



HAL
open science

Éléments structurels en analyse fonctionnelle : trois notes de Fréchet sur les opérations linéaires

Frédéric Jaeck

► **To cite this version:**

Frédéric Jaeck. Éléments structurels en analyse fonctionnelle : trois notes de Fréchet sur les opérations linéaires. *Archive for History of Exact Sciences*, 2010, 64 (4), pp.461-483. 10.1007/s00407-010-0061-2 . hal-03229420

HAL Id: hal-03229420

<https://amu.hal.science/hal-03229420>

Submitted on 27 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Éléments structurels en analyse fonctionnelle : trois notes de Fréchet sur les opérations linéaires

Frédéric Jaëck

Received: 21 March 2010 / Published online: 4 May 2010
© Springer-Verlag 2010

Résumé Dans cet article nous étudions trois notes de M. Fréchet sur les opérations linéaires (publiées entre 1904 et 1906) et leur rôle dans l'émergence de l'analyse fonctionnelle au début du XX^{ème} siècle. Dans un premier temps nous mettons en évidence les processus de sélection, d'extraction et de réinterprétation mis en oeuvre par Fréchet à partir de matériaux publiés antérieurement. A partir de cette analyse nous nous attachons à montrer comment la progression vers une vision plus générale met en jeu des éléments structurels fondamentaux dans la constitution d'un champ nouveau des mathématiques. Notre étude permet finalement de préciser le concept de structure dans son rôle central dans l'émergence de l'analyse fonctionnelle.

1 Introduction

Le mot *structure* est omniprésent dans les publications mathématiques du XX^{ème} siècle. La notion large qu'il recouvre fait apparaître des formes stables, garantes d'un fondement solide sur lequel on peut bâtir une théorie ou qui permettent d'appréhender ensemble et de façon cohérente plusieurs objets sélectionnés. La structure permet au mathématicien de convoquer un contexte relativement clos, autosuffisant, et constitue un paradigme qui s'est imposé pour son aptitude à dégager et à favoriser un point de vue général : on y fait référence pour désigner des assemblages conceptuels de base dans de multiples théories (par exemple la théorie des groupes, la topologie, la théorie des opérateurs etc.), mais aussi dans de nombreuses publications où le mot *structure*

Communicated by Jesper Lützen.

F. Jaëck (✉)
Laboratoire SPHERE UMR 7219, Université Paris 7 - CNRS, Equipe Rehseis, Case 7093, 5 rue Thomas
Mann, 75205 Paris Cedex 13, France
e-mail: frederic.jaeck@laposte.net

recouvre des situations extrêmement diverses.¹ Ainsi, une caractérisation de la notion de structure qui puisse rendre compte de ses aspects variés et la mise en évidence de ses modes opératoires en mathématiques ne se laisse pas saisir de façon immédiate.²

La force de la structure est multiple, car elle permet au mathématicien à la fois de créer un nouveau paysage cohérent en rassemblant plusieurs objets, et d'instaurer³ un certain agencement des concepts convoqués. La hiérarchisation induite possède elle-même la double particularité de favoriser une vision plus générale en embrassant plusieurs objets à la lumière d'une nouvelle cohérence, et de permettre de choisir la distance interprétative la mieux adaptée dans l'approche d'un problème.

Au tournant du siècle on observe la cristallisation des centres d'intérêts d'une partie grandissante de la communauté mathématique autour de thèmes et de problèmes qui donneront naissance à ce que nous appelons désormais l'analyse fonctionnelle—cette dénomination ayant été proposée par P. Levy.⁴ On retrouve une liste (non exhaustive) des acteurs principaux de ce mouvement dans la bibliographie de notre article, lequel est essentiellement centré sur des textes de Pincherle, Hadamard et Fréchet. On peut par ailleurs consulter les deux monographies (Monna 1973) et (Dieudonné 1981) pour une vision générale des idées fondatrices de l'analyse fonctionnelle ainsi que les articles *On the Origins of Functional Analysis and the Lvov School*⁵ de R. Duda, *The Origins of Functional Analysis*⁶ de R. Siegmund-Schultze, *Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions* de J.-L. Dories, dans lesquels on trouvera des éléments essentiels pour comprendre la constitution de ce nouveau champ ainsi qu'une bibliographie conséquente.⁷ Concernant plus particulièrement l'activité mathématique de

¹ Une simple recherche du mot *structure* sur une base de données comme les *Mathematical Reviews* ou *Zentralblatt MATH* permet de constater des emplois très variés tout au long du XX^e siècle.

