé d'origine lui-même plus une direction temporelle pour le situer dans le temps. On fait la convention que tout point fixe par rapport à  $O$  possède une horloge synchronisé avec  $O$ . On choisit une origine temporelle  $t_0$  que l'on va préciser plus bas.

On peut ainsi construire une base  $\mathcal{B}^a_{t_0, O}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit le vecteur  $U$  défini par  ${}^tU = (ct, x_1, x_2, x_3)$  avec  $c$  la vitesse de la lumière.

On considère la forme quadratique  $\Phi(U) = c^2 t^2 - \sum_{i=1}^3 x_i^2$

et construire à partir de  $\mathcal{B}^a_{t_0, O}$  une base  $\Phi$ -orthormée  $\mathcal{B}_{t_0, O}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère un autre observateur  $O'$  ayant une vitesse vectorielle  $\vec{V}$  constante par rapport à  $O$ . On munit  $O'$  d'une base  $\mathcal{B}'_{t'_0, O'}(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$   $\Phi$ -orthonormée.

On suppose que  $O$  et  $O'$  se croisent une fois et au moment du croisement mettent à 0 leurs horloges respectives :  $t_0 = t'_0 = 0$  et  $O(0) = O'(0)$  et

$\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ont une origine commune  $O$ .

$U$  représentant les coordonnées d'un point dans la base  $\mathcal{B}_O$  et  $U'$  les coordonnées de ce même point dans  $\mathcal{B}'_O$ .

On considère aussi la matrice de changement de base  $M$  de  $\mathcal{B}_O$  à  $\mathcal{B}'_O$

qui sera une  $\Phi$ -isométrie :  $M$  est une matrice de Lorentz telle que :  $U = MU'$ .

On peut donc écrire que les coordonnées de

$O'$  dans  $\mathcal{B}_O$  sont  ${}^tW = {}^t(ct, tV_1, tV_2, tV_3) = ct {}^t(1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  avec  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$

et dans  $\mathcal{B}'_O$  :  ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0) = ct' {}^t(1, 0, 0, 0)$ .

**Lemme 6 :**

En reprenant les notations du théorème :

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & C \end{bmatrix} \text{ avec } [\vec{\gamma\beta}] \text{ les coordonnées de } \vec{\gamma\beta}, \vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & \mathcal{O}_{n-1} \end{bmatrix}, \gamma = ch(\alpha),$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

**Théorème 2 :**

En reprenant les notations du lemme précédent une matrice  $\mathbf{M}$  de la relativité restreinte va donc s'écrire d'une manière unique sous la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

**Remarques :**

Si une matrice  $\mathbf{M}$  de Lorentz est orthogonale, par unicité sa partie symétrique est réduite à l'identité et donc la vitesse relative des 2 bases mobiles est nulle.

Si une matrice  $\mathbf{M}$  de Lorentz est symétrique sa partie orthogonale est nulle.

Si on considère le produit de 2 matrices de Lorentz  $\mathbf{M} = \Lambda(\vec{\beta})$  et  $\mathbf{M}' = \Lambda(\vec{\beta}')$  symétriques alors le produit  $\mathbf{M}\mathbf{M}'$  ne sera pas en général symétrique.

Mais on pourra écrire  $\mathbf{M}\mathbf{M}' = \Lambda(\vec{\beta}'') \mathcal{O}$  avec  $\mathcal{O}$  matrice orthogonale.

On verra plus loin comment calculer  $\vec{\beta}''$ , "addition" relativiste des vitesses  $\vec{\beta}$  et  $\vec{\beta}'$  d'où  $\mathcal{O} = \Lambda(-\vec{\beta}'') \Lambda(\vec{\beta}) \Lambda(\vec{\beta}')$ .

**Lemme 7 :**

Dans le cas où l'observateur  $\mathbf{O}$  constate que  $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ ,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ , la transformation linéaire  $\mathbf{M}$  de  $(\mathbf{O}, \mathcal{B}_O)$  dans  $(\mathbf{O}, \mathcal{B}_{O'})$  a pour composante orthogonale

$$\overset{\wedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4} \text{ et } \mathbf{M} \text{ s'écrit } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Lemme 8 :**

(1) Dans le cas où les observateurs  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{O}'$  constatent que  $\vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ ,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$  et s'il n'y a pas retournement du temps, la partie orthogonale de  $\mathbf{M}$  vérifie  $\overset{\wedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$ .

(2) Si une matrice de Lorentz  $\mathbf{M}$  ne conserve pas le parallélisme des vecteurs de base spatiaux, et s'il n'y a pas retournement du temps alors  $\mathbf{M}$  s'écrit sous la forme  $\mathbf{M} = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$  où  $\overset{\wedge}{\Omega}$  est une matrice orthogonale produit de 3 rotations explicitées lors de la démonstration.

**Lemme 9 :**

Soit  $\mathbf{M} = \Lambda(\vec{\beta})$  une matrice de Lorentz symétrique.

Si on pose  $\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}'$  avec  $\mathbf{X} = {}^t(ct, [\vec{r}])$ ,  $[\vec{r}]$  les coordonnées du vecteur  $\vec{r} = \vec{OP}$ , position d'un point  $\mathbf{P}$  dans un espace à 3 dimensions, de même  $\mathbf{X}' = {}^t(ct', [\vec{r}'])$  on a l'équivalence :

$$X = MX' \Leftrightarrow \left\{ ct = \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}), \vec{r} = \vec{r}' + \gamma\vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot \vec{r}' + ct' \right) \right\}.$$

**Lemme 10 :**

Loi de transformation des vitesses et des accélérations :

Si on pose  $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$  et  $\vec{V}'(t') = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$  on a :

$$\vec{V}(t) = \frac{\vec{V}'(t') + \gamma\vec{\beta} \left( \frac{\gamma(\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t'))}{1 + \gamma} + c \right)}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t')}{c} \right)}.$$

Si on pose  $\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$  et  $\vec{A}'(t') = \frac{d\vec{V}'(t')}{dt'}$  on a :

$$\vec{A}(t) = \frac{\vec{A}'(t') + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{A}'(t'))}{1 + \gamma}}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t')}{c} \right)^2} - \frac{\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{A}'(t'))}{c} \cdot \left( \vec{V}'(t') + \gamma\vec{\beta} \left( \frac{\gamma(\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t'))}{1 + \gamma} + c \right) \right)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t')}{c} \right)^3}$$

**Lemme 11 :** Lorsque  $M$  est de la forme  $M = \Lambda(\vec{\beta})P$ , il se peut que  $M$  ne soit pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  :

prendre  $\Lambda(\vec{\beta}) = Id$  et  $\Omega$  une rotation de  $\mathbb{R}^3$  non diagonalisable dans  $\mathbb{R}$

Par contre  $\Lambda(\vec{\beta})$  l'est toujours puisque symétrique :

Les valeurs et vecteurs propres de

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{sont } \{ \gamma(1 + \beta), \gamma(1 - \beta), 1, 1 \} \text{ et respectivement } \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\beta^{-1} \cdot \beta_3 \\ 0 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \end{array} \right] \Bigg\}.$$

Les traces des directions propres sur les 3 dernières coordonnées ont pour direction  $\vec{\beta}$  et 2 autres vecteurs • Les 3 direction sont perpendiculaire 2 à 2.

$$M' = \left[ \begin{array}{cccc} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ a les mêmes valeurs propres que } M.$$



**Démonstrations :****Lemme 0 :**

Les matrices de **Lorentz** forment un sous – groupe **L** du groupe  $GL_n(\mathbb{R})$ .

Démonstration :

Soit **M**, **N** 2 matrices de **Lorentz** :  ${}^tMGM = G$ ,  ${}^tNGN = G$

Comme  $\det({}^tMGM) = \det(G) \Rightarrow \det^2(M) = 1 \neq 0$ , **M** est donc inversible .

$Id_{\mathbb{R}^n}$  est une matrice de **Lorentz** donc  $L \neq \emptyset$ ,

${}^t(MN)G(MN) = {}^tN({}^tMGM)N = {}^tNGN = G$  donc **L** stable pour la composition ,

${}^tMGM = G \Rightarrow G = ({}^tM)^{-1}GM^{-1} = (M^{-1})^tGM^{-1}$  et **L** est stable pour l'inversion .

**Lemme 1 :**

Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  ${}^tXX = 1$  . Soit **N** la matrice définie par :

$\mathcal{O}_{n-1}$  étant la matrice nulle de  $M_{n-1}(\mathbb{R})$ ,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & \mathcal{O}_{n-1} \end{bmatrix} . \text{ On a alors } \forall \alpha \in \mathbb{R} :$$

$$M = \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & (Id_{\mathbb{R}^n - 1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix}$$

est une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  de Lorentz de déterminant égal à 1 .

Démonstration :

$$\text{On a } N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{O}^{n-1} & X {}^tX \end{bmatrix} \text{ en notant } \mathcal{O}^{n-1} \text{ la colonne nulle d'ordre } n-1,$$

puisque  ${}^tXX = 1$  et on a  $N^3 = N$ .

En remarquant que pour toute matrice carrée **A** et tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} , \quad sh(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} , \quad ch(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \exp(\alpha N) &= Id_{\mathbb{R}^n} + \alpha N + \frac{\alpha^2 N^2}{2!} + \frac{\alpha^3 N}{3!} + \frac{\alpha^4 N^2}{4!} + \dots + \\ &+ \frac{\alpha^{2p-1} N}{(2p-1)!} + \frac{\alpha^{2p} N^2}{(2p)!} + \dots \end{aligned}$$

$$= Id_{\mathbb{R}^n} + sh(\alpha) N + (ch(\alpha) - 1) N^2 .$$

Vérifions que **M** est bien de Lorentz :  ${}^tMGM = G$  ?

On remarque que **M** est symétrique :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)^t X \\ sh(\alpha)X & (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t 0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha)^t X \\ sh(\alpha)X & -(Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) \end{bmatrix} \text{ et } \\
& \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha)^t X \\ sh(\alpha)X & -(Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)^t X \\ (sh(\alpha))X & (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \text{Calculons } a, b, c, d .
\end{aligned}$$

$$a = ch^2(\alpha) - sh^2(\alpha)^t X X = 1, \text{ car } {}^t X X = 1 .$$

$$\begin{aligned}
b &= ch(\alpha) sh(\alpha)^t X - sh(\alpha)^t X (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) \\
&= ch(\alpha) sh(\alpha)^t X - sh(\alpha)^t X - sh(\alpha)^t X (ch(\alpha) - 1)^t X X^t X \\
&= ch(\alpha) sh(\alpha)^t X - sh(\alpha)^t X - sh(\alpha)^t X ch(\alpha)^t X + sh(\alpha)^t X = 0 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= ch(\alpha) sh(\alpha) X - (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) sh(\alpha) X \\
&= ch(\alpha) sh(\alpha) X - sh(\alpha) X - sh(\alpha) (ch(\alpha) - 1) X = 0 ,
\end{aligned}$$

$$d = sh^2(\alpha) X^t X - (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X)^2 \quad \text{or :}$$

$$\begin{aligned}
& (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X) \\
&= Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X + (ch(\alpha) - 1)X^t X + (ch(\alpha) - 1)^2 X^t X X^t X,
\end{aligned}$$

on remarque comme  ${}^t X X = 1 : X ({}^t X X)^t X = X^t X$  (association du produit matriciel) ,

$$\text{et } (ch(\alpha) - 1)^2 = ch^2(\alpha) - 2ch(\alpha) + 1$$

$$= Id_{\mathbb{R}^n-1} + (2(ch(\alpha) - 1) + ch^2(\alpha) - 2ch(\alpha) + 1)X^t X$$

$$= Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch^2(\alpha) - 1)X^t X = Id_{\mathbb{R}^n-1} + sh^2(\alpha)X^t X$$

finalemt :

$$sh^2(\alpha)X^t X - (Id_{\mathbb{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1)X^t X)^2 = -Id_{\mathbb{R}^n-1} .$$

$$\text{Donc } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^n - 1} \end{bmatrix}$$

et  $M$  est bien de **Lorentz**.

Une autre démonstration possible est de calculer :

$$\begin{aligned} \exp(\alpha N) G &= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & (Id_{\mathbb{R}^n - 1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^n - 1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & -(Id_{\mathbb{R}^n - 1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix} \text{ et} \\ G \exp(-\alpha N) &= \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^n - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha) {}^tX \\ -sh(\alpha) X & (Id_{\mathbb{R}^n - 1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & -(Id_{\mathbb{R}^n - 1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \exp(\alpha N) G = G \exp(-\alpha N) \Rightarrow \exp(\alpha N) G \exp(\alpha N) = G$$

comme  $M = \exp(\alpha N)$  est symétrique  ${}^tMGM = G$  et  $M$  est de **Lorentz**.

Pour une troisième démonstration voir : **J.M. Souriau : Calcul linéaire.PUF**.

Montrons rapidement que  $\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}$  pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$  :

Considérons  $A$  comme élément de  $M_n(\mathbb{C})$ .  $A$  est alors trigonalisable et peut s'écrire :

$A = P^{-1}BP$  avec  $B$  triangulaire supérieur dont la diagonale est composée des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ .

en s'appuyant sur la définition de l'exponentielle on peut écrire :  $\exp(A) = P^{-1}\exp(B)P$ .

En développant  $\exp(B)$  en série et en remarquant que  $B^k$  triangulaire supérieur  $\forall k \geq 1$ .

Alors  $\exp(B)$  a pour diagonale les  $e^{\lambda_i}$ .

$$\text{D'où } \det(\exp(A)) = \det(\exp(B)) = \prod_i e^{\lambda_i} = e^{\sum_i \lambda_i} = e^{Tr(A)}.$$

Comme  $\alpha N$  est de trace nulle  $\det(\exp(\alpha N)) = 1$ .

**Lemme 2 :**

Si  $M$  est une matrice de Lorentz dont la première colonne  $K_1$  est de la forme :  $K_1 = {}^t(\alpha, 0, \dots, 0)$  alors  $M$  est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \varepsilon & {}^tQ \\ Q & \Omega \end{bmatrix} \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1, {}^tQ = (0, 0, 0), {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^n - 1} \quad (1).$$

Réciproquement toute matrice de cette forme (1) est de Lorentz

$$\text{Soit } M = \begin{bmatrix} \alpha & {}^tL \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ avec } C \in M_3(\mathbb{R}), {}^tL = (l_1, l_2, l_3).$$

Démonstration :

Comme  $({}^tMG)M = G$  on a :

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ L & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & {}^tL \\ 0 & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha {}^tL \\ \alpha L & L {}^tL - {}^tCC \end{bmatrix} \end{aligned}$$

par identification  $\alpha = \pm 1, L = 0, {}^tCC = Id_{\mathbb{R}^n - 1}$ .

Réciproquement si (1) est vérifié :

$${}^tMGM = \begin{bmatrix} \varepsilon & {}^tQ \\ Q & {}^t\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^n - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & {}^tQ \\ Q & \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^n - 1} \end{bmatrix}.$$

**Lemme 3 :**

Toute matrice carrée symétrique  $A$  d'ordre  $n \geq 1$ , à coefficients réels, est diagonalisable. De plus les sous-espaces propres de  $A$  sont orthogonaux 2 à 2.

On peut donc écrire que  $A = PD^tP$  avec  $P$  matrice orthogonale,  $D$  matrice diagonale.

Démonstration : (cf. J. Grifone "Algèbre Linéaire" Cepaduès éditions 2002)

On note, si  $A = (a_{ij})_{i=1, n; j=1, n}$  alors  ${}^tA = (a_{ji})_{i=1, n; j=1, n}$

et si  $A$  est symétrique  ${}^tA = A$ .

(a) Montrons que toute valeur propre de  $A$  est réelle.

On peut considérer  $A$  comme un opérateur de  $\mathcal{O}^n$  dans  $\mathcal{O}^n$  et

$P_A(X)$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Comme

polynôme sur  $\mathbb{C}$ , il admet au moins une racine  $\lambda$ , montrons

que cette racine est réelle. Soit  ${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ,

le vecteur propre associé à  $\lambda$ .

Comme  $A$  est symétrique on a, en notant  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{X}$  les conjugués de  $\lambda$  et  $X$  dans  $\mathbb{C}$  :

${}^t(AX)\bar{X} = {}^tX A \bar{X}$  puisque  $A$  est symétrique. D'autre part  $AX = \lambda X$  d'où :

comme  $A$  est réelle  $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ , il vient  ${}^t(\lambda X)\bar{X} = {}^tX\bar{\lambda}\bar{X}$  c'est à dire que :

$$\lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad \text{d'où } \lambda = \bar{\lambda}.$$

Comme  $AX = \lambda X \Rightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} \Rightarrow A\bar{X} = \lambda\bar{X} \Rightarrow A(\bar{X} + X) = \lambda(\bar{X} + X)$

on peut donc associer un vecteur propre réel à  $\lambda$ . Ou plus simplement remarquer que  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $A$  comme opérateur de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même.

Cela implique que tout endomorphisme  $f$ , d'un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$  dans lui-même, symétrique, admet au moins une valeur propre réelle  $\lambda$

et un vecteur propre réel  $x$  associé :  $f(x) = \lambda x$ .

**Rappel :**  $f$  est dite symétrique si  $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x \in E, \forall y \in E$   $\langle, \rangle$  étant le produit scalaire euclidien de  $E$ .

(b) Montrons par récurrence sur  $n$ , dimension de  $E$ ,

qu'il existe une base de  $n$  vecteurs propres réels orthogonaux 2 à 2, pour tout endomorphisme symétrique  $f$  d'un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$  dans lui-même.

Si  $n = 1$  il n'y a rien à démontrer puisque dans ce cas  $f = \lambda$ .

