

*Diverses remarques sur la linéarité
de la transformation de Lorentz*

Rappel du "théorème fondamental de la géométrie affine" :

Théorème :

Soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une bijection d'un espace affine de dimension ≥ 2 sur un corps \mathbf{K} possédant au moins 3 éléments, telle que pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont alignés alors $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})$ sont alignés. Alors f est semi-affine. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ f est affine.

Corollaire

Dans le théorème précédent on peut remplacer l'hypothèse : "pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont alignés alors $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})$ sont alignés" par : "l'image de toute droite (resp. tout segment de droite) par f est une droite (resp. est un segment de droite).

Démonstration :

Si l'image de toute droite par f est une droite et soit 3 points $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ alignés ils sont sur une même droite \mathcal{D} alors $f(\mathcal{D})$ est une droite, comme $\{f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})\} \subseteq f(\mathcal{D})$ $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})$ sont alignés.

Remarques :

(1) Si f est bijective les 2 hypothèses sont en fait équivalentes sous les hypothèses faites au théorème 1 sur \mathcal{E} avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$:

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont alignés alors $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})$ sont alignés f est affine par le théorème et donc toute droite est transformée en une droite.

(2) Un "contre-exemple" qui montre l'importance de la bijectivité de f :

Soit $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (0, 1)$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = (0, x)$.

Les images de 3 points alignés sont alignés puisque $f(\mathbf{R}^2)$ est sur la droite $y = 0$.

f n'est pas continue : pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f\left(2, \frac{1}{n}\right) = (0, 1)$ et $f(2, 0) = (0, 2)$ et

donc f n'est pas affine.

Comme $f(1, 0) = (0, 1)$ et $f(2, 3) = (0, 1)$ f n'est pas injective.

Comme $f(\mathbf{R}^2) \neq \mathbf{R}^2$ f n'est pas surjective.

Considérons la droite $\mathcal{D} = \{(x, 2) \mid x \in \mathbf{R}\}$ alors $f(\mathcal{D}) = (0, 1)$:

L'image de la droite \mathcal{D} n'est pas une droite.

(2) Application à la transformation de Lorentz :

On considère maintenant l'espace vectoriel réel $\mathcal{E} = \mathbf{R}^4$ de la relativité restreinte et une application $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ bijective telle que l'image toute droite affine est une droite affine d'après ce qui précède

T est affine et avec l'hypothèse supplémentaire $T(\vec{0}) = \vec{0}$ alors T est linéaire.

On va voir que les droites affines de $\mathcal{E} = \mathbf{R}^4$ sont de 2 natures différentes :

Rappel de géométrie affine :

Lemme :

Toute intersection de sous – espaces affines est un espace affine, éventuellement vide et, sinon, de direction l'intersection des directions des sous – espaces des sous – espaces considérés .

Conséquence :

L'intersection d'une droite affine \mathcal{D} et d'un hyperplan affine \mathcal{H} est un sous – espace affine de dimension au plus égale à 1 :

Soit \mathcal{D} est parallèle à \mathcal{H} soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ ou $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

Si \mathcal{D} n'est pas parallèle à \mathcal{H} $\mathcal{D} \cap \mathcal{H}$ se réduit à un point unique P .

Définitions :

On considère l'espace vectoriel réel E de dimension 4 de la relativité restreinte .

On considère les hyperplans affines $\mathcal{H}_t = \{ (ct, x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$.

Ils représentent l'espace physique de l'observateur à un instant t donné (présent absolu) .

On considère les droites affines de l'espace E qu'on va partager en 2 catégories :

$C_1 = \{ \Delta_t \text{ droite affine} / \exists \mathcal{H}_t \text{ tel que } \Delta_t \subset \mathcal{H}_t \}$ et

$$C_2 = \left\{ D_{\vec{V}, X_0} \text{ droite affine d'équation paramétrique : } t \begin{bmatrix} c \\ \vec{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\vec{V} \text{ étant un vecteur de dimension 3 et } X_0 = \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \text{ un vecteur constant .}$$

Δ_t est une droite d'univers dont tout les points sont contemporains , $D_{\vec{V}}$ est une droite d'univers qui représente la trajectoire d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse uniforme \vec{V} .

On a immédiatement $C_2 \cap C_2 = \emptyset$ et une droite d'univers a tous ses points contemporains ou aucun .