Supposons que la propriété soit vraie au rang  $n - 1$  :

Pour tout endomorphisme symétrique  $f$  d'un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n - 1$  dans lui-même, il existe une base de  $n - 1$  vecteurs propres réels, orthogonaux 2 à 2.

Montrons qu'elle est vraie au rang  $n$ .

On vient de montrer qu'il existe  $\lambda$  et  $x$  valeur propre réelle et vecteur propre réel associé pour  $f$  endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$ ,  $n$  quelconque.

Considérons le couple  $(x, \lambda)$  associé à  $E$  de dimension  $n$ .

Considérons dans  $E$ ,  $H = (x^\perp)$  l'hyperplan orthogonal de  $x$  dans  $E$ , de dimension  $n - 1$ .

Montrons que  $f$  est stable sur  $H$  :

Soit  $y$  un vecteur de  $H$  :  $\langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0$  donc  $f(y)$  est orthogonal à  $x$ .

Soit  $y$  et  $z$  2 vecteurs de  $H$ , comme ils sont aussi vecteurs de  $E$  on a aussi  $\langle f(z), y \rangle = \langle z, f(y) \rangle$  et la restriction de  $f$  à  $H$  est aussi symétrique.

Comme  $H$  est de dimension  $n - 1$ , l'hypothèse de récurrence s'applique : il existe une base de vecteurs propres, dans  $H$ , pour la restriction de  $f$  à  $H$  :  $x_2, \dots, x_n$ , orthogonaux 2 à 2.

Alors  $x, x_2, \dots, x_n$  est une base de  $n$  vecteurs propres réels de  $f$  dans  $E$  :

$f$  est diagonalisable. Comme  $H$  est orthogonal à  $x$ , alors  $x_2, \dots, x_n$  sont orthogonaux à  $x$ .

Les  $x, x_2, \dots, x_n$ , après normalisation, forment une base orthonormée de

vecteurs propres. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $A$  la matrice qui représente  $f$  dans  $\mathcal{B}$ ,

$P$  la matrice composée de colonnes représentant successivement les composantes des

$x, x_2, \dots, x_n$ ,  $D$  la matrice diagonale composée des valeurs propres  $\lambda$  et  $\lambda_i$  associées à

$x, x_2, \dots, x_n$ . On a donc  $A = PDP^{-1}$  de plus  $P$  est une matrice orthogonale

et donc  $P^{-1} = {}^tP$ .

(Pour d'autres démonstrations consulter J.M. Monier Algèbre 2 Dunod 1997 par exemple).

**Remarque :** La propriété est fausse si les coefficients de la matrice sont des nombres

complexes. Considérons :  $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ .

Son polynôme caractéristique est  $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ .

Si la matrice  $A$  était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice unité.

**Lemme 4 :** (cf • J - M. Monier. "Algèbre 2". Dunod 1997)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$

Soit  $f$  et  $g$  2 endomorphismes symétriques de  $E$  qui commutent :  $f \circ g = g \circ f$   
alors il existe une même base de vecteurs propres dans laquelle  $f$  et  $g$  se diagonalisent.

Démonstration :

Puisque  $f$  et  $g$  sont symétriques ils se diagonalisent chacun dans une base orthonormée de vecteurs propres (**lemme 3**). Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $f$  et  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$

les espaces propres correspondants. Montrons que  $E_{\lambda_i}$  est stable par  $g$  :

Soit  $x \in E_{\lambda_i}$  :  $f(x) = \lambda_i x$  alors  $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda_i g(x)$ ,

ou bien  $g(x) = 0$  ou bien  $g(x) \neq 0$  et  $g(x)$  est valeur propre  $f$   
et dans les 2 cas  $g(x) \in E_{\lambda_i}$  donc  $g(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$ .

On peut définir  $g_{/E_{\lambda_i}} : E_{\lambda_i} \rightarrow E_{\lambda_i}$  tel que  $g_{/E_{\lambda_i}}$  soit un endomorphisme symétrique

donc il existe une base  $\mathcal{B}_i$  orthonormée de  $E_{\lambda_i}$  constituée de vecteurs propres de  $f$   
qui diagonalisent  $g_{/E_{\lambda_i}}$ .

Comme  $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i} = E$ ,  $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$  base de  $E$  composée de vecteurs propres de  $f$  et  $g$  qui diagonalisent  $f$  et  $g$ .

**Lemme 5 :**

(cf •R. Mneimé, F. Testard "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques".

Hermann Paris 1986, p 18)

Soit  $\mathbf{M}$  une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice  $\mathbf{O}$  orthogonale et  $\mathbf{S}$  symétrique définie positive telles que  $\mathbf{M} = \mathbf{OS}$ .

Démonstration :

**Existence :**

${}^t\mathbf{MM}$  est une matrice symétrique définie positive car  ${}^t({}^t\mathbf{MM}) = {}^t\mathbf{MM}$ ,

$\det({}^t\mathbf{MM}) = (\det(\mathbf{M}))^2 > 0$  car  $\neq 0$ ,  $\mathbf{M}$  étant une matrice inversible,

de plus  ${}^t\mathbf{X}{}^t\mathbf{MMX} = \|\mathbf{MX}\|^2 \geq 0$  avec  $\|\cdot\|$  norme euclidienne,

${}^t\mathbf{MM}$  étant symétrique, elle est diagonalisable. Si  $\lambda$  est une valeur propre de  ${}^t\mathbf{MM}$ , elle est différente de 0,  $\mathbf{M}$  étant une matrice inversible et soit  $\mathbf{X}_\lambda$

un vecteur propre associé on et si  $\lambda < 0$  on aurait  $\|\mathbf{MX}\|^2 = {}^t\mathbf{X}_\lambda {}^t\mathbf{MMX}_\lambda = \lambda {}^t\mathbf{X}_\lambda \mathbf{X}_\lambda < 0$ , ce qui est impossible, donc on peut écrire :

$${}^t\mathbf{MM} = \mathbf{O}_I \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{O}_I^{-1} \text{ avec } \lambda_i > 0 \text{ car } {}^t\mathbf{O} = \mathbf{O}^{-1}.$$

$$\text{Soit } \mathbf{S} = \mathbf{O}_I \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \mathbf{O}_I^{-1}, \mathbf{S} \text{ est de la forme } \mathbf{S} = \mathbf{O}_I \mathbf{D} \mathbf{O}_I^{-1};$$

$\mathbf{S}$  est symétrique :  ${}^t\mathbf{S} = {}^t\mathbf{O}_I^{-1} \mathbf{D} {}^t\mathbf{O}_I = \mathbf{O}_I \mathbf{D} \mathbf{O}_I^{-1} = \mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}$  est définie positive.

Soit  $\mathbf{O} = \mathbf{MS}^{-1}$ . Montrons que  $\mathbf{O}$  est orthogonale :

On a  ${}^t\mathbf{O} = {}^t(\mathbf{S}^{-1}) {}^t\mathbf{M} = ({}^t\mathbf{S})^{-1} {}^t\mathbf{M} = \mathbf{S}^{-1} {}^t\mathbf{M}$ . Donc :

$${}^t\mathbf{OO} = \mathbf{S}^{-1} ({}^t\mathbf{MM}) \mathbf{S}^{-1} =$$

$$\mathbf{O}_I \begin{bmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\sqrt{\lambda_n})^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{O}_I^{-1} \mathbf{O}_I \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$O_1^{-1} O_1 \begin{bmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\sqrt{\lambda_n})^{-1} \end{bmatrix} O_1^{-1}$$

$$= Id_{\mathbb{R}^n}.$$

donc  $O$  et  $S$  répondent à la question.

**Unicité :**

Soit  $P$  un polynôme tel que  $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$  pour  $i = 1, \dots, p$

par exemple le polynôme d'interpolation de Lagrange pour la fonction sur  $\mathbb{R}^+ : f(x) = \sqrt{x}$ ,

$$P(x) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} \left( \prod_{j=1, j \neq i}^p \frac{(x - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} \right),$$

$$\text{car } \prod_{j=1, j \neq i}^p \frac{(x - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} = 1 \text{ si } x = \lambda_i \text{ et } 0 \text{ si } x = \lambda_j \neq \lambda_i.$$

$$P({}^t M M) = P \left( O_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} O_1^{-1} \right)$$

$$= O_1 P \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) O_1^{-1} = S.$$

Si  $M = OS$  alors  ${}^t M = S O^{-1}$  et  ${}^t M M = S^2$

soit  $S_1$  une autre matrice symétrique, définie positive et  $O_1$  une autre matrice orthogonale

telle que  $M = O_1 S_1$  alors comme précédemment  $S_1^2 = {}^t M M$ .

Calculons  $S_1 {}^t M M = S_1 S_1^2 = S_1^2 S_1 = {}^t M M S_1$  donc  $S_1$  commute avec  ${}^t M M$  et

commute donc avec  $P({}^t M M)$  et donc avec  $S$ . Donc  $S$  et  $S_1$  sont diagonalisables

dans une même base (**lemme 4**). Leurs valeurs propres sont positive non nulles de même

carré car  $S_1^2 = {}^t M M = S^2$  donc elles sont égales et  $S_1 = S$  et donc  $O = O_1$ .

**Remarque :** "définie positive" est indispensable pour avoir l'unicité :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Corollaire :**



Soit  $M$  une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice  $O_1$  orthogonale et  $S_1$  symétrique définie positive telles que  $M = S_1 O_1$ .

De plus  $S_1$  et  $S$  définie au lemme précédent vérifient  $S_1 = M S M^{-1}$ .

Démonstration : (F.R. Gantmacher. "Théorie des matrices " • Edition J • Gabay 1990.)

**Existence :**

On considère  $N = M^{-1} = O_N S_N$  de manière unique d'après le **lemme 3**,

$S_N$  étant symétrique définie positive,  ${}^t(S_N^{-1}) = ({}^t S_N)^{-1} = S_N^{-1}$

donc  $S_N^{-1}$  est aussi symétrique donc diagonalisable.

Soit  $x \neq 0$  un vecteur propre de  $S_N^{-1}$  et  $\lambda \neq 0$  la valeur propre associée :

on a  $x = S_N \cdot S_N^{-1} \cdot x = S_N \cdot \lambda \cdot x$  et donc  $S_N^{-1} x$  est vecteur propre de  $S_N$ ,

et  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  est valeur propre de  $S_N$  donc  $\lambda > 0$  et  $S_N^{-1}$  est symétrique définie positive.

Comme  $O_N$  étant orthogonale  ${}^t O_N = O_N^{-1}$ ,  $O_N^{-1}$  est aussi orthogonale.

On peut donc écrire  $M = S_N^{-1} O_N^{-1}$ .

On peut aussi considérer  $N' = {}^t M = O_N' S_N'$ , et donc  $M = {}^t S_N' {}^t O_N' = S_N' O_N' = S_N' O_N'^{-1}$ .

**Unicité :**

Supposons que  $M = OS = O'S'$  avec  $S \neq S'$  on aura par exemple  $M^{-1} = S^{-1} O^{-1} = S'^{-1} O'^{-1}$ ,

Des équivalences  $((S = S') \Leftrightarrow (S^{-1} = S'^{-1})) \Leftrightarrow ((S \neq S') \Leftrightarrow (S^{-1} \neq S'^{-1}))$

on en déduirait que  $M^{-1}$  aurait 2 décompositions différentes ce qui est contraire au lemme 5, donc la décomposition  $M = OS$  est bien unique.

Supposons maintenant que grâce à ce qui précède on ait  $M = OS = S_1 O_1$  on en déduit que

${}^t M M = S^2$  et  $M {}^t M = S_1^2$ .

Vérifions d'abord que  ${}^t M M$  et  $M {}^t M$  ont mêmes valeurs propres :

${}^t M M$  étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthormée de vecteurs propres :

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  associées aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  avec  $\lambda_i > 0, \forall i$ .

On a si  ${}^t M M X_i = \lambda_i X_i$  et donc  ${}^t X_j {}^t M M X_i = {}^t (M X_j) (M X_i) = {}^t X_j (\lambda_i X_i) = \lambda_i \delta_j^i$

ce qui implique que  ${}^t (M X_i) (M X_i) = \|M X_i\|^2 = \lambda_i > 0$  et comme

$M {}^t M (M X_i) = M ({}^t M M X_i) = \lambda_i (M X_i)$   $\lambda_i$  est bien valeur propre de  $M {}^t M$

avec  $M X_i$  comme vecteur propre ( $\neq 0$ ) associé.

On a vu que  $S = \Omega_1 \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \Omega_1^{-1}$ ,

On a aussi vu que  $M = S_{t_M} {}^t O_{t_M} = S_I O_I$ . Comme  ${}^t M M$  et  $M {}^t M$  ont mêmes valeurs propres :

$$S_I = S_{t_M} = (M \Omega_I) \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \backslash & & \\ & & \backslash & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} (M \Omega_I)^{-1} \text{ et donc } S_I = M S M^{-1}.$$

On peut remarquer que si  $M = OS = S_I O_I$  d'une manière unique, on peut écrire que  $OS = (OS {}^t O) O = S_I O_I$

d'où  $O_I = O$  et  $S_I = OS {}^t O$ .

Pour une autre démonstration de ces formules voir :

(J – B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec."Exercices Algèbre linéaire" •Cepadues éditions 1988 )

### Cas où $M$ n'est pas inversible :

(R. Mneimé, F. Testard "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ".

Hermann Paris 1986 , p 19)

On remarque tout d'abord que  $GL_n(\mathbb{R})$  est dense dans  $M_n(\mathbb{R})$  :

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda_0 = \min(|\lambda_i|/\lambda_i \text{ valeur propre de } M)$  et considérons les matrices inversibles

$M - \lambda Id_{\mathbb{R}^n}$ , avec  $0 < \lambda < \lambda_0$ , qui tendent vers  $M$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

On peut donc considérer une suite  $(M_i)$  de matrice inversibles qui tend vers  $M$ .

D'après ce qui précède  $M_i = O_i S_i$  avec  $O_i$  orthonormale et  $S_i$  symétrique.

On remarque  $O_n(\mathbb{R}) = \{O \mid O \text{ orthormale}\}$  est compact dans  $M_n(\mathbb{R})$  :

Si  $O \in O_n(\mathbb{R})$  et  $\rho$  le rayon spectral  $\|O\|_2 = \rho^{\frac{1}{2}} (O {}^t O) = \rho^{\frac{1}{2}} (Id_{\mathbb{R}^n}) = \sqrt{n}$ ,

donc est borné dans  $M_n(\mathbb{R})$ . D'autre part soit  $\Phi: M \rightarrow M {}^t M$  définie sur  $M_n(\mathbb{R})$ ,

qui est une application continue dans  $M_n(\mathbb{R})$  et on remarque que  $\Phi^{-1}(Id_{\mathbb{R}^n}) = O_n(\mathbb{R})$

par définition même d'une matrice orthormale. Donc  $O_n(\mathbb{R})$  est fermé dans  $M_n(\mathbb{R})$

et donc compact.

De la suite des  $(O_i)$  on peut donc extraire une sous – suite convergente  $(O_{i_k})$  convergente

vers la matrice  $O$  qui est orthonormale car  $O_n(\mathbb{R})$  est fermé dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

On en déduit que la suite de terme général  $S_{i_k} = {}^t O_{i_k} M_{i_k}$  est convergente

vers une matrice  $S$  symétrique (considérer les composantes) et

$M = OS$  avec les propriétés requises.

Puisque  $O$  est inversible le rang de  $S$  est égal au rang de  $M$ , que l'on suppose inférieur strictement à  $n$ .  $O$  n'est déterminé par  $M$  que sur l'image de  $S$  d'où l'impossibilité de démontrer l'unicité.

**Remarque :** L'identité est le seul opérateur à la fois symétrique défini positif et orthormal.

Il suffit d'écrire : si  $A = {}^t A$ ,  $A$  définie positif et  ${}^t A A = Id \Rightarrow A^2 = Id$  or  $Id = Id \circ Id$ , si  $A \neq Id$  cela impliquerait que  $Id$  a 2 décompositions différentes.

### **Théorème 1 :**

Toute matrice  $M$  de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que : } {}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^{n-1}}.$$

Cette décomposition est unique.

Soit  $M$  une matrice de Lorentz  $M = (m_{i,j})$  et  $M_1$  la première colonne de  $M$ .

Si  $M_1 = (m_{i,1})$  alors :

$${}^tM_1 G M_1 = m_{1,1}^2 - m_{1,2}^2 - \dots - m_{1,n}^2 = G_{1,1} = 1.$$

On peut poser  ${}^tM_1 = (\beta, Y)$  avec  $\beta = m_{1,1}$  et  ${}^tY = (m_{1,2}, \dots, m_{1,n})$ .

On a donc  $\beta^2 - {}^tYY = 1$  donc  $|\beta| \geq 1$ . On peut poser  $\beta = \varepsilon \cdot \text{ch}(\alpha)$  avec  $\varepsilon = \pm 1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

De plus  ${}^tYY = \beta^2 - 1 = \text{sh}^2(\alpha)$ .

Si  $\alpha \neq 0$  posons  $X = \frac{Y}{\varepsilon \cdot \text{sh}(\alpha)}$ , on a  ${}^tXX = 1$ .

Si  $\alpha = 0$  on a  ${}^tM_1 = (\varepsilon, 0, 0, 0) \dots$

Dans tous les cas  ${}^tM_1 = \varepsilon(\text{ch}(\alpha), \text{sh}(\alpha)X)$  avec  ${}^tXX = 1$ .

$M_1$  est la première colonne de  $\varepsilon \cdot \exp(\alpha N)$  avec  $N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}$ .

On remarque que  $\exp(-\alpha N) \cdot M$  est une matrice de Lorentz puisque  $M$  et  $\exp(-\alpha N)$  le sont. Calculons la première colonne  $K_1$  de ce produit :

$$K_1 = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & (\text{sh}(-\alpha)) {}^tX \\ (\text{sh}(-\alpha))X & Id_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1)X {}^tX \end{bmatrix} \cdot M_1$$

En remarquant que  ${}^tXX = 1$ ,  $\text{ch}^2(\alpha) - \text{sh}^2(\alpha) = 1$ , et que

$$(Id_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1)X {}^tX) \cdot X = \text{ch}(\alpha) \cdot X \text{ car } (X {}^tX)X = X({}^tXX)$$

on obtient :  ${}^tK_1 = (\varepsilon, 0, \dots, 0)$ . On peut alors appliquer le lemme 2 :

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}.$$

$\alpha N$  étant une matrice symétrique, donc diagonalisable :  $\alpha N = {}^tPDP$ ,  $P$  étant orthogonale, et donc  $\exp(\alpha N) = \exp({}^tPDP) = {}^tP \exp(D)P$  et

$\exp(\alpha N)$  est symétrique définie positive. On a donc décomposé  $M$  en un produit

*d'une matrice définie positive et d'une matrice orthogonale • Il suffit d'appliquer le corollaire du lemme 5 pour avoir l'unicité .*

**Lemme 6 :**

En reprenant les notations précédentes on a :

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & C \end{bmatrix} \text{ avec } [\vec{\gamma\beta}] \text{ les coordonnées de } \vec{\gamma\beta}, \vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & \mathcal{O}_{n-1} \end{bmatrix}, \gamma = ch(\alpha),$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}.$$

Démonstration :

On remarque d'abord que  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$  donc  $W = \exp(\alpha N) W'$ .

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha)X & (Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^{t'} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} {}^t,$$

cela entraine que  ${}^t \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = {}^{t'} \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix}$  et donc  ${}^t = ch(\alpha) {}^{t'}$  d'où :

$$ch(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \Rightarrow ch(\alpha)\vec{\beta} = sh(\alpha)\vec{X},$$

donc  $\vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = th^2(\alpha)$  puisque  $\vec{X}^2 = 1$ .

On pose  $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

$$\text{Comme } 1 - th^2(\alpha) = \frac{1}{ch^2(\alpha)} \Rightarrow ch^2(\alpha) = \frac{1}{1 - th^2(\alpha)} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2,$$

$$\text{comme } ch(\alpha) \geq 1 \quad \gamma = ch(\alpha); \text{ comme } sh^2(\alpha) = ch^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$$

$$= \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \beta^2.$$

En résumé on a  $\gamma = ch(\alpha)$ ,  $\gamma^2 \beta^2 = sh^2(\alpha)$ ,  $\beta^2 = th^2(\alpha)$ .

D'autre part :

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} = (\gamma - 1) = ch(\alpha) - 1$$

$$\text{et } X_i X_j = \frac{(\beta_i \beta_j)}{th^2(\alpha)} = \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} \text{ donc}$$

$$(ch(\alpha) - 1) X_i X_j = \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_i \beta_j, \text{ ce qui permet d'écrire que :}$$

$$Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X^t X = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix} = C$$

$$\text{Comme } sh(\alpha)X_i = \frac{sh(\alpha)\beta_i}{th(\alpha)} = ch(\alpha)\beta_i = \gamma\beta_i \text{ on a finalement :}$$

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & C \end{bmatrix} \text{ avec } [\vec{\gamma\beta}] \text{ les coordonnées de } \vec{\gamma\beta}.$$

On remarque que l'inverse de  $\exp(\alpha N)$  est  $\exp(-\alpha N)$ , il suffit de remplacer  $\vec{\beta}$  par  $-\vec{\beta}$  pour obtenir l'inverse en remarquant que  $\gamma$  et  $C$  sont inchangés.

Si  $\vec{\beta} // \vec{i}$  alors un seul terme de  $C$  est non nul :  $1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta^2$

$$= \frac{(1+\gamma) + \gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)} = \frac{1+\gamma + \gamma^2 - 1}{(1+\gamma)} = \gamma \text{ car}$$

$$\gamma^2 - 1 = \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \beta^2.$$

**Remarque :** (1) Comme  $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$  on peut remplacer  $\delta_j^i + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_i \beta_j$  par  $\delta_j^i + (\gamma - 1) \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2}$

dans l'évaluation de  $\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X^t X$  car  $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}$ .

(2)  $\gamma(1+\beta) = \gamma + \sqrt{(\gamma)^2 - 1}$  car :

$$1 - (\beta)^2 = \frac{1}{(\gamma)^2} \Leftrightarrow (\beta)^2 = 1 - \frac{1}{(\gamma)^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{(\gamma)^2}} \Leftrightarrow \gamma \cdot \beta = \sqrt{(\gamma)^2 - 1}.$$

$$\text{Donc } \frac{1+\beta}{\sqrt{1-(\beta)^2}} = \gamma + \sqrt{(\gamma)^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \gamma + \sqrt{(\gamma)^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = \ln \left( \gamma + \sqrt{(\gamma)^2 - 1} \right);$$

et on retrouve que  $\text{argth}(\beta) = \text{argcosh}(\gamma) = \alpha$  car  $\gamma = \text{ch}(\alpha)$  et  $\beta = \text{th}(\alpha)$ .

$$(3) \text{ Maintenant on va évaluer } {}^\Lambda \Omega = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}.$$

**Evaluation de  $\varepsilon = \pm 1$  :**

Comme

$$W = M W' = \exp(\alpha N) {}^\Lambda \Omega W' = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \gamma \varepsilon & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \Omega \\ \varepsilon [\vec{\gamma\beta}] & C \Omega \end{bmatrix} W'$$

avec  ${}^t W = (ct, tV_1, tV_2, tV_3)$ ,  ${}^t W' = (ct', 0, 0, 0)$ . On en déduit que  $t = \varepsilon \cdot \gamma \cdot t'$ .

Donc si  $\varepsilon = -1$ , il y aurait un renversement du temps.

Par la suite on suppose que  $\varepsilon = +1$ .

Reste à évaluer  $\Omega$ . Remarquons tout d'abord que si  $M$  est symétrique  $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$

car  $M = S \overset{\wedge}{\Omega} = M Id_{\mathbb{R}^4}$  avec  $S$  symétrique définie positive, par unicité de la décomposition  $\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$ .

Pour le cas général évaluons d'abord directement un cas particulier.



**Lemme 7 :**

Dans le cas où l'observateur  $O$  constate que  $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ ,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ , la transformation linéaire  $M$  de  $(O, \mathcal{B}_O)$  dans  $(O, \mathcal{B}_{O'})$  a pour composante orthogonale

$$\Lambda_{\vec{\Omega}} = Id_{\mathbb{R}^4} \text{ et } M \text{ s'écrit } M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ T & & Id_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} \text{ avec } T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Démonstration :

Si  $n=2$  (espace physique à 1 dimension) et  $\varepsilon=1$  (sans retournement de temps), on peut évaluer directement  $M$  :

comme  $\det({}^t\Omega\Omega) = 1$ ,  $\Omega = \pm 1$ .

$$\text{Comme } \Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ \gamma\beta & -\gamma \end{bmatrix}.$$

On obtient :

$ct = \gamma \cdot (ct' + \beta \cdot x')$ ,  $x = \gamma \cdot (\beta \cdot c \cdot t' + x')$  dans le premier cas et

$ct = \gamma \cdot (ct' - \beta \cdot x')$ ,  $x = \gamma \cdot (\beta \cdot c \cdot t' - x')$  dans le second (retournement d'espace).

En particulier dans le premier cas si  $O'$  mesure  $l' = x'_B - x'_A$  la distance entre 2 points  $A$  et  $B$ , il évalue  $x'_B$  et  $x'_A$  au même temps  $t'_A = t'_B$ .

$O$  mesurera  $x_B - x_A = \gamma(x'_B - x'_A)$ . Maintenant si on considère le cas  $n=4$

et si  $\vec{V} = c \cdot \beta \cdot \vec{i} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$  de même sens, tout vecteur  $\vec{W}$  orthogonal à  $\vec{V}$  pour  $O$  le sera pour  $O'$  car pour  $O \parallel \text{Pr}_{\vec{V}}(\vec{W}) \parallel = 0$  et donc de même pour  $O'$ .

Dans ce cas les 2 bases spatiales  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  seront orthogonales (mais pas orthormales) pour  $O$  et  $O'$ .

$O$  et  $O'$  peuvent faire en sorte que les 2 bases soient telles que  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$  de même sens et  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$  de même sens, dans ce cas  $M$  s'écrit sous la forme

$$M = M' \cdot \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ T & & Id_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} \cdot \hat{\Omega} \text{ avec } \beta = \beta_x, T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \Omega \text{ est une matrice orthogonale d'ordre } 3.$$

$$\text{Si } M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \omega_{2,4} \\ 0 & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} & \omega_{3,4} \\ 0 & \omega_{4,2} & \omega_{4,3} & \omega_{4,4} \end{bmatrix}, X1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } X3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on a comme :

$$M' \hat{\Omega} X1 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,2} \\ \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{4,2} \end{bmatrix}, M' \hat{\Omega} X2 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,3} \\ \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} \text{ et } M' \hat{\Omega} X3 = \begin{bmatrix} \gamma\beta \omega_{2,4} \\ \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

et  $\overrightarrow{Ox} // \overrightarrow{O'x'}$  de même sens,  $\overrightarrow{Oy} // \overrightarrow{O'y'}$  de même sens,  $\overrightarrow{Oz} // \overrightarrow{O'z'}$  de même sens :

$$\begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu \end{bmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \text{ positifs d'où :}$$

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

Comme  $\hat{\Omega}$  est orthogonal, symétrique :  ${}^t(\hat{\Omega}) \cdot \hat{\Omega} = (\hat{\Omega})^2 = Id_{\mathbb{R}^4}$

et les sens étant conservés  $\hat{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$ .

On remarque que  $\lambda = \gamma$  et  $\mu = \nu = 1$  : invariance des vecteurs orthogonaux au mouvement.

$$\text{Réciproquement si } M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \beta \geq 0, M \text{ est symétrique donc } \hat{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$$

et  $M = \Lambda(\vec{\beta})$  d'où :  $\vec{V} = c \cdot \beta \cdot \vec{i} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{i} = \gamma \vec{i'}$ ,  $\vec{j} = \vec{j'}$  et  $\vec{k} = \vec{k'}$ .

Donc les matrices de Lorentz qui laissent invariants  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ ,  $\vec{i} = \gamma \vec{i'}$  et  $\vec{V} = c \cdot \beta \cdot \vec{i} // \vec{Ox}$

sont bien de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Remarque :**

Tout calcul fait on a :

$$M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Donc les valeurs propres de  $M'$  sont  $\gamma \cdot (1 + \beta)$ ,  $\gamma \cdot (1 - \beta)$ ,  $1$ .

En se servant des remarques du lemme 6 on a :

$$\gamma \cdot (1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \text{ et donc que } \gamma \cdot (1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

De plus  $\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) = \operatorname{argth}(\beta) = \alpha$ , les valeurs propres de  $M'$  peuvent s'écrire :

$$\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \exp \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right) = e^\alpha, \quad \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right) = e^{-\alpha} \text{ et } 1.$$

**Lemme 8 :**

(1) Dans le cas où les observateurs  $O$  et  $O'$  constate que  $\vec{Ox} // \vec{O'x'}$ ,  $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ ,  $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$  et s'il n'y a pas retournement du temps, la partie orthogonale de  $M$  vérifie  $\Omega = Id_{\mathbb{R}^4}$ .

(2) Si une matrice de Lorentz  $M$  ne conserve pas le parallélisme des vecteurs de base spatiaux, et s'il n'y a pas retournement du temps alors  $M$  s'écrit sous la forme  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$  où  $\Omega$  est une matrice orthogonale produit de 3 rotations explicitées lors de la démonstration.

**Démonstration :**

(1) Considérons le schéma suivant :

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{M} \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

$$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{M'} \mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1)$$

$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base spatio-temporelle associée à l'observateur  $O$ .

$\mathcal{B}'(\vec{\tau}, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  est une base spatio – temporelle associée à l'observateur  $\mathbf{O}'$ .

$\mathbf{O}'$  a une vitesse uniforme  $\vec{V}$  par rapport à  $\mathbf{O}$ .

Contrairement au lemme précédent  $\vec{V}$  n'est pas forcément parallèle à la composante spatiale de  $\vec{i}$  mais par contre la composante spatiale de  $\vec{i}$  reste parallèle à celle de  $\vec{i}'$ , de même pour  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  malgré le mouvement de  $\mathbf{O}'$  pour les 2 observateurs.

$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  est une autre base associée à  $\mathbf{O}$  obtenue par une rotation  $\mathbf{R}$  des composantes

spatiales de  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$ . On pose  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}$

• La rotation est choisie pour que la composante spatiale de

$\vec{i}_1$  soit parallèle à celle de  $\vec{V}$ . • On remarque que  $\mathbf{P}$  est une matrice (orthogonale) de Lorentz.

Soit donc  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$  la matrice orthogonale de changement de base laissant le temps invariant et

transformant  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  en  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ .

Considérons  $\mathcal{B}'_1$  défini par  $\mathbf{P} = \text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$ . • Puisque la composante spatiale de

$\vec{i}$  est parallèle à celle de  $\vec{i}'$ ,

de même pour  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  la même rotation  $\mathbf{R}$  donnera la composante spatiale

$\vec{i}_1$  parallèle à celle de  $\vec{i}'$ ,

de même pour  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$ , avec en plus la composante spatiale de  $\vec{i}'_1$  parallèle à celle de  $\vec{V}$ .

Soit  $\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  est la matrice de Lorentz de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}'_1$ :

$\mathbf{M} = {}^t\mathbf{P}\mathbf{M}'\mathbf{P}$  ou  $\mathbf{M}' = \mathbf{P}\mathbf{M}^t\mathbf{P}$  et comme  $\mathbf{M}$  est de Lorentz, elle est de la forme  $\mathbf{M} = \Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega}$ .

Par construction  $\mathbf{M}' = \mathbf{P}(\Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega})^t\mathbf{P}$ , d'après le lemme 6  $\Lambda(\vec{\beta})$  est symétrique, définie positive

$\overset{\wedge}{\Omega}$  est orthogonal et cela d'une manière unique. • De plus  $\mathbf{M}'$  est symétrique, définie positive (lemme 7)

et on peut toujours écrire  $\mathbf{M}' = \mathbf{P}(\Lambda(\vec{\beta}) \overset{\wedge}{\Omega})^t\mathbf{P} = (\mathbf{P}\Lambda(\vec{\beta})^t\mathbf{P})(\mathbf{P}\overset{\wedge}{\Omega}^t\mathbf{P})$ .

On remarque que  $\mathbf{P}\Lambda(\vec{\beta})^t\mathbf{P}$  est symétrique et que  $\mathbf{P}\overset{\wedge}{\Omega}^t\mathbf{P}$  est orthogonal car

${}^t(\mathbf{P}\overset{\wedge}{\Omega}^t\mathbf{P})(\mathbf{P}\overset{\wedge}{\Omega}^t\mathbf{P}) = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$  car  $\mathbf{P}^t\mathbf{P} = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ .

En résumé :  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}' \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}^4} = (\mathbf{P}\Lambda(\vec{\beta})^t\mathbf{P})(\mathbf{P}\overset{\wedge}{\Omega}^t\mathbf{P})$ .

Par unicité de la décomposition  ${}^t\mathbf{P}\overset{\wedge}{\Omega}\mathbf{P} = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$  et  $\mathbf{M}' = ({}^t\mathbf{P}\Lambda(\vec{\beta})\mathbf{P})$ .

On en déduit que  $\overset{\wedge}{\Omega} = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ , donc  $\mathbf{M}' = \mathbf{P}\Lambda(\vec{\beta})^t\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{M}^t\mathbf{P}$

On a donc :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix} = {}^t P M' P,$$

où  $P$  est une matrice orthogonale,  $M$  a donc les mêmes valeurs propres que  $M'$ .

(2) Maintenant considérons le cas général où la matrice de Lorentz  $M = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$  transforme les vecteurs  $(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  en les vecteurs  $(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ .

$M$  s'écrit  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \mathcal{Q}$ .

(3) Considérons le schéma suivant :

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{M} \mathcal{B}'(\vec{\tau}', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$$

$\downarrow Q$

$P \downarrow$

$$\mathcal{B}'_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1)$$

$\downarrow R$

$$\mathcal{B}_1(\vec{\tau}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\Lambda_1(\vec{\beta})} \mathcal{B}''_1(\vec{\tau}', \vec{i}'_1, \vec{j}''_1, \vec{k}''_1)$$

où  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_P \end{bmatrix}$  avec  $\Omega_P$  est la rotation qui amène la partie spatiale de  $\vec{i}$  en  $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ ,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_Q \end{bmatrix}$  avec  $\Omega_Q$  est la rotation qui amène la partie spatiale de  $\vec{i}'$  en  $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ ,

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_R \end{bmatrix}$  avec  $\Omega_R$  est la rotation qui aligne les parties spatiales de  $\vec{j}'_1$  et  $\vec{k}'_1$

sur celle de  $\vec{j}_1$  et  $\vec{k}_1$ ,

$$\Lambda_1(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \beta = \left\| \frac{\vec{V}}{c} \right\|.$$

On a  $M = {}^t Q R \Lambda_1(\vec{\beta}) P = ({}^t Q R \Lambda_1(\vec{\beta}) R Q) {}^t Q R P$  or d'une manière générale  $M = \Lambda(\vec{\beta}) \mathcal{O}$  avec  $\Lambda(\vec{\beta})$  matrice symétrique et  $\mathcal{O}$  matrice orthogonale et cela d'une manière unique.