Considérons maintenant les différentes opérations suivantes :

$$(a) \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta \\ \gamma \cdot \beta & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \cdot \beta \cdot x \\ \gamma \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} \Rightarrow t' = \frac{\gamma \cdot \beta \cdot x}{c} \Rightarrow \frac{x'}{t'} = \frac{c \cdot \gamma \cdot x}{\gamma \cdot \beta \cdot x} \Rightarrow V' = \frac{c}{\beta} > c .$$

Cela montre qu'une droite de C_1 pour un observateur est une droite de type C_2 pour tout autre observateur non fixe ($\beta > 0$) par rapport au premier

.Les 2 sont de type "espace" et pour le deuxième observateur

elle représente un mouvement supraluminique $V' = \frac{c}{\beta} > c$.

$$(b) \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta \\ \gamma \cdot \beta & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \cdot t \\ -\frac{ct}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \cdot c \cdot t \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{c \cdot t \cdot \gamma \cdot \beta}{\gamma \cdot \beta} \end{bmatrix} \Rightarrow V = -\frac{c}{\beta}.$$

Cela montre qu'une droite de C_2 représentant un mobile de vitesse $V = -\frac{c}{\beta}$ peut être vue comme une droite de type C_1 .

Conclusion :

Identifier les droites affines de l'espace vectoriel réel E de dimension 4 de la relativité restreinte aux trajectoires de mouvement rectiligne uniforme est (un peu) abusif mais vrai si on considère plusieurs observateurs non fixes les uns par rapport aux autres et des transformations linéaires : Une droite d'univers est vue comme un mouvement rectiligne uniforme par au moins l'un des observateurs.

On a vu précédemment qu'une transformation T bijective de E dans lui-même qui respectait les droites d'univers et telle que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ était linéaire mais peut-on remplacer "droites d'univers" par "trajectoires de mouvement rectiligne uniforme" ?

D'après les 2 exemples ci-dessus la réponse est non. Toutefois on a le résultat suivant :

Théorème : (en reprenant les notations ci-dessus)

Soit $T : E \rightarrow E$ telle que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, T continue et bijective qui transforme toute trajectoire de mouvement rectiligne uniforme en droite (affine) d'univers alors T est linéaire.

Démonstration :

Cela revient à montrer que toute droite affine D appartenant à un \mathcal{H}_t a pour image par T une droite affine.

Soit D appartenant à un \mathcal{H}_t , soit un point Q de D . Considérons une droite D_0 qui passe par Q et qui n'appartient pas à ce \mathcal{H}_t . Considérons le plan affine \mathcal{P} qui contient D et D_0 .

On construit sur D_0 les points P_0^1 et P_0^2 tel que $\overrightarrow{QP_0^2} = 2\overrightarrow{QP_0^1}$.

De même sur D on construit les points P^1 et P^2 tel que $\overrightarrow{QP^2} = 2\overrightarrow{QP^1}$.

On construit $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ avec D_{i+1} la bissectrice de l'angle fait par (D_i, D) .

On construit aussi les points P_i^1 et P_i^2 sur D_i tels que $\overrightarrow{QP_i^2} = 2\overrightarrow{QP_i^1}$.

On a $\lim_i P_i^1 = P^1$ et $\lim_i P_i^2 = P^2$ et comme T est continue $\lim_i T(P_i^1) = T(P^1)$ et $\lim_i T(P_i^2) = T(P^2)$.

Comme D_i est une trajectoire de mouvement rectiligne uniforme $\overrightarrow{T(Q)T(P_i^2)} = \mu_i \overrightarrow{T(Q)T(P_i^1)}$.

Puisque T est injective $\overrightarrow{T(Q)T(P^2)} \neq \mathbf{0}$ et donc il existe $\alpha > 0$ et un rang N à partir duquel

$$\left\| \overrightarrow{T(Q)T(P_i^2)} \right\| > \alpha \text{ pour } i > N.$$

Comme la suite $(T(P_i^1))$ est convergente elle est bornée par un réel K d'où : $|\mu_i| < \frac{K}{\alpha}$ pour $i > N$.

il existe donc une valeur d'adhérence $\overrightarrow{\mu^*}$ pour la suite $(\overrightarrow{\mu_i})$ et $\overrightarrow{T(Q)T(P^2)} = \overrightarrow{\mu^* T(Q)T(P^1)}$
 avec $\overrightarrow{\mu^*} \neq 0$ puisque $\overrightarrow{T(Q)T(P^2)} \neq 0$ car T est injective et $T(Q)$, $T(P^2)$ et $T(P^1)$ sont alignés.

Une formule complémentaire :

On a montré précédemment que si M est une matrice de Lorentz on a :

$M = \Lambda \Omega = A \Lambda_\theta B = (A \Lambda_\theta^t A) AB$ avec Λ_θ , Λ symétriques Ω , A , B orthogonales,
 de plus $AB = \Omega$ et $\Lambda = A \Lambda_\theta^t A$ (unicité de la décomposition) .

A partir de ces formules on a :

$$M = \Lambda \Omega = \Omega ({}^t \Omega \Lambda \Omega) = AB ({}^t B ({}^t A \Lambda A) B) = AB ({}^t B \Lambda_\theta B) = \Omega ({}^t B \Lambda_\theta B)$$

d'où :

$$M = (A \Lambda_\theta^t A) \Omega = \Omega ({}^t B \Lambda_\theta B) .$$