Par identification  ${}^t\mathcal{Q}R\Lambda_I(\vec{\beta})RQ=\Lambda(\vec{\beta})$  et  $\mathcal{Q}={}^t\mathcal{Q}RP$ .

**Lemme 9 :**

Soit  $M = \Lambda(\vec{\beta})$  une matrice de Lorentz symétrique.

Si on pose  $X = MX'$  avec  $X = {}^t(ct, [\vec{r}])$ ,  $[\vec{r}]$  les coordonnées du vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ , position d'un point  $P$  dans un espace à 3 dimensions, de même  $X' = {}^t(ct', [\vec{r}'])$  on a l'équivalence :

$$X = MX' \Leftrightarrow \left\{ ct = \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}), \vec{r} = \vec{r}' + \gamma \vec{\beta} \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{r}' + ct' \right) \right\}.$$

Démonstration :

$$X = MX' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ct \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2\beta_1^2}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_1\beta_2}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_1\beta_3}{\gamma+1} \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2\beta_2\beta_1}{\gamma+1} & 1 + \frac{\gamma^2\beta_2^2}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_2\beta_3}{\gamma+1} \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2\beta_3\beta_1}{\gamma+1} & \frac{\gamma^2\beta_3\beta_2}{\gamma+1} & 1 + \frac{\gamma^2\beta_3^2}{\gamma+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{bmatrix},$$

il suffit alors de faire le produit matriciel.

**Lemme 10 :**

Loi de transformation des vitesses et des accélérations :

Si on pose  $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$  et  $\vec{V}'(t') = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$  on a :

$$\vec{V}(t) = \frac{\vec{V}'(t') + \gamma \vec{\beta} \left( \frac{\gamma(\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t'))}{1 + \gamma} + c \right)}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t')}{c} \right)}.$$

Si on pose  $\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$  et  $\vec{A}'(t') = \frac{d\vec{V}'(t')}{dt'}$  on a :

$$\vec{A}(t) = \frac{\vec{A}'(t') + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{A}'(t'))}{1 + \gamma}}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t')}{c} \right)^2} - \frac{\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{A}'(t'))}{c} \cdot \left( \vec{V}'(t') + \gamma \vec{\beta} \left( \frac{\gamma(\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t'))}{1 + \gamma} + c \right) \right)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t')}{c} \right)^3}$$

Démonstration :

De  $ct = \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}')$  implique que  $cdt = \gamma(cdt' + \vec{\beta} \cdot d\vec{r}')$  et donc que

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot d\vec{r}'}{c dt'} \right),$$

et  $\vec{r} = \vec{r}' + \gamma \vec{\beta} \left( ct' + \frac{\gamma}{(1+\gamma)} (\vec{\beta} \cdot \vec{r}') \right)$  implique que :

$$\frac{\vec{dr}}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{\vec{dr}}{dt} = \frac{\vec{dr}'}{dt'} + \gamma \vec{\beta} c + \frac{\gamma \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \left( \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{dr}'}{dt'} \right) \text{ d'où :}$$

$$\frac{\vec{dr}}{dt} = \frac{\frac{\vec{dr}'}{dt'} + \gamma \vec{\beta} \left( c + \frac{\gamma}{(1+\gamma)} \left( \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{dr}'}{dt'} \right) \right)}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{dr}'}{c} \right)},$$

on a , en dérivant :

$$\frac{\vec{dV}}{dt} = \frac{\frac{d}{dt'} \vec{V}'(t') + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} \left( \vec{\beta} \cdot \left( \frac{d}{dt'} \vec{V}'(t') \right) \right)}{1+\gamma}}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'}{c} (t') \right)^2} - \frac{\left( \vec{V}'(t') + \gamma \vec{\beta} \left( \frac{\gamma (\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t'))}{1+\gamma} + c \right) \right) \left( \left( \frac{\vec{\beta}}{c} \right) \cdot \left( \frac{d}{dt'} \vec{V}'(t') \right) \right)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'}{c} (t') \right)^3}$$

$$\vec{A}(t) = \frac{\vec{A}'(t') + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{A}'(t'))}{1+\gamma}}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'}{c} (t') \right)^2} - \frac{\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{A}'(t'))}{c} \cdot \left( \vec{V}'(t') + \gamma \vec{\beta} \left( \frac{\gamma (\vec{\beta} \cdot \vec{V}'(t'))}{1+\gamma} + c \right) \right)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}'}{c} (t') \right)^3}$$

Dans le cas particulier où  $\vec{\beta} = \beta_x \vec{i}$  , en se rappelant toujours que  $\frac{\gamma (\vec{\beta})^2}{1+\gamma} = 1 - \gamma$ ,  
on peut calculer  $A_x, A_y, A_z$  plus simplement :

$$A_x = \frac{\left( A'_x + \frac{\gamma^2 \beta_x^2 A'_x}{1+\gamma} \right) \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right) - \left( \frac{\beta_x A'_x V'_x}{c} + \frac{\gamma^2 \beta_x^3 A'_x V'_x}{c(1+\gamma)} + \gamma \beta_x^2 A'_x \right)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3}$$

$$= \frac{\gamma A'_x + \frac{\gamma A_x \beta_x V'_x}{c} - \frac{\beta_x A'_x V'_x}{c} - \frac{\gamma^2 \beta_x^3 A'_x V'_x}{c(1+\gamma)} - \gamma \beta_x^2 A'_x}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3}$$

$$= \frac{\gamma A'_x + \frac{A'_x \beta_x V'_x}{c} (\gamma - 1 + (1 - \gamma) - \gamma \beta_x^2) - \gamma \beta_x^2 A'_x}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3} = \frac{A'_x \gamma (1 - \beta_x^2)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3} = \frac{A'_x}{\gamma^3 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3}$$



$$A_y = \frac{A'_y \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right) - \frac{\beta_x A'_x V'_y}{c}}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3} = \frac{A'_y + \frac{\beta_x A'_y V'_x}{c} - \frac{\beta_x A'_x V'_y}{c}}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3} = \frac{A'_y + \frac{\beta_x}{c} (A'_y V'_x - A'_x V'_y)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3},$$

de même pour  $A_z$ .

$$\text{En résumé : } A_x = \frac{A'_x}{\gamma^3 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3}, A_y = \frac{A'_y + \frac{\beta_x}{c} (A'_y V'_x - A'_x V'_y)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3}, A_z = \frac{A'_z + \frac{\beta_x}{c} (A'_z V'_x - A'_x V'_z)}{\gamma^2 \left( 1 + \frac{\beta_x V'_x}{c} \right)^3}.$$

Formules obtenues directement dans J • Ph • Pérez . " Relativité et invariance " Dunod 2011 p 74.

### **Lemme 11 :**

Lorsque  $M$  est de la forme  $M = \Lambda(\vec{\beta})P$ , il se peut que  $M$  ne soit pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  :

prendre  $\Lambda(\vec{\beta}) = Id$  et  $\Omega$  une rotation de  $\mathbb{R}^3$  non diagonalisable dans  $\mathbb{R}$

Par contre  $\Lambda(\vec{\beta})$  l'est toujours puisque symétrique :

Les valeurs et vecteurs propres de

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{sont } \{ \gamma(1+\beta), \gamma(1-\beta), 1, 1 \} \text{ et respectivement } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\beta^{-1} \cdot \beta_3 \\ 0 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \end{array} \right] \cdot$$

Les traces des directions propres sur les 3 dernières coordonnées ont pour direction  $\vec{\beta}$  et 2 autres vecteurs • Les 3 direction sont perpendiculaire 2 à 2.

$$M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ a les mêmes valeurs propres que } M.$$

En reprenant les notations précédentes :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{X} \cdot \vec{X} = 1.$$

Comme les valeurs propres de  $N$  sont  $\{1, -1, 0, 0\}$  et les vecteurs propres associés sont :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \right\}$$

Si on considère  $B$  la base constituée de ces vecteurs propres la matrice diagonale des valeurs propres, on a  $N = BDB^{-1}$  • Ne pas oublier que  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \vec{X} \cdot \vec{X} = 1$ .

[>

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_2 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_2 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant  $\exp(\alpha N)$ , comme  $\exp(\alpha N) = \exp(B\alpha DB^{-1}) = B\exp(\alpha D)B^{-1}$  et

donc :

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_2 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_2 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Or  $\gamma = \text{ch}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \Rightarrow e^\alpha = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ ,

comme  $\gamma^2 - 1 = \beta^2 \gamma^2 \Rightarrow e^\alpha = \gamma(1 + \beta)$  et  $e^{-\alpha} = \gamma(1 - \beta)$  avec  $\beta = \sqrt{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}$ .

Comme  $\text{coth}(\alpha) = \beta^{-1}$  et  $\vec{X} = \text{coth}(\alpha)\vec{\beta}$  :

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \beta^1 \cdot \beta_1 & \beta^1 \cdot \beta_1 & -\beta^1 \cdot \beta_2 & -\beta^1 \cdot \beta_3 \\ \beta^1 \cdot \beta_2 & \beta^1 \cdot \beta_2 & \beta^1 \cdot \beta_1 & 0 \\ \beta^1 \cdot \beta_3 & \beta^1 \cdot \beta_3 & 0 & \beta^1 \cdot \beta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1 + \beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1 - \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \beta^1 \cdot \beta_1 & \beta^1 \cdot \beta_1 & -\beta^1 \cdot \beta_2 & -\beta^1 \cdot \beta_3 \\ \beta^1 \cdot \beta_2 & \beta^1 \cdot \beta_2 & \beta^1 \cdot \beta_1 & 0 \\ \beta^1 \cdot \beta_3 & \beta^1 \cdot \beta_3 & 0 & \beta^1 \cdot \beta_1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & \frac{\gamma \beta_1 \beta^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\gamma \beta^2 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\gamma \beta_3 \beta^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \\ \beta_1 \gamma & \frac{\gamma \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_2 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_3 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \\ \beta_2 \gamma & \frac{\beta_2 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\gamma \beta_2^2 + \beta_1^2 + \beta_3^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_2 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \\ \beta_3 \gamma & \frac{\beta_3 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_2 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\gamma \beta_3^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \beta_1 & \gamma \beta_2 & \gamma \beta_3 \\ \gamma \beta_1 & 1 + \frac{\beta_1^2 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \frac{\beta_2 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \frac{\beta_3 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta^2} \\ \gamma \beta_2 & \frac{\beta_2 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta^2} & 1 + \frac{\beta_2^2 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \frac{\beta_2 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} \\ \gamma \beta_3 & \frac{\beta_3 \beta_1 (\gamma - 1)}{\beta^2} & \frac{\beta_2 \beta_3 (\gamma - 1)}{\beta^2} & 1 + \frac{\beta_3^2 (\gamma - 1)}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_1 \cdot \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_1 \cdot \beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_2 \cdot \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_2 \cdot \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_3 \cdot \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_3 \cdot \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_3 \cdot \beta_3 \end{bmatrix}$$

car  $\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}$ .

On vérifie que :

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_1 \cdot \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_1 \cdot \beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_2 \cdot \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_2 \cdot \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_3 \cdot \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_3 \cdot \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \cdot \beta_3 \cdot \beta_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta)}{\beta} \\ \frac{\beta_1(1 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta)\gamma^2 + (\beta+1)\gamma)}{(1+\gamma)\beta} \\ \frac{\beta_2(1 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta)\gamma^2 + (\beta+1)\gamma)}{(1+\gamma)\beta} \\ \frac{\beta_3(1 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta)\gamma^2 + (\beta+1)\gamma)}{(1+\gamma)\beta} \end{bmatrix} = \gamma(1+\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_1 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_2 \\ \beta^{-1} \cdot \beta_3 \end{bmatrix} \text{ car :}$$

$$1 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta)\gamma^2 + (\beta+1)\gamma = 1 + \beta \cdot (1+\beta)\gamma^2 + (\beta+1)\gamma$$

$$= 1 + (\beta+1)\gamma(1+\gamma).$$

$$\text{D'où } \frac{\beta_1(1 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta)\gamma^2 + (\beta+1)\gamma)}{(1+\gamma)\beta} = \frac{\beta_1(1 + (\beta+1)\gamma(1+\gamma))}{(1+\gamma)\beta} \text{ or}$$

$$\gamma(1+\beta)\beta^{-1}\cdot\beta_1 = \frac{\beta_1(1+(\beta^2+\beta)\gamma^2+(\beta+1)\gamma)}{(1+\gamma)\beta} \Leftrightarrow \gamma(1+\beta)\cdot\beta_1(1+\gamma) = \beta_1(1+\beta(\gamma$$

$$+\gamma^2)+\gamma^2-1+\gamma)$$

car  $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$  et  $\beta_1(\beta(\gamma+\gamma^2)+\gamma^2+\gamma) = \beta_1(\gamma+\gamma^2)(1+\beta) = \beta_1(1+\gamma)\gamma(1+\beta)$ .

De même :

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_1\cdot\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_1\cdot\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_1\cdot\beta_3 \\ \gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_2\cdot\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_2\cdot\beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_2\cdot\beta_3 \\ \gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_3\cdot\beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_3\cdot\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\cdot\beta_3\cdot\beta_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \beta^{-1}\cdot\beta_1 \\ \beta^{-1}\cdot\beta_2 \\ \beta^{-1}\cdot\beta_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\gamma(-\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2+\beta)}{\beta} \\ -\frac{(-1+(-\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2+\beta)\gamma^2+(\beta-1)\gamma)\beta_1}{(1+\gamma)\beta} \\ -\frac{(-1+(-\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2+\beta)\gamma^2+(\beta-1)\gamma)\beta_2}{(1+\gamma)\beta} \\ -\frac{(-1+(-\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2+\beta)\gamma^2+(\beta-1)\gamma)\beta_3}{(1+\gamma)\beta} \end{bmatrix} = \gamma(1-\beta) \begin{bmatrix} -1 \\ \beta^{-1}\cdot\beta_1 \\ \beta^{-1}\cdot\beta_2 \\ \beta^{-1}\cdot\beta_3 \end{bmatrix}.$$

Tout calcul fait on a : (cf: lemme 8)

$$M' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

## Chapitre 3 :

### **Nature des vecteurs de l'espace — temps .**

Dans un espace de Minkowski, la forme quadratique associée à cet espace permet de classer les vecteurs en 3 catégories que l'on va étudier .

#### Vecteurs dans un espace de Minkowski :

(J-M. Souriau. "Calcul Linéaire " • PUF 1964 .)

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  à 4 dimensions muni de la forme quadratique de **Lorentz** :

$$\Phi(X) = x_1^2 - \sum_{i=2}^4 x_i^2 \text{ où } {}^bX = (x_1, \dots, x_4), \text{ qui a pour matrice}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & {}^t0 \\ & & & \\ 0 & & -Id_{\mathbb{R}^3} & \\ & & & \end{bmatrix} \text{ où } 0 \text{ est la colonne nulle de } \mathbb{R}^3.$$

On veut décrire les ensembles de vecteurs  $X$  de  $\mathbb{R}^4$  définis selon le signe de

$\Phi(X)$ . On distingue 3 sous-ensembles :

$$E_+ = \{X \in \mathbb{R}^4 / \Phi(X) > 0\} \cup \{0\} \text{ les "vecteurs temps",}$$

$$E_- = \{X \in \mathbb{R}^4 / \Phi(X) < 0\} \cup \{0\} \text{ les "vecteurs espaces",}$$

$$E_0 = \{X \in \mathbb{R}^4 / \Phi(X) = 0\} \text{ les "vecteurs isotropes".}$$

Le fait d'ajouter ou non  $\{0\}$  à  $E_+$  et à  $E_-$  est variable selon les auteurs .

On remarque que la nature des vecteurs est indépendante de la base de  $\mathbb{R}^4$  choisie : si on note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ ,

$$X = PX', Y = PY' \text{ et } G' = {}^tPGP \text{ d'après le lemme 1 ci-dessous .}$$

$${}^tXGX = ({}^tX {}^tP)G(PX') = {}^tX'({}^tPGP)X' = {}^tX'G'X'.$$

#### Lemme 1 :

Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel  $F$  de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  2 bases de  $F$ ,  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ,  $A$  la matrice représentant  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ .

Alors la matrice  $B$  représentant  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}'$  vérifie :  $B = {}^tPAP$ .

Tout espace vectoriel  $F$  de dimension finie  $n$ , muni d'une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  possède une base  $\varphi$ -orthogonale de  $n$  éléments distincts .

**Démonstration :**

On a  $\varphi(x, y) = {}^tX'BY' = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = X'{}^tPAPY'$  avec  $x$  et  $y$  éléments de  $F$ ,  $X$  et  $Y$  leur représentation dans  $\mathcal{B}$ ,  $X'$  et  $Y'$  leur représentation dans  $\mathcal{B}'$ ,  $A$  et  $B$  la représentation de  $\varphi$  pour  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . En remarquant qu'il y a unicité de la représentation de  $\varphi$  pour une base donnée  $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ ,

car elle est égale à  $(\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$ , on a :  $B = {}^tPAP$ .

Montrons que si  $\varphi \neq 0$ , si  $x \in F$  est non isotrope alors  $(\mathbb{R}x) \oplus (\mathbb{R}x)^\perp = F$ .

Montrons d'abord que  $(\mathbb{R}x) \cap (\mathbb{R}x)^\perp = \{0\}$  :

Soit  $y \in (\mathbb{R}x) \cap (\mathbb{R}x)^\perp$ ,  $y \in (\mathbb{R}x)$  donc  $\exists \lambda$  tel que  $y = \lambda x$  et  $y \in (\mathbb{R}x)^\perp$ , donc  $\varphi(x, y) = 0 = \varphi(x, \lambda x) = \lambda \varphi(x, x) \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow y = 0$ .

Comme  $\varphi(x, x) \neq 0, \forall y \in F, y = y - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, x)}x + \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, x)}x$  or

$$\varphi\left(y - \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x, x)}x, x\right) = 0 \text{ et donc } F = (\mathbb{R}x) + (\mathbb{R}x)^\perp \text{ et donc } (\mathbb{R}x) \oplus (\mathbb{R}x)^\perp = F.$$

Montrons maintenant l'existence d'une base orthogonale.

Si  $\varphi = 0$  toute base est orthogonale.

Supposons que  $\varphi \neq 0$  et montrons le résultat par récurrence :

Si  $n = 1$  la propriété est vérifiée. Supposons qu'elle est vraie pour  $F$  de dimension  $n - 1$ .

Soit  $F$  de dimension  $n$ , comme  $\varphi \neq 0$  il existe  $e_n \in F$  tel que  $\varphi(e_n, e_n) \neq 0$ .

D'après ce qui précède  $(\mathbb{R}e_n) \oplus (\mathbb{R}e_n)^\perp = F$  or  $\dim(\mathbb{R}e_n)^\perp = n - 1$  et possède

donc une base orthogonale  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  éléments et  $e_n$  est orthogonal

à tout élément de cette base et alors  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base orthogonale de  $F$  :

Il est orthogonal par construction. Il est générateur car si  $z \in F$ ,

$$z = z_1 + z_2 \text{ avec } z_1 \in \mathbb{R}e_n \text{ et } z_2 \in (\mathbb{R}e_n)^\perp \text{ et donc } z = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Il est libre car si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ ,  $0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j\right) = \lambda_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ .

### Remarque :

Cela revient à dire que toute matrice symétrique  $S$  peut s'écrire sous la forme  $S = {}^t T D T$  où  $D$  est une matrice diagonale de diagonale  $(d_{ii})_{i=1, n}$  et  $T$  est une matrice carrée inversible.

Si on note  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base initiale et s'il existe une base  $\varphi$  - orthogonale  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$

et si on note  $P$  la matrice de passage à la base  $\varphi$  - orthogonale on aura

$$\varphi(X, Y) = {}^t X S Y = {}^t (P X') S (P Y') = {}^t X {}^t P S P Y'.$$

$$\text{Par ailleurs si } X = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda'_i e'_i \text{ et } Y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu'_i e'_i,$$

$$\varphi(X, Y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda'_i e'_i, \sum_{j=1}^n \mu'_j e'_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \mu'_i \varphi(e_i, e_i) = {}^t X {}^t D Y =$$

avec  $D$  la matrice diagonale dont la diagonale est  $(\varphi(e_i, e_i))$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

D'où  ${}^t P S P = D$  et donc  $S = ({}^t P)^{-1} D P^{-1} = {}^t (P^{-1}) D P^{-1}$ , il suffit donc de poser  $T = P^{-1}$ .

Réciproquement si  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées de 2 vecteurs  $x$  et  $y$  de  $F$  on a :

$$\varphi(X, Y) = {}^t X S Y = {}^t X {}^t P D P Y = {}^t (P X) D (P Y) = {}^t X {}^t D Y'$$

avec  $P X = X'$  et  $P Y = Y'$ . Considérons une base  $(e_i)_{i=1, n}$  de  $E$ ,

notons que  $e_i$  a pour coordonnées dans cette base  $E_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  avec

1 à la  $i$  - ième place. Comme  $P$  est inversible,  $(E'_i = P^{-1} E_i)_{i=1, n}$  sont aussi

les coordonnées de vecteurs d'une base de  $E$  et on a :

$$\varphi(E'_i, E'_j) = \varphi(P^{-1} E_i, P^{-1} E_j) = {}^t (P P^{-1} E_i) D (P P^{-1} E_j) = {}^t E_i D E_j$$



$= 0$  si  $i \neq j$ , sinon  $d_{ii}$  si  $i = j$ .

### Lemme 2 :

Soit  $\Phi$  une forme quadratique sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  alors il existe  $p$  et  $q$  2 entiers naturels tels que  $p + q \leq n$  et il existe une base  $\mathcal{B}$  orthogonale pour  $\Phi$  de  $E$ , dans laquelle la matrice de  $\Phi$  est de la forme diagonale :

$$\begin{bmatrix} Id_{\mathbb{R}^p} & & \\ & -Id_{\mathbb{R}^q} & \\ & & O_{\mathbb{R}^{n-(p+q)}} \end{bmatrix}$$

Le triplet  $(n, p, q)$  est unique et s'appelle la signature de la forme quadratique,  $p$  l'indice d'inertie.

### Démonstration :

D'après le lemme précédent, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  orthogonale pour  $\Phi$ , c'est à dire que la matrice  $D$  représentant  $\Phi$  dans  $\mathcal{B}$  est diagonale.

Si  $(d_i)_{i=1, n}$  est la diagonale de  $D$ , on peut permuer les éléments de la base  $\mathcal{B}$

pour avoir :  $1 \leq i \leq p \quad d_i > 0$ ,

$p+1 \leq i \leq p+q \quad d_i < 0$

$p+q+1 \leq i \leq n \quad d_i = 0$ .

Posons pour  $i$  tel que  $1 \leq i \leq p+q$  :  $\delta_i^2 = |d_i|$

pour  $i$  tel que  $p+q+1 \leq i \leq n \quad \delta_i = 1$ .

Considérons la matrice diagonale inversible  $Q$  telle que  $Q_{i,i} = \delta_i$

et en notant  $S_{p,q} = \begin{bmatrix} Id_{\mathbb{R}^p} & & \\ & -Id_{\mathbb{R}^q} & \\ & & O_{\mathbb{R}^{n-(p+q)}} \end{bmatrix}$  on a  $D = {}^t Q S_{p,q} Q$

donc il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  déduite de la base  $\mathcal{B}$  par la matrice de passage  $Q$ .

Supposons qu'il existe  $S_{p,q}$  et  $S_{p',q'}$  répondant à la question avec  $0 \leq p+q \leq n$  et

$0 \leq p'+q' \leq n$  et que  $\Phi$  est représentée par  $S_{p,q}$  dans une base  $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$

et par  $S'_{p',q'}$  dans une autre  $\mathcal{B}'(e'_1, \dots, e'_n)$ .

Posons  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  et  $G' = \text{Vect}(e'_{p'+1}, \dots, e'_n)$  on a :

$\Phi(x) > 0 \quad \forall x \in F \setminus \{0\}$  et  $\Phi(x) \leq 0 \quad \forall x \in G'$  donc nécessairement  $F \cap G' = \{0\}$ .

Comme  $n = \dim(E) \geq \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = p + (n - p')$  et donc  $p' \geq p$ .

En faisant le raisonnement symétrique avec  $G'_1 = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_{p'})$  et  $F_1 = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$

on obtient  $p' \leq p$  et donc  $p = p'$  et  $q = q'$  d'où l'unicité.

### Lemme 3 :

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  à 4 dimensions muni de la forme quadratique de Lorentz.

Il existe dans  $\mathbb{R}^4$  un sous-espace de dimension 3 de vecteurs d'espace.

**Démonstration :**

Considérer par exemple :  $\{X \in \mathbb{R}^4 / x_1 = 0\}$ .

**Lemme 4 :**

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  à 4 dimensions muni de la forme quadratique de **Lorentz**.

Il n'existe pas dans  $\mathbb{R}^4$  de sous-espace de dimension  $\geq 2$  de vecteurs temps.

**Démonstration :**

Car sinon il existe un sous-espace  $F$  de dimension au moins égale à 2 de vecteurs temps. Comme il existe un sous-espace  $G$  de vecteurs espaces de dimension 3 et comme  $F \cap G = \{0\}$  et donc  $\dim(\mathbb{R}^4) \geq 5$ .

**Lemme 5 :**

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  à 4 dimensions muni de la forme quadratique de **Lorentz**.

Soit 2 vecteurs de  $\mathbb{R}^4$   $X$  et  $Y$  non nuls tels que  ${}^tXGX \geq 0$ ,  ${}^tYGY \geq 0$  et  ${}^tXGY = 0$  alors  $X$  et  $Y$  sont colinéaires et isotropes.

**Démonstration :**

Si on considère  $X$  et  $Y$  2 vecteurs temps non nuls. Si ils sont indépendants ils engendrent un s.e.v de dimension 2 de vecteurs positifs. C'est impossible donc  $\exists \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$X = \lambda Y \text{ et donc } 0 = {}^tXGY = \lambda {}^tYGY = \frac{1}{\lambda} {}^tXGX.$$

**Lemme 6 :**

(1) Tout vecteur  $X$  non nul orthogonal à un vecteur de temps  $Y$  non nul ( ${}^tXGY = 0$ ) est un vecteur d'espace.

(2) 2 vecteurs isotropes indépendants non nuls  $X$  et  $Y$  ne sont jamais orthogonaux.

**Démonstration :**

(1)

Si  $X$  était un vecteur de temps non nul :  ${}^tXGX > 0$  et  $Y$  tel que  ${}^tXGY = 0$  alors  ${}^tYGY < 0$  car sinon  ${}^tYGY \geq 0$  et comme  ${}^tXGX > 0$  et  ${}^tXGY = 0$ , d'après le lemme 5  $X$  serait isotrope, ce qui est contradictoire.

(2)

Car sinon  $0 = {}^tXGY = {}^tXGX = {}^tYGY$  d'après le lemme 5  $X$  et  $Y$  sont liés.

**Définition :**

Pour tout vecteur de temps ( ${}^tXGX \geq 0$ ) on pose  $\|X\|_G = \sqrt{{}^tXGX}$ .

**Lemme 7 :**

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , alors pour toute base  $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ , si on considère la matrice représentant  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ :

$Q = (\varphi(e_i, e_j))$ , alors le déterminant de  $Q$  est du signe de  $(-1)^{n-p}$  ou  $p$  est l'indice d'inertie de  $\varphi$ .

**Démonstration :**

D'après le lemme 2 il existe une base  $\mathcal{B}'(e'_1, \dots, e'_n)$  où la matrice représentant  $\varphi$  est de la forme :

$$Q' = \begin{bmatrix} Id_{\mathbb{R}^p} & 0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^q} \end{bmatrix} \text{ et donc } \det(Q') = (-1)^{n-p}.$$

Soit  $S$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$  on a :

$$\det(Q) = \det({}^tSQ'S) = \det(Q') (\det(S))^2 \Rightarrow \text{signe}(\det(Q)) = (-1)^{n-p}.$$

**Lemme 8 :** Contre - inégalité de Cauchy - Schwartz.

On a  $|{}^tXGY| \geq \|X\|_G \|Y\|_G$  pour tout vecteurs de temps ou isotropes .

**Démonstration :**

Considérons la matrice  $S$  constituée des 2 colonnes  $X \in \mathbb{R}^4$  et  $Y \in \mathbb{R}^4 : S = [X, Y]$ .

On suppose que  $X$  et  $Y$  sont des vecteur temps non nuls  
car si l'un d'eux est isotrope ou nul l'inégalité est évidente .

$$\text{On a } {}^tSGS = \begin{bmatrix} {}^tX \\ {}^tY \end{bmatrix} G [X, Y] = \begin{bmatrix} {}^tXGX & {}^tXGY \\ {}^tYGX & {}^tYGY \end{bmatrix}.$$

$$\text{On a } \det({}^tSGS) = \|X\|_G^2 \|Y\|_G^2 - ({}^tXGY)^2.$$

Si  $\det({}^tSGS) = 0$  le lemme est démontré .

Si  $\det({}^tSGS) \neq 0$  et si  $X = \lambda Y$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\text{on a } \det({}^tSGS) = \begin{bmatrix} \lambda^2 {}^tYGY & \lambda {}^tYGY \\ \lambda {}^tYGY & {}^tYGY \end{bmatrix} = 0$$

impossible donc  $X$  et  $Y$  sont non colinéaires et  $X$  et  $Y$  forment une base  $S = [X, Y]$   
d'un sous - espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  de dimension 2.

$$\text{Comme } {}^tSGS = \begin{bmatrix} {}^tXGX & {}^tXGY \\ {}^tYGX & {}^tYGY \end{bmatrix}, {}^tSGS \text{ définit une forme bilinéaire symétrique } \Psi \text{ sur } F \text{ par}$$

$$\Psi(u, v) = {}^tU {}^tSGSV \text{ avec } u = SU \text{ et } v = SV.$$

Soit  $\varphi$  la forme bilinéaire définie sur  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice est  $G$ .

On vérifie immédiatement que  $\varphi_{/F}$  est aussi une forme bilinéaire symétrique sur  $F$ .

Montrons qu'elle est régulière c'est à dire :

$$F^{\perp_{\varphi}}_{/F} = \{0\} \text{ ou } \{u \in F / \varphi_{/F}(u, v) = 0, \forall v \in F\} = \{0\}.$$

$S$  étant une base de  $F$  est une application bijective de  $\mathbb{R}^2$  sur  $F$ .

Si  $G$  est la représentation de  $\varphi$  dans  $\mathbb{R}^4$ ,  ${}^tSGS$  est la représentation de  $\varphi_{/F}$

dans  $F$  muni de la base  $S$  : soit  $u$  et  $v$  2 vecteurs de  $F$  ; on a si  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  les représentations  
de  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $U$  et  $V$  dans  $F$  muni de la base  $S$  et  $\tilde{U} = SU$ ,  $\tilde{V} = SV$  :

$$\varphi(u, v) = \varphi_{/F}(u, v) = {}^t\tilde{U} G \tilde{V} = {}^tU {}^tSGSV.$$

Soit donc  $u \in F^{\perp_{\varphi}}_{/F}$  et  $v \in F$ ,  $u = SU$  et  $v = SV$  avec  $U$  et  $V$  élément de  $\mathbb{R}^2$ . On a :

$$\varphi_{/F}(u, v) = {}^tV {}^tSGSU = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^2 \text{ et donc } {}^tSGSU = 0, \text{ comme } \det({}^tSGS) \neq 0 \text{ on a } U = 0.$$

$\varphi_{/F}$  est bien une forme bilinéaire symétrique régulière sur  $F$ .

Le lemme 7 s'applique :  $\text{signe}(\det({}^tSGS)) = (-1)^{2-p}$ ,  $p$  l'indice d'inertie de  $\varphi_{/F}$

or  $F$  étant de dimension 2, d'après le lemme 4 il n'y pas de sous - espace de dimension  $\geq 2$  de  
vecteurs temps et  $F$  contient  $X$ , vecteur de temps .  $\varphi_{/F}$  étant une forme bilinéaire symétrique  
régulière sur  $F$  d'après le lemme 2,  $\varphi_{/F}$  peut être représenté dans une base  $\varphi_{/F}$  - orthogonale  
par une matrice diagonale composée de 1, -1 et 0 . La nature des vecteurs restant inchangé,

la seule possibilité est donc  $1$  et  $-1$ .

Et donc la seule possibilité pour  $p$  est  $p = 1$ .

D'où  $\text{signe}(\det({}^tSGS)) = -1$  et donc  $\|X\|_G^2 \|Y\|_G^2 < ({}^tXGY)^2$ .

**Remarque :**

On rappelle que l'ensemble des vecteurs temps ne forment pas un sous-espace vectoriel prendre par exemple  $X = {}^t(4, 1, 1, 1)$  et  $Y = {}^t(-4, 1, 1, 1)$  et  $X + Y = {}^t(0, 2, 2, 2)$ .

**Lemme 9 :**

Soit  $X, Y$  et  $Z$  3 vecteur de temps ou isotropes on a alors :

$$({}^tXGY)({}^tYgz)({}^tZGX) \geq ({}^tXGX)({}^tYGY)({}^tZGZ)$$

**Démonstration :**

Considérons  $S = [X, Y, Z]$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^tSGS &= \begin{bmatrix} {}^tX \\ {}^tY \\ {}^tZ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix} [X, Y, Z] = \begin{bmatrix} X_1 & -X_2 & -X_3 & -X_4 \\ Y_1 & -Y_2 & -Y_3 & -Y_4 \\ Z_1 & -Z_2 & -Z_3 & -Z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^tXGX & {}^tXGY & {}^tXGZ \\ {}^tYGX & {}^tYGY & {}^tYGZ \\ {}^tZGX & {}^tZGY & {}^tZGZ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \det({}^tSGS) &= {}^tXGX[{}^tYGY \cdot {}^tZGZ - {}^tYGZ \cdot {}^tZGY] \\ &\quad - {}^tXGY[{}^tYGX \cdot {}^tZGZ - {}^tYGZ \cdot {}^tZGX] \\ &\quad + {}^tXGZ[{}^tYGX \cdot {}^tZGY - {}^tYGY \cdot {}^tZGX] \\ &= {}^tXGX \cdot {}^tYGY \cdot {}^tZGZ - {}^tXGX \cdot {}^tYGZ \cdot {}^tZGY \\ &\quad - {}^tXGY \cdot {}^tYGX \cdot {}^tZGZ + {}^tXGY \cdot {}^tYGZ \cdot {}^tZGX \\ &\quad + {}^tXGZ \cdot {}^tYGX \cdot {}^tZGY - {}^tXGZ \cdot {}^tYGY \cdot {}^tZGX \\ &= {}^tXGX \cdot {}^tYGY \cdot {}^tZGZ - {}^tXGX({}^tYGZ)^2 \\ &\quad - {}^tYGY \cdot ({}^tXGZ)^2 - {}^tZGZ({}^tXGY)^2 + 2 \cdot {}^tXGY \cdot {}^tYGZ \cdot {}^tZGX; \end{aligned}$$

Or  $|{}^tXGY| \geq \sqrt{{}^tXGX} \sqrt{{}^tYGY}$ ,  $|{}^tYGZ| \geq \sqrt{{}^tYGY} \sqrt{{}^tZGZ}$ ,  $|{}^tZGX| \geq \sqrt{{}^tZGZ} \sqrt{{}^tXGX}$ ,  
d'où :

$$\begin{aligned} &-{}^tXGX({}^tYGZ)^2 - {}^tYGY \cdot ({}^tXGZ)^2 - {}^tZGZ({}^tXGY)^2 \\ &\leq -{}^tXGX \cdot {}^tYGY \cdot {}^tZGZ - {}^tYGY \cdot {}^tZGZ \cdot {}^tXGX - {}^tZGZ \cdot {}^tXGX \cdot {}^tYGY \\ &= -3 \cdot {}^tXGX \cdot {}^tYGY \cdot {}^tZGZ, \end{aligned}$$

et donc  $\det({}^tSGS) \leq -2 \cdot {}^tXGX \cdot {}^tYGY \cdot {}^tZGZ + 2 \cdot {}^tXGY \cdot {}^tYGZ \cdot {}^tZGX$ .

Etudions le signe de  $\det({}^tSGS)$ .

Si  $\det({}^tSGS) = 0$  le lemme est démontré.

Si  $\det({}^tSGS) \neq 0$  et si  $X = \lambda Y + \mu Z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\text{on a } \det({}^t\text{SGS}) = \det \begin{bmatrix} {}^t\text{XGX} & {}^t\text{XGY} & {}^t\text{XGZ} \\ {}^t\text{YGX} & {}^t\text{YGY} & {}^t\text{YGZ} \\ {}^t\text{ZGX} & {}^t\text{ZGY} & {}^t\text{ZGZ} \end{bmatrix} = 0 \text{ car } (\lambda^t\text{Y} + \mu^t\text{Z})\text{GX} = \lambda^t\text{YGX} + \mu^t\text{ZGX}$$

impossible donc  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont non colinéaires et forment une base d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  de dimension 3.

$$\text{Comme } {}^t\text{SGS} = \begin{bmatrix} {}^t\text{XGX} & {}^t\text{XGY} & {}^t\text{XGZ} \\ {}^t\text{YGX} & {}^t\text{YGY} & {}^t\text{YGZ} \\ {}^t\text{ZGX} & {}^t\text{ZGY} & {}^t\text{ZGZ} \end{bmatrix}, {}^t\text{SGS} \text{ est une forme bilinéaire symétrique sur } F.$$

En faisant un raisonnement similaire à celui du lemme précédent on trouve que :

$$\text{signe}(\det({}^t\text{SGS})) = (-1)^{3-1} = 1.$$

D'où  $\det({}^t\text{SGS}) > 0$  et le lemme est démontré.

**Lemme 10 :**

$$\text{On considère } \mathbb{R}^4 \text{ muni de la forme quadratique définie par } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{Id}_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix},$$

alors les vecteurs non nuls de temps ou isotrope se partagent en 2 classes opposées  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  et

si  $X$  et  $Y$  sont des vecteurs temps non nuls on a :

$${}^t\text{XGY} \geq 0 \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ appartiennent à la même classe ,}$$

$${}^t\text{XGY} \leq 0 \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ appartiennent à des classes opposées .}$$

Deux vecteurs  $X$  et  $Y$  d'une même classe vérifient  ${}^t\text{XGY} > 0$  sauf s'ils sont isotropes et parallèles. Dans ce cas ils sont de la même classe si leur rapport est un nombre strictement positif.

**Démonstration :**

Soit  $X_0$  un vecteur de temps non nul arbitraire. Un vecteur de temps  $Y$  non nul n'est jamais

orthogonal à  $X_0$  car sinon par le **lemme 6**,  $Y$  serait un vecteur d'espace donc  ${}^t\text{YGX}_0 > 0$  ou

${}^t\text{YGX}_0 < 0$ . On dira que  $Y \in \mathcal{C}_1$  dans le premier cas sinon  $Y \in \mathcal{C}_2$ . Les classes sont opposées :

si  $Y \in \mathcal{C}_1$  alors  $-Y \in \mathcal{C}_2$ . Le **lemme 9** montre que :

$$({}^t\text{X}_0\text{GY}) ({}^t\text{YGZ}) ({}^t\text{ZGX}_0) \geq ({}^t\text{X}_0\text{GX}_0) ({}^t\text{YGY}) ({}^t\text{ZGZ}) \geq 0, \forall Y, \forall Z \text{ vecteurs de temps.}$$

Si  $Y$  et  $Z$  appartiennent

$$\text{-- à la même classe } \mathcal{C}_1 : {}^t\text{X}_0\text{GY} \geq 0 \text{ et } {}^t\text{ZGX}_0 \geq 0 \Rightarrow {}^t\text{YGZ} \geq 0,$$

$$\text{-- à la même classe } \mathcal{C}_2 : {}^t\text{X}_0\text{GY} \leq 0 \text{ et } {}^t\text{ZGX}_0 \leq 0 \Rightarrow {}^t\text{YGZ} \geq 0$$

$$\text{-- à des classes différentes : } {}^t\text{X}_0\text{GY} \leq 0 \text{ et } {}^t\text{ZGX}_0 \geq 0 \Rightarrow {}^t\text{YGZ} \leq 0 \text{ ou}$$

$${}^t\text{X}_0\text{GY} \geq 0 \text{ et } {}^t\text{ZGX}_0 \leq 0 \Rightarrow {}^t\text{YGZ} \leq 0.$$

Réciproquement : Si  ${}^t\text{YGZ} \geq 0$

$$\text{ou bien } {}^t\text{X}_0\text{GY} \geq 0 \text{ et } {}^t\text{ZGX}_0 \geq 0 \Rightarrow {}^t\text{YGZ} \geq 0 \text{ à la même classe } \mathcal{C}_1,$$

$$\text{ou bien } {}^t\text{X}_0\text{GY} \leq 0 \text{ et } {}^t\text{ZGX}_0 \leq 0 \Rightarrow Y \text{ et } Z \text{ appartiennent à la même classe } \mathcal{C}_2,$$

de même si  ${}^t\text{YGZ} \leq 0 \Rightarrow Y \text{ et } Z \text{ appartiennent à des classes différentes.}$

La dernière partie du lemme est une conséquence directe du **lemme 5**.

**Remarque :**

D'une manière arbitraire les éléments d'une des 2 classes sont appelés vecteurs de futur ou d'avenir, les éléments de l'autre vecteurs de passé.

**Lemme 11 :**

Soient  $X$  et  $Y$  2 vecteurs de temps ou isotropes .

Si  $X$  et  $Y$  appartiennent à la même classe , leur somme est encore un vecteur de la même classe ,

et ils vérifient la contre – inégalité triangulaire si on note  $\|X\|_G = \sqrt{{}^tXX}$  si  ${}^tXX \geq 0$  :

$$\|X + Y\|_G \geq \|X\|_G + \|Y\|_G.$$

**Démonstration :**

D'après le lemme 10  ${}^tXGY \geq 0$  et d'après le lemme 8  $|{}^tXGY| \geq \|X\|_G \|Y\|_G$  et donc

$${}^tXGY \geq \|X\|_G \|Y\|_G$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|X + Y\|_G^2 &= {}^t(X + Y)G(X + Y) = \|X\|_G^2 + \|Y\|_G^2 + 2{}^tXGY \\ &\geq \|X\|_G^2 + \|Y\|_G^2 + 2\|X\|_G\|Y\|_G = (\|X\|_G + \|Y\|_G)^2. \end{aligned}$$

Si  $V$  est un vecteur pris dans la classe de  $X$  et  $Y$  , on a :

${}^tXGV \geq 0$  et  ${}^tYGV \geq 0 \Rightarrow {}^t(X + Y)GV \geq 0$  et  $X + Y$  fait partie de la classe de  $V$  donc de celle  $X$  et  $Y$ .

**Remarque :**

(1) Si  $X$  et  $Y$  sont 2 vecteurs de classe différente la somme peut être de nature quelconque :

Si  $X = {}^t(2, 1, 1, 1)$  ,  ${}^tXGX = 1$  et  $Y = {}^t(-3, 1, 1, 1)$  ,  ${}^tYGY = 6$ , on a  ${}^tXGY = -3$  ,

$X + Y = {}^t(-1, 2, 2, 2)$  ,  ${}^t(X + Y)G(X + Y) = -11$  (vecteur d'espace) .

Si  $X = {}^t(4, 1, 1, 1)$  ,  ${}^tXGX = 13$  et  $Y = {}^t(-1, 0, 0, 0)$  ,  ${}^tYGY = 1$ , on a  ${}^tXGY = -4$  ,

$X + Y = {}^t(3, 1, 1, 1)$  ,  ${}^t(X + Y)G(X + Y) = 6$  (vecteur de temps).

Si  $X = {}^t(3, 1, 1, 1)$  ,  ${}^tXGX = 6$  et  $Y = \left( -2, \frac{\sqrt{3}}{3} - 1, \frac{\sqrt{3}}{3} - 1, \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right)$  ,  ${}^tYGY = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  ,

on a  ${}^tXGY = -3$  ,  $X + Y = \left( 1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$  ,

${}^t(X + Y)G(X + Y) = 0$  (vecteur isotrope) .

(2) La contre – inégalité triangulaire donne une explication géométrique du " paradoxe des jumeaux " .

## Chapitre 4 :

### **Classification des matrices de Lorentz .**

Nous avons vu que l'ensemble des matrices de Lorentz  $\mathcal{L}_0$  d'ordre  $n$  forment un sous – groupe de  $GL_4(\mathbb{R})$ , le groupe des matrices inversibles pour la composition .

Nous avons vu que la partie symétrique d'une matrice de Lorentz  $M$  : dans l'écriture la plus générale :

$$M = \exp(\alpha N) \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}, X \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Comme } {}^tMGM = G \text{ avec } G = \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix}, \det(M) = \pm 1.$$

$$\text{Or } \det(\exp(\alpha N)) = e^{\text{Tr}(\alpha N)} = e^0 = 1 \text{ donc}$$

$$\det(M) = \det \left( \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \right) = \varepsilon \cdot \det(\Omega).$$

(1) **Détermination de  $\det(\Omega)$  :**

$\Omega$  est une matrice orthogonale :  ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$  donc  $\det(\Omega) = \pm 1$ .

On rappelle les définitions suivantes :

(a) Dans un espace euclidien  $E$  de dimension 3, on appelle symétrie orthogonale par rapport à un sous – espace  $F$  l'endomorphisme  $\mathcal{J}_F = 2p_F - Id_E$

avec  $p_F$  le projecteur orthogonal sur  $F$ .

(b) Dans un espace euclidien  $E$  de dimension 3, on appelle réflexion par rapport à un sous – espace  $F$  de dimension 2 toute symétrie orthogonale par rapport à  $F \neq E$ .

(c) Dans un espace euclidien  $E$  de dimension 3,  $F$  un sous – espace de  $E$ ,  $F \neq E$ , muni d'une base orthormée  $\mathcal{B}_F(e_p, \dots, e_p)$  qu'on complète pour avoir une base de  $E$  : soit  $\mathcal{B}_E(e_p, \dots, e_3)$ , on a alors :

$$Mat_F(p_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ si } F \text{ est de dimension 2 ou } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ si } F \text{ est de dimension 1.}$$

$$\text{et } Mat_F(\mathcal{J}_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ si } F \text{ est de dimension 2 ou } = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ si } F \text{ est de dimension 1.}$$

$$\text{Si } \det(\Omega) = +1 \quad \Omega \text{ est une rotation : } \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

sinon  $\det(\Omega) = -1$  alors  $\Omega$  est une réflexion de  $\mathbb{R}^3$  ou la composition d'une rotation

et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de cette rotation .

( pour plus de détail voir : J-M. Monier."Algèbre 1". Dunod 1997 .) .

On dira que  $M$  est une rotation si  $\det(M) = +1$ . Sinon  $\det(M) = -1$  et alors on dira que  $M$  est un retournement . (Il faut faire attention que la définition dans un espace de dimension 3 est différente.)

## (2) Détermination de $\varepsilon$ :

Soit  $V_0$  un vecteur de temps non nul  ${}^tV_0 G V_0 > 0$  et  $M$  une matrice de Lorentz . On a :

${}^t(MV_0) G (MV_0) = {}^tV_0 ({}^tMGM) V_0 = {}^tV_0 G V_0 > 0$  donc  $MV_0$  est aussi un vecteur de temps .

Soit  $\eta = \text{signe} ({}^tV_0 G (MV_0))$  si  $\eta = 1$ ,  $V$  et  $(MV_0)$  appartiennent à la même classe

sinon  $\eta = -1$ ,  $V$  et  $(MV_0)$  appartiennent à des classes différentes ( Voir chapitre IV ) .

Soit maintenant  $V$  un autre vecteur de temps non nul . Comme précédemment  $MV$  est aussi un vecteur de temps .

Comme  ${}^t(MV) G (MV_0) = {}^tV ({}^tMGM) V_0 = {}^tV G V_0$ , on a l'équivalence :

$\text{Classe}(V) = \text{Classe}(V_0) \Leftrightarrow \text{Classe}(MV) = \text{Classe}(MV_0)$ .

Donc  $\eta$  ne dépend que de  $M$  et est indépendant de  $V$ .

Calculons  $\eta$  pour le vecteur  $E_0 = {}^t(1, 0, 0, 0)$  :

$$E_0 M E_0 = [1, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \varepsilon \text{ donc } \eta = \varepsilon.$$

Si  $\varepsilon = 1$  on dira que  $M$  est orthochrone sinon si  $\varepsilon = -1$ , on dira que  $M$  est antichrone.

Comme  $\det(M) = \varepsilon \cdot \det(\Omega)$  on a  $\det(M) = +1 \Leftrightarrow \varepsilon = +1$  et  $\det(\Omega) = +1$  ou bien  $\varepsilon = -1$  et  $\det(\Omega) = -1$  et si  $\det(M) = -1 \Leftrightarrow \varepsilon = -1$  et  $\det(\Omega) = +1$  ou bien  $\varepsilon = +1$  et  $\det(\Omega) = -1$ .

Considérons les sous - ensembles de  $\mathcal{L}_0$  suivant :

$\mathcal{R}_{00} = \{M / \varepsilon = +1 \text{ et } \det(\Omega) = +1\}$ , les rotations orthochrones ,

$\mathcal{R}_{00}$  est un groupe appelé le **groupe restreint de Lorentz** puisque pour 2 matrices de  $\mathcal{R}_{00}$  :  $M$  et  $M'$ , on a :

$$\det(MM'^{-1}) = \det(M) \det^{-1}(M') = \varepsilon \cdot \det(\Omega) \varepsilon' \cdot \det^{-1}(\Omega') = +1 .$$

$\mathcal{R}_{0a} = \{M / \varepsilon = -1 \text{ et } \det(\Omega) = +1\}$ , les rotations antichrones ,

$\mathcal{R}_{e0} = \{M / \varepsilon = +1 \text{ et } \det(\Omega) = -1\}$ , les retournements orthochrones ,

$\mathcal{R}_{ea} = \{M / \varepsilon = -1 \text{ et } \det(\Omega) = -1\}$ , les retournements antichrones .

On remarque que  $\mathcal{R}_{00} \cup \mathcal{R}_{0a} = \{M / \det(\Omega) = +1\}$  est un groupe , le **groupe des rotations** ,

que  $\mathcal{R}_{00} \cup \mathcal{R}_{e0} = \{M / \varepsilon = +1\}$ , le **groupe orthochrone** ,

que  $\mathcal{R}_{00} \cup \mathcal{R}_{ea} = \{M / \varepsilon = +1 \text{ et } \det(\Omega) = +1 \text{ ou } \varepsilon = -1 \text{ et } \det(\Omega) = -1\}$ , le **groupe pair** .

On peut aussi considérer l'ensemble des matrices de Lorentz telles que  $\Omega = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ,  $\varepsilon = +1$  et  $\vec{\beta} = \beta_x \vec{i}$



$$d'où M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & 0 & 0 \\ \gamma\beta_x & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \text{ avec } \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que cet ensemble un groupe pour la composition : le **groupe spécial** ou **boost**.

On remarque en outre que :

$$MM' = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & 0 & 0 \\ \gamma\beta_x & \gamma & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma' & \gamma'\beta'_x & 0 & 0 \\ \gamma'\beta'_x & \gamma' & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix} = \gamma\gamma' \begin{bmatrix} 1 + \beta_x\beta'_x & \beta_x + \beta'_x & 0 & 0 \\ \beta_x + \beta'_x & 1 + \beta_x\beta'_x & 0 & 0 \\ \mathcal{T} & & Id_{\mathbb{R}^2} & \end{bmatrix}.$$

On remarque que ce groupe est commutatif • Mais si on considère 2 matrices de Lorentz tels que

$\overset{\wedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$ , le produit en général n'est pas tel que  $\overset{\wedge}{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$  • Exemple :

$$\vec{\beta}_1 = {}^t(a > 0, 0, 0), \vec{\beta}_2 = {}^t(0, b > 0, 0)$$

$$M1 := \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 \cdot \beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 \cdot \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : M2 := \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & \gamma_2 \cdot \beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 \cdot \beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M := M2 \cdot M1 = \begin{bmatrix} \gamma_2 \gamma_1 & \gamma_2 \gamma_1 \beta_1 & \gamma_2 \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 \beta_2 \gamma_1 & \gamma_2 \beta_2 \gamma_1 \beta_1 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le produit  $M2 \cdot M1$  n'est pas symétrique et est donc décomposable en un produit

$$M1 \cdot M2 = \overset{\wedge}{\Lambda}(\vec{\beta}) \cdot \overset{\wedge}{\Omega} \text{ avec } \overset{\wedge}{\Omega} \neq Id_{\mathbb{R}^4},$$

$\vec{\beta}$  pouvant être calculé par la loi de transformation des vitesses : (Voir ci-dessous) et donc

$$\overset{\wedge}{\Omega} = \overset{\wedge}{\Lambda}(-\vec{\beta}) \cdot M2 \cdot M1, \text{ avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{\beta}_2 + \gamma_1 \left( \vec{\beta}_1 \cdot \left( \frac{\gamma_1 (\vec{\beta}_2 \cdot \vec{\beta}_1)}{1 + \gamma} + 1 \right) \right)}{\gamma_1 (1 + \vec{\beta}_2 \cdot \vec{\beta}_1)} = \frac{\vec{\gamma}_1 \beta_1 + \vec{\beta}_2}{\gamma_1} \quad \text{ici}$$

Cela est à rapprocher avec le fait que le produit de 2 matrices symétriques n'est pas, en général, symétrique.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et que 2 matrices } A \text{ et } B \text{ étant symétriques :}$$

$A$  et  $B$  commutent  $\Leftrightarrow AB$  est symétrique ,

car  $AB = BA \Rightarrow {}^t(AB) = {}^t(BA) = {}^tA{}^tB = AB \Rightarrow AB$  est symétrique d'une part et d'autre part  $AB = {}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA$  .

En particulier les puissances positives d'une matrice symétrique est aussi symétrique puisque

$${}^t(A^n) = {}^t(A^{n-1} \cdot A) = {}^t(A \cdot A^{n-1}) = {}^t(A^{n-1}) \cdot A.$$

De même l'inverse puisque  $A^{-1} = ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

On remarque que si  $M$  est symétrique , par unicité de la décomposition comme  $M = M \cdot Id_{\mathbb{R}^4}$

on a  $\bigwedge \Omega = Id_{\mathbb{R}^4}$

et que si  $\bigwedge \Omega = Id_{\mathbb{R}^4}$  comme  $\bigwedge(\vec{\beta})$  est symétrique ,  $M = \bigwedge(\vec{\beta}) \cdot \bigwedge \Omega$  l'est aussi .

Par ailleurs , si on pose  $X' = MX$  ,  $X'' = M'X' = MM'X$  et  $M'' = MM'$  on a :

$$\gamma'' = \gamma' (1 + \beta_x \beta'_x) \text{ et donc } \beta''_x := \frac{\beta_x + \beta'_x}{1 + \beta_x \beta'_x} \text{ qui est une loi de transformation}$$

de vitesse dans un cas particulier .

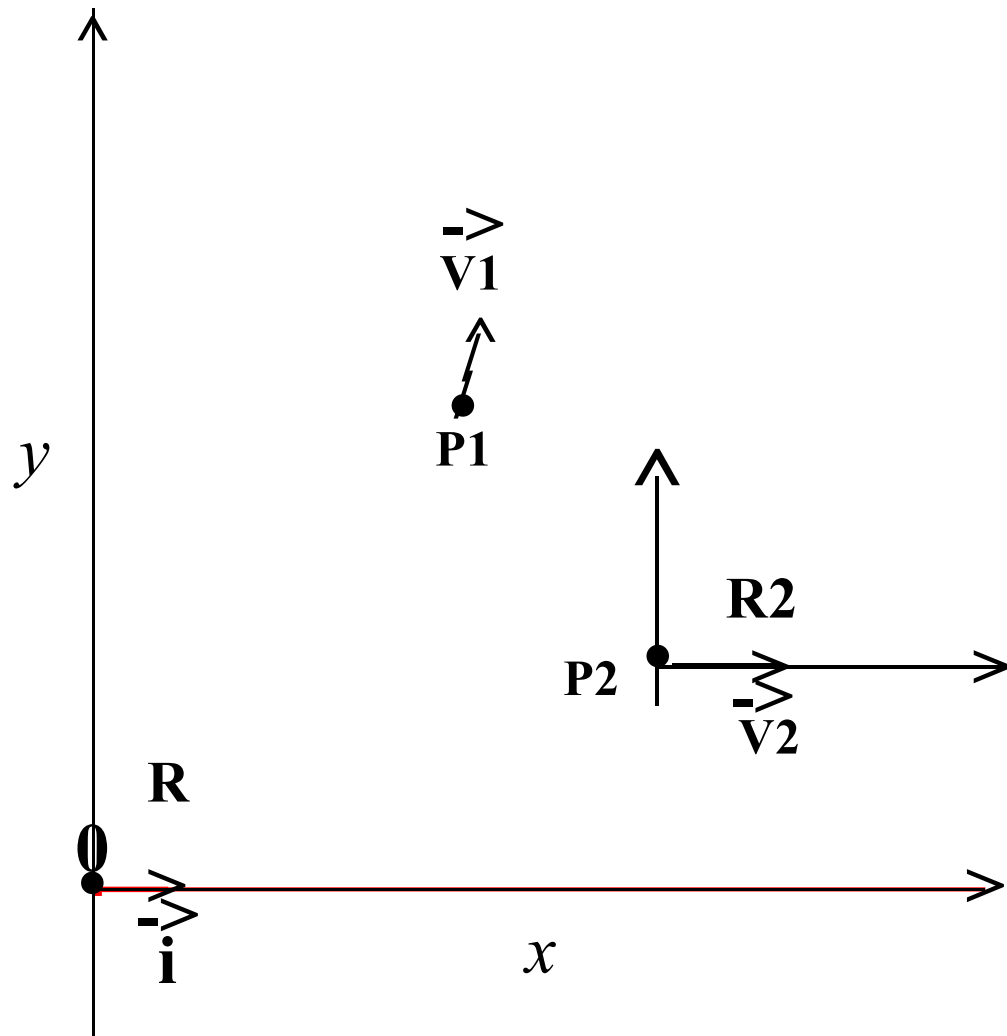
A titre d'exercice :

**Evaluation du module de la vitesse relative :**

(Annequin et Boutigny . "Mécanique relativiste , Exercices " • Vuibert 1978. p 25)

Soit 2 points  $P1$  et  $P2$  animés respectivement des vitesses  $\vec{V1}$  et  $\vec{V2}$  dans un repère  $\vec{R}$  .

On considère un repère  $\vec{R2}$  associé à  $P2$  , choisissons l'axe des  $x$  de  $\vec{R}$  parallèle à  $\vec{V2}$  .  
 $c$  étant la vitesse de la lumière .



$R$  est animé d'une vitesse  $-\vec{V2}$  par rapport à  $R2$ .

Calculons le module de la vitesse de  $P1$  par rapport à  $R2$  :  $V1'$ . Posons  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\vec{V1})^2}{c^2}}}$  et

$$\alpha = 1 - \frac{(\vec{V2})_x \cdot (\vec{V1})_x}{c^2} = 1 - \frac{\vec{V2} \cdot \vec{V1}}{c^2} \quad , \text{ les formules de transformation donnent :}$$

$$(\vec{V1}')_x = \frac{(\vec{V1})_x - (\vec{V2})_x}{\alpha} \quad , \quad (\vec{V1}')_y = \frac{(\vec{V1})_y}{\alpha \gamma} \quad , \quad (\vec{V1}')_z = \frac{(\vec{V1})_z}{\alpha \gamma} \quad .$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } (\vec{V1}')^2 &= (\vec{V1}')_x^2 + (\vec{V1}')_y^2 + (\vec{V1}')_z^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left[ ((\vec{V1})_x - (\vec{V2})_x)^2 + \frac{(\vec{V1})_y^2}{\gamma^2} + \frac{(\vec{V1})_z^2}{\gamma^2} \right] . \end{aligned}$$

En développant le second membre :

$$\begin{aligned}
& (\vec{V1})_x^2 + (\vec{V2})_x^2 - 2(\vec{V1})_x(\vec{V2})_x + (\vec{V1})_y^2 \left( 1 - \frac{(\vec{V1})^2}{c^2} \right) + (\vec{V1})_z^2 \left( 1 - \frac{(\vec{V1})^2}{c^2} \right) \\
& = (\vec{V1})_x^2 + (\vec{V1})_y^2 + (\vec{V1})_z^2 - 2(\vec{V1})_x(\vec{V2})_x - \frac{1}{c^2} \left( (\vec{V1})_x^2 (\vec{V1})_y^2 + (\vec{V1})_x^2 (\vec{V1})_z^2 \right),
\end{aligned}$$

$$\text{or } ((\vec{V1}) - (\vec{V2}))^2 = (\vec{V1})^2 + (\vec{V2})^2 - 2(\vec{V1})(\vec{V2}) \text{ et } \vec{V2} \cdot \vec{V1} = (\vec{V2})_x \cdot (\vec{V1})_x,$$

$$\text{de plus : } \vec{V1} \wedge \vec{V2} = -\vec{j} \left( -(\vec{V1})_z(\vec{V2})_x \right) + \vec{k} \left( (\vec{V1})_y(\vec{V2})_x \right) \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \vec{V1} \wedge \vec{V2} \right)^2 = (\vec{V1})_x^2 (\vec{V1})_y^2 + (\vec{V1})_x^2 (\vec{V1})_z^2. \text{ On conclut par :} \\
& (\vec{V1'})^2 = \frac{((\vec{V1}) - (\vec{V2}))^2 - \frac{1}{c^2} \left( \vec{V1} \wedge \vec{V2} \right)^2}{\left( 1 - \frac{\vec{V2} \cdot \vec{V1}}{c^2} \right)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière formule est symétrique en  $\vec{V2}$  et  $\vec{V1}$ .

## Chapitre 5 : **Trajectoires non – rectilignes.**

Dans le cas d'une particule  $P$  munie d'un mouvement non – rectiligne , de vitesse  $\vec{V}(t)$ ,  
 $t$  étant le temps du repère de référence , on veut estimer le temps propre  $\tau$  de  $P$   
en fonction de  $t$ .

On donne une justification de la formule :  $\tau(t_2) - \tau(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\gamma} \left( \frac{\vec{V}^2(t)}{c^2} \right) dt$

avec  $\tilde{\gamma}(u) = \sqrt{1-u}$  , de la même manière que l'on évalue la longueur d'une courbe .

### Lemme 1 :

**Theorème de la moyenne :** (J.Dieudonné."Eléments d'analyse " : T.1 p.160 .Gauthier -villars 1969 .)

Soit  $I = [\alpha, \beta]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ , ensemble des nombres réels

et  $F$  un espace de Banach . Soit  $D \subseteq I$ ,  $D$  dénombrable .

Soit  $f: I \rightarrow F$  et  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  2 applications continues telles que  $f$  et  $\varphi$   
soient dérivables sur  $I \setminus D$  et que  $\forall \xi \in I \setminus D: \|f'(\xi)\| \leq \varphi'(\xi)$  .

### Conclusion :

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) .$$

### Démonstration :

Soit  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow D$  une application bijective de  $\mathbb{N}$ , ensemble des entiers naturels

dans  $D$  et  $\varepsilon > 0$  .

Soit  $A \subseteq I$  défini par :

$$A = \left\{ \xi \in I / \forall \zeta \text{ tel que } \alpha \leq \zeta < \xi \text{ on ait : } \|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + (\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \zeta} 2^{-n} \right\}$$

On a évidemment  $\alpha \in A$  de plus si  $\eta$  est tel que  $\alpha < \eta < \xi$  alors  $\eta \in A$  par définition de  $A$ .

Donc  $A$  est de la forme si  $\gamma = \sup(A)$  :  $A = [\alpha, \gamma[$  ou  $A = [\alpha, \gamma]$ .

Comme  $f$  et  $\varphi$  sont continues :

$$(I) \quad \|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \gamma} 2^{-n} .$$

Montrons que  $\gamma = \beta$  :

Si  $\gamma < \beta$  :

et si  $\gamma \notin D$  :

Par définition de la dérivée :

Pour  $\varepsilon > 0 \exists \lambda > 0$  tel que pour  $\forall \zeta$  tel que  $\gamma \leq \zeta < \gamma + \lambda$  :

$$\|f(\zeta) - f(\gamma) - f'(\gamma)(\zeta - \gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma) \text{ et}$$

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) - \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma).$$

En appliquant les inégalités :

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \text{ et } \|f'(\gamma)(\zeta - \gamma)\| \leq \|f'(\gamma)\|(\zeta - \gamma) :$$

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| - \|f'(\gamma)(\zeta - \gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma) \text{ et}$$

$$\varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma) - (\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma)) \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma) \text{ car } \varphi' \geq 0 \text{ et donc } \varphi \text{ croissante :}$$

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| - \|f'(\gamma)(\zeta - \gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma) \text{ d'où :}$$

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| \leq \|f'(\gamma)\|(\zeta - \gamma) + \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma)$$

$$\leq \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma) + \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma)$$

$$\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta - \gamma).$$

De (1) et de ce qui précède :

$$\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leq \|f(\zeta) - f(\gamma)\| + \|f(\gamma) - f(\alpha)\|$$

$$\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta - \gamma) + \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \gamma} 2^{-n}$$

$$\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \zeta} 2^{-n}$$

donc  $\zeta \in A \quad \forall \zeta \text{ tel que } \gamma \leq \zeta < \gamma + \lambda$  : ce qui est contraire à la définition de  $\gamma$ .

maintenant si  $\gamma \in D$  :

$\exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $\gamma = \rho(m)$ , d'autre part  $\varphi$  et  $f$  étant continus  $\exists \lambda > 0$  tel que :

$[\gamma, \gamma + \lambda] \subseteq I$  et pour  $\zeta$  tel que  $\gamma < \zeta < \gamma + \lambda$  on ait pour  $\varepsilon > 0$  et  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} \text{ et } \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}. \quad (2)$$

Donc :

$$\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leq \|f(\zeta) - f(\gamma)\| + \|f(\gamma) - f(\alpha)\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \gamma} 2^{-n} \quad (\text{par (1)})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m} + \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \gamma} 2^{-n} \quad (\varphi \nearrow \text{ et } \gamma < \zeta)$$

$$\leq \varepsilon 2^{-m} + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \gamma} 2^{-n}$$

$$\text{or } \gamma = \rho(m) : \quad \varepsilon 2^{-m} + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \gamma} 2^{-n} \leq \varepsilon \sum_{\rho(n) < \zeta} 2^{-n} \quad \text{donc}$$

$$\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + (\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{\rho(n) < \zeta} 2^{-n} : \text{nouvelle contradiction.}$$

**Conclusion :**  $\gamma = \beta$  (1) et  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire le théorème est démontré.

**Conséquence :** Si on prend  $\varphi(\xi) = M(\xi - \alpha)$  avec  $M > 0$  on a le résultat suivant :

Soit  $I = [\alpha, \beta]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  ensemble des nombres réels

et  $F$  un espace de Banach. Soit  $D \subseteq I$ ,  $D$  dénombrable.

Soit  $f: I \rightarrow F$ , applications continue, telle que  $f$  est dérivable sur  $I \setminus D$

et que  $\exists M > 0, \forall \xi \in I \setminus D: \|f'(\xi)\| \leq M$  alors :

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha).$$

**Lemme 2 :** (J. Dieudonné. "Eléments d'analyse" : T.1 p.164. Gauthier – villars 1969.)

**Convergence uniforme des dérivées.**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , ensemble des nombres réels

et  $F$  un espace de Banach. Soit  $D \subseteq I$ ,  $D$  dénombrable.

Soit la suite de fonctions  $(g_n)$

telle que  $g_n: I \rightarrow F, n \in \mathbb{N}, \mathbb{N}$  ensemble des entiers naturels.

Supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$g_n$  est la dérivée sur  $I \setminus D_n, D_n \subseteq I, D_n$  dénombrable,

d'une fonction  $f_n$  continue. On pose  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$  qui est aussi dénombrable.

On suppose en outre :

(1)  $\exists \xi_0 \in I$  tel que  $f_n(\xi_0) \xrightarrow{n} \ell \in F$ .

(2)  $\forall \zeta \in I \exists \mathcal{V}(\zeta)$  voisinage de  $\zeta$  dans  $I$  tel que dans  $\mathcal{V}(\zeta)$  la suite  $(g_n)$  converge uniformément.

Alors  $\forall \zeta \in I$  la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathcal{V}(\zeta)$ .

Et si l'on pose  $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\xi)$  et  $g(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(\xi)$

alors sur  $I \setminus D$  on a  $f'(\xi) = g(\xi)$ .

**Démonstration :**

Considérons  $\forall \zeta \in I$  la boule  $\mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \subseteq \mathcal{V}(\zeta)$  alors

d'après le théorème de la moyenne :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \quad \|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(\zeta) - f_m(\zeta))\| \\ & \leq |x - \zeta| \cdot \sup_{\xi \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \setminus D} (\|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)\|) \\ & \leq \rho_\zeta \cdot \sup_{\xi \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \setminus D} (\|g_n(\xi) - g_m(\xi)\|). \quad (3) \end{aligned}$$

Par (2) et (3) la suite  $(f_n(x) - f_n(\zeta))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.

Cela montre que dès que, quand en un point  $\xi_0 \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta)$

la suite  $(f_n)$  est convergente elle est convergente partout et

même uniformément sur  $\mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta)$ . (4)

Soit  $\mathcal{U} = \{x \in I / \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \text{ existe} \}$ .

Soit  $u \in \mathcal{U}$ :  $\mathcal{B}(u, \rho_u) \subseteq \mathcal{U}$  par (4) :  $\mathcal{U}$  est ouvert dans  $I$ .

Si la suite  $(u_n)$ ,  $u_n \in \mathcal{U}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \bar{u}$

alors il existe un rang à partir duquel  $u_n \in \mathcal{B}(\bar{u}, \rho_{\bar{u}})$

donc  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  :  $\mathcal{U}$  est fermé dans  $I$ .

$I$  étant connexe  $\mathcal{U} = I$ . La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Soit donc  $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\xi)$  sur  $I$ ,

montrons que  $g = f'$  sur  $I \setminus \mathcal{D}$ . Soit  $\zeta \in I \setminus \mathcal{D}$  et

soit  $\varepsilon > 0$  :  $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$  tel que :

$$\|f'_n(z) - f'_m(z)\| \leq \varepsilon \quad \forall z \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta)$$

et  $\|g(\zeta) - f'_n(\zeta)\| \leq \varepsilon$  par (2). (5)

Faisons tendre  $m$  vers l'infini dans (3) :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \quad & \|f_n(x) - f(x) - (f_n(\zeta) - f(\zeta))\| \\ & \leq |x - \zeta| \cdot \sup_{\xi \in \mathcal{B}(\zeta, \rho_\zeta) \setminus \mathcal{D}} (\|f'_n(\xi) - f'(\xi)\|) \\ & \leq \varepsilon \cdot |x - \zeta| \quad \text{par (5)} \end{aligned}$$

D'autre part  $f_n$  étant différentiable sur  $I \setminus \mathcal{D}$ , soit  $\zeta \in I \setminus \mathcal{D}$  :

$\exists r < \rho_\zeta$  tel que si  $|x - \zeta| < r$  on ait

$$\|f_n(x) - f_n(\zeta) - f'_n(\zeta)(x - \zeta)\| \leq \varepsilon \cdot |x - \zeta|. \quad (6)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & \|f(x) - f(\zeta) - g(\zeta)(x - \zeta)\| \\ & = \|f(x) - f(\zeta) - (f_n(x) - f_n(\zeta)) + (f_n(x) - f_n(\zeta)) - f'_n(\zeta)(x - \zeta) \\ & \quad + f'_n(\zeta)(x - \zeta) - g(\zeta)(x - \zeta)\| \\ & \leq \|f(x) - f(\zeta) - (f_n(x) - f_n(\zeta))\| \\ & \quad + \|(f_n(x) - f_n(\zeta)) - f'_n(\zeta)(x - \zeta)\| \\ & \quad + \|(f'_n(\zeta) - g(\zeta))(x - \zeta)\| \\ & \leq 3\varepsilon \cdot |x - \zeta| \quad \text{par (3), (4), (5) et (6)}. \end{aligned}$$

L'unicité de la dérivée montre que la deuxième partie du théorème est démontrée.

### Lemme 3 :

Toute fonction  $g$  continue sur l'intervalle compact  $[a, b]$  à valeur dans un espace vectoriel normé  $E$  est limite uniforme d'une suite de fonction  $(g_n)$  en escalier de la forme :

$$g_n(t) = g(\theta_i^n) \quad \forall t \in \left[ \theta_i^n, \theta_{i+1}^n \right[ \text{ pour } i = 1, n-1, \theta_1^n = a, g_n(b) = g(b)$$

$$\text{où } \bigcup_{i=1, n-1} \left[ \theta_i^n, \theta_{i+1}^n \right[ \cup \{b\} \text{ est une partition de } [a, b]$$



telle que  $\left| \theta_i^n - \theta_{i+1}^n \right| < \frac{1}{n}$  pour  $i=1, n-1$ .

**Démonstration :**

$g$  continue sur un compact  $[a, b]$  est aussi uniformément continue donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \delta_n > 0 \text{ tel que } \forall x, \forall y \in [a, b] \text{ tel que } |x - y| < \min\left(\delta_n, \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{alors } \|g(x) - g(y)\| < \frac{1}{n}.$$

Soit  $\bigcup_{i=1, n-1} \left( \left[ \theta_i^n, \theta_{i+1}^n \right[ \right) \bigcup \{b\}$  une partition de  $[a, b]$

telle que :  $\left| \theta_i^n - \theta_{i+1}^n \right| < \min\left(\delta_n, \frac{1}{n}\right)$  et soit  $g_n$  définie par :

$$g_n(t) = g\left(\theta_i^n\right) \quad \forall t \in \left[ \theta_i^n, \theta_{i+1}^n \right[ \text{ pour } i=1, n-1, \theta_1^n = a, g_n(b) = g(b).$$

$$\text{On a alors : } \|g_n(t) - g(t)\| < \frac{1}{n} \quad \forall t \in \left[ \theta_i^n, \theta_{i+1}^n \right[$$

puisque  $g_n(t) = g\left(\theta_i^n\right)$  et comme  $g_n(b) = g(b)$  le résultat est démontré.

**Remarque :** Ce résultat est un cas particulier du théorème qui caractérise les fonctions réglées sur un compact comme limite uniforme de fonctions en escalier.

(J.Dieudonné. "Eléments d'analyse : T.1 p.146 .Gauthier-villars 1969 .).

**Lemme 4 :** Construction d'une primitive continue d'une fonction en escalier.

Soit la fonction  $f$  continue sur l'intervalle compact  $[a, b]$

à valeur dans un espace vectoriel normé  $E$ ,

et soit la fonction  $g$  en escalier sur l'intervalle compact  $[a, b]$

à valeur dans un espace vectoriel normé  $E$

définie par :

$$g(t) = f\left(\theta_i\right) \quad \forall t \in \left( \left[ \theta_i, \theta_{i+1} \right[ \right) \text{ pour } i=1, \dots, n-1; \theta_1 = a, g(b) = f(b),$$

$$\text{où } \bigcup_{i=1, n-1} \left( \left[ \theta_i, \theta_{i+1} \right[ \right) \bigcup \{b\}, (\theta_i < \theta_{i+1}), \text{ est une partition de } [a, b].$$

Sur  $\left( \left[ \theta_1, \theta_2 \right[ \right)$  définissons  $G$  par :  $G(t) = f(\theta_1)(t - \theta_1)$ , d'où  $G'(t) = f(\theta_1)$ ,

sur  $\left( \left[ \theta_i, \theta_{i+1} \right[ \right)$  pour  $i > 1$  :

$$G(t) = f(\theta_i)(t - \theta_i) + \sum_{k=1}^{i-1} f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k) \text{ d'où } G'(t) = f(\theta_i),$$

$$G(b) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k).$$

Montrons que  $G$  est continue : pour  $i=1, \dots, (n-1)$  :

$$\lim_{t \rightarrow \theta_{i+1}} G(t) = f(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) + \sum_{k=1}^{i-1} f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k)$$

$$= \sum_{k=1}^i f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k), \text{ or } G(\theta_{i+1}) = \sum_{k=1}^i f(\theta_k)(\theta_{k+1} - \theta_k) \text{ (cf D1 p168)}.$$

De plus comme  $G$  est dérivable sur  $[a, b]$  sauf en un nombre fini de points et que  $\|G'(t)\| = \|g(t)\| \leq \|f\|_{\infty}$  aux points de dérivabilités

le lemme de la moyenne montre que :

$$\forall t, t' \in [a, b] : \|G(t) - G(t')\| \leq \|f\|_{\infty} |t - t'|.$$

### Lemme 5 :

Toute fonction  $f$  définie sur l'intervalle compact  $[a, b]$  à valeur dans un espace vectoriel normé  $E$  vérifiant la condition de Lipschitz :

$\exists K > 0 \quad \forall t, t' \in [a, b] \text{ alors } \|f(t) - f(t')\| \leq K |t - t'|$  vérifie :

$$(1) \sup \left( \sum_{j=1}^N \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| / \forall N \in \mathbb{N}, \forall (x_j)_{j=1, N}, a \leq x_0 \leq \dots \leq x_N \leq b \right) \text{ est fini.}$$

On dit alors que  $f$  est à variation bornée.

(2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  tels que :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall (a_j)_{j=1, N} \quad \forall (b_j)_{j=1, N} \quad a_j < b_j,$$

(  $[a_j, b_j]$  ) étant une sous-partition de  $[a, b]$ ,

$$\text{ont ait : } \sum_{j=1}^N (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^N \|f(b_j) - f(a_j)\| < \varepsilon.$$

On dit que  $f$  est absolument continue.

### **Démonstration :**

$$\text{Dans le premier cas } \sum_{j=1}^N \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq K(b - a).$$

Dans le second cas Prendre  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ .

**Remarque :** On démontre que sur un intervalle compact la continuité absolue implique la variation bornée (cf R • G • Bartle : A modern Theory of Integration • AMS 2001 p231).

### Lemme 6 : Théorème de Lebesgue.

Si  $f$  est absolument continue sur un compact (et donc à variation bornée),

si  $f$  différentiable Lebesgue -presque-partout, et si  $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$  alors :

$$f(x) = \int_a^x f'(u) du.$$

Pour la démonstration voir ( W • Rudin • Analyse réelle et complexe • Masson.1978 • p159 ).

### Lemme 7 :

Soit  $I = [t_1, t_2]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une application de  $I$  dans  $E$  espace de Banach telle que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  (dérivée continue).

Soit  $\varepsilon > 0$  alors il existe une fonction  $\mathcal{G}_\varepsilon$  de  $I$  dans  $E$  telle que  $\mathcal{G}_\varepsilon$  soit dérivable,

$\mathcal{G}_\varepsilon'$  soit linéaire par morceaux sur  $I$

et telles que  $\|\mathcal{G}_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$  et  $\|\mathcal{G}_\varepsilon' - f'\|_\infty < \varepsilon$  ( $\|h\|_\infty = \sup_{x \in I} \|h(x)\|$ ).

**Démonstration :**

D'après le **lemme 1**  $f'$  étant continue sur  $I$  limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier  $(g_n)$ .

D'après le **lemme 2** pour tout  $n$   $g_n$  admet une primitive continue linéaire par morceaux  $G_n$

telle que  $\forall n \quad G_n(t_1) = f(t_1)$  et  $G_n' = g_n$  sauf sur ensemble fini  $D_n$  de points de  $I$ .

En résumé on a :

(1)  $(g_n) \rightarrow f'$  uniformément.

(2)  $\forall n \exists G_n$  continue telle que  $G_n' = g_n$  sauf en un nombre fini de points  $D_n$ .

(3)  $\forall n \quad G_n(t_1) = f(t_1)$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(t_1) = f(t_1)$ .

On peut alors appliquer le théorème de convergence de suite de dérivées et conclure par :

(4)  $\exists G$  application de  $I$  dans  $E$  telle que  $(G_n) \rightarrow G$  uniformément et donc  $G$  continue.

(5)  $G' = f'$  sauf sur un ensemble dénombrable de points  $\bigcup_n D_n$ .

Comme  $\forall t, t' \in [t_1, t_2], \forall n, \|G_n(t) - G_n(t')\| \leq \|f'\|_\infty \|t - t'\|$  on a :

$$\forall t, t' \in [t_1, t_2] \quad \|G(t) - G(t')\| \leq \|f'\|_\infty \|t - t'\|.$$

Donc  $G$  est à variation bornée et absolument continue sur  $[t_1, t_2]$ .

La continuité de  $f'$  implique que  $f'$  est intégrable sur  $[t_1, t_2]$ ,

donc (5) implique que  $G'$  l'est aussi.

(5) implique aussi que  $G$  est aussi dérivable Lebesgue - presque - partout.

On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue (**lemme 4**) :

$$\text{Donc } G(t) - G(t_1) = \int_{t_1}^t G'(u) du = \int_{t_1}^t f'(u) du \text{ et comme } G(t_1) = f(t_1)$$

on a  $G = f$  sur  $I$ .

**Lemme 8 :**

Soit  $\varphi : ([0, 1[) \rightarrow (]0, 1]) : u \rightarrow \sqrt{1-u}$ .

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions positives continues, définie sur  $\mathbb{R}$ , telles que

$\forall n \quad \|f_n\|_\infty < 1$  et telles que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ ,

et telle que  $\|f\|_\infty < 1$  alors :

$$\int_{t_1}^t \varphi(f_n(u)) du \rightarrow \int_{t_1}^t \varphi(f(u)) du \quad \forall t, t_1.$$

**Démonstration :**

Comme  $\|f\|_{\infty} < 1 \quad \exists \varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < 1 - \|f\|_{\infty}$  et  $\exists N_{\varepsilon}$  tel que  $\forall n \geq N_{\varepsilon}$  :

$$\|f_n\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \varepsilon < 1 \text{ car } \left| \|f_n\|_{\infty} - \|f\|_{\infty} \right| \leq \|f_n - f\|_{\infty}.$$

Comme  $\varphi'(u) = \frac{-1}{2\sqrt{1-u}}$  sur  $([0, 1[)$  on a :

$C = \sup \left( \left| \varphi'(u) \right| \mid u \in [0, \|f\|_{\infty} + \varepsilon] \right) < +\infty$ , on a alors :

$$\left| \varphi(f_n(t)) - \varphi(f(t)) \right| \leq C \|f_n - f\|_{\infty} \quad \forall t$$

donc  $\varphi(f_n)$  converge uniformément vers  $\varphi(f)$  et donc :

$$\int_{t_1}^t \varphi(f_n(u)) du \rightarrow \int_{t_1}^t \varphi(f(u)) du \quad \forall t, \forall t_1.$$

**Calcul d'un temps propre :**

Soit une particule  $P$  se déplaçant à une vitesse uniforme  $\vec{V}$  dans un repère  $\mathcal{R}(O, t, x, y, z)$ ,

On munit  $P$  d'un repère  $\mathcal{R}'(P, \tau, x', y', z')$ , les directions  $\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$  restant parallèles respectivement à  $\vec{Px'}, \vec{Py'}, \vec{Pz'}$ . Considérons 2 positions de la particule :  $P(t_1)$  et  $P(t_2)$ .

Comme  $\vec{V}$  est uniforme, on peut écrire que, si  $c$  est la vitesse de la lumière :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - \overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}^2 = c^2(\tau_2 - \tau_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \left( 1 - \frac{\overrightarrow{P(t_1)P(t_2)}^2}{c^2(t_2 - t_1)^2} \right),$$

$$d'où \quad \tau_2 - \tau_1 = (t_2 - t_1) \tilde{\gamma} \left( \frac{\vec{V}^2}{c^2} \right) \quad \text{où} \quad \tilde{\gamma}(u) = \sqrt{1-u}.$$

Si maintenant la particule se déplace d'une façon continue prenant successivement les vitesses uniformes  $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$  pendant respectivement les durées  $\Delta t_1, \dots, \Delta t_n$

la durée propre du déplacement vérifiera :

$$\Delta \tau = \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \tilde{\gamma} \left( \frac{\vec{V}_i^2}{c^2} \right).$$

Considérons maintenant le cas où  $P(t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  (dérivée continue), on a le résultat suivant :

**Théorème :**

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout intervalle  $[t_1, t_2]$  de temps, il existe une particule  $Q_{\varepsilon}$

de position  $\overrightarrow{OQ_\epsilon(t)}$  et de vitesse  $\overrightarrow{V_\epsilon(t)}$  constante par morceaux telle qu' on ait :

$$t \in \left[ t_1, t_2 \right] \left\| \overrightarrow{OP(t)} - \overrightarrow{OQ(t)} \right\| \leq \epsilon \text{ et } t \in \left[ t_1, t_2 \right] \left\| \overrightarrow{V(t)} - \overrightarrow{V_\epsilon(t)} \right\| \leq \epsilon \text{ (1) .}$$

$$\text{Le temps propre } \tau_\epsilon \text{ de la particule } Q_\epsilon \text{ vérifie : } \left\| \tau_\epsilon(t_2) - \tau_\epsilon(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\gamma} \left( \frac{\overrightarrow{V}^2}{c^2} \right) dt \right\| \leq \epsilon,$$

avec  $\tilde{\gamma}(u) = \sqrt{1-u}$  ,  $c$  étant la vitesse de la lumière (2).

**Démonstration :**

Appliquons le lemme 7 à la fonction  $\overrightarrow{OP(t)}$  . Il existe alors une fonction  $\overrightarrow{OQ_\epsilon}$  de vitesse  $\overrightarrow{V_\epsilon(t)}$ , telle que (1) soit vérifié .

Le lemme 8 implique (2) .

## ***Bibliographie :***

- Annequin et Boutigny* . "Mécanique relativiste ,Exercices " .*Vuibert* 1978.
- R.G. Bartle* . " Modern theory of integration " .*AMS* 2001.
- Berkeley*( *Cours de Physique vol 1* ) . "Mécanique".*Armand Colin* 1972.
- P •Boyer* . "Algèbre et Géométries " . *C&M* 2015 .
- P •Brousse •Mécanique •Armand Colin* 1968 .
- J. Dieudonné* . "Eléments d'analyse " .*Gauthier – villars* 1969 .
- F •R • Gantmacher* . "Théorie des matrices " •*Edition J •Gabay* 1990.
- R.Goblot* . "Algèbre linéaire " *Masson* 1995 .
- E.Gourgoulhon* . "Relativité restreinte" •*EDP Sciences* 2010 .
- J. Grifone* . "Algèbre Linéaire" •*Cepadues éditions* 2002 .
- J – B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec* . "Exercices Algèbre linéaire".*Cepadues éditions* 1988 .
- D.Langlois* . "Introduction à la relativité".*Vuibert* 2011.
- J.R. Lucas , P.E. Hodgson* "Spacetime and electromagnetism " .*Clarenton Press* 1990 .
- R. Mneimé , F. Testard* . "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " . *Hermann Paris* 1986 .
- J-M. Monier* . "Algèbre 1 et 2". *Dunod* 1997 .
- J.Ph.Pérez* . " Relativité et invariance " *Dunod* 2011.
- W.Rudin* . "Analyse réelle et complexe " .*Masson* 1978 .
- C •Semay , B •Silvestre -Brac •* "Relativité restreinte". *Dunod* 2010.
- J-M. Souriau* . "Calcul Linéaire " .*PUF* 1964 .
- N.M.J. Woodhouse* . " Special Relativity " .*Springer* 2002 .