² Notre étude permettra d'établir, dans un cadre choisi que nous présentons juste après, quelques éléments typiques de cette notion et de son rôle en mathématiques. Par souci de simplicité, nous utiliserons ici le mot *structure* dans un sens large recouvrant les différents aspects évoqués dans cette introduction et nous spécifierons ce sens lorsque nous aurons mis en évidence un certain nombre de contrastes ou d'éléments essentiels en vue d'une meilleure caractérisation. Pour l'instant le mot unique « structure » que nous employons ne veut pas refléter de concept uniforme sous lequel tomberait naturellement un champ bien défini d'objets ou d'emplois.

³ Nous insistons ici avec le mot *instaurer* sur le processus de sélection et de convocation de plusieurs objets a priori indépendants qu'un mathématicien décide de regrouper et d'agencer. Il naît de là un ordonnancement des concepts et des points de vue qui est l'œuvre d'un discours particulier dont les travaux de Fréchet que nous allons analyser donnent un exemple révélateur. Cette hiérarchisation est à dissocier de celle que l'on peut associer au couple structure/sur-structure (ou structure/sous-structure) qui apparaît aussi dès que l'on a établi la notion de structure (penser au couple espace vectoriel/groupe additif par exemple). Cependant, ce dernier aspect n'est pas toujours présent au moment de l'émergence de nouveaux concepts, de même que toute structure n'est pas une sur-structure, ni n'active forcément ses sous-structures.

⁴ Fréchet indique dans l'introduction de son livre *Les Espaces Abstraits et Leur Théorie Considérée comme Introduction à l'Analyse Générale* que l'on doit l'appellation « Analyse Fonctionnelle » à P. Levy (lequel avait publié un livre intitulé *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* en 1922). L'acception actuelle, bien que désignant un champ mathématique largement étendu, recouvre les domaines que P. Levy ou Fréchet nommaient à leur époque pour la première fois.

⁵ Duda (2004).

⁶ Siegmund-Schultze (2003).

⁷ Le livre de A. Pietsch intitulé *History of Banach Spaces and Linear Operators* (Pietsch 2007) propose un vaste panorama des développements récents de l'analyse fonctionnelle et en particulier de la théorie des espaces de Banach.

Fréchet on peut consulter le travail de référence de A. E. Taylor publié dans la revue *Archive for History of Exact Sciences*: (Taylor 1982, 1985, 1987).

La naissance de l'analyse fonctionnelle au tournant du siècle met en jeu des phénomènes très divers comme on peut le constater à la lecture des publications citées au-dessus, mais elle reste fondamentalement marquée par l'émergence de structures pour étudier des problèmes d'équations fonctionnelles. Par ailleurs le mot *structure* n'est pas utilisé par les auteurs travaillant à l'époque dans ce champ en devenir, alors qu'il est souvent utilisé dans des situations classiques à la fin du XIX^{ème} siècle où on l'associe plus particulièrement à l'algèbre (et à la notion de groupe).

Nous proposons ici d'étudier quelques uns des processus mis en jeu dans l'émergence de structures en analyse à partir d'une courte série de textes qui nous semblent particulièrement représentatifs et fondateurs. Cette étude nous permettra de contraster plusieurs situations qui éclaireront le concept de *structure* tel qu'on peut l'appréhender dans la constitution de l'analyse fonctionnelle comme champ nouveau et indépendant au XX^{ème} siècle.

Dans cet article nous nous concentrons sur un travail de Fréchet intitulé *Sur les opérations linéaires* qu'il a publié en trois notes de 1904 à 1907.⁸ Afin de saisir la singularité et l'importance de ces articles nous les mettrons en perspective avec quelques repères dans l'émergence de l'analyse fonctionnelle. En amont, même s'il est difficile de définir un point de départ unique, on peut sans nul doute trouver des inspirations majeures dans un certain nombre de réflexions antérieures menées par Hadamard ou Pincherle.⁹ En aval, le livre de S. Banach *Théorie des Opérations Linéaires*¹⁰ de 1932 permet de saisir la richesse du travail de Fréchet tout en le situant dans ce qui nous semble, a posteriori, être une phase cohérente et essentielle de l'évolution vers l'analyse fonctionnelle.

Cette étude de Fréchet s'ouvre sur une relecture d'un travail d'Hadamard que celui-ci avait présenté à l'Académie des Sciences à Paris en 1903.¹¹ Dans un premier temps nous montrerons comment Fréchet réinterprète ce travail et en donne un exposé nouveau, enrichi de plusieurs questions. Nous étudierons aussi les éléments essentiels que Fréchet convoque et sélectionne de travaux antérieurs publiés par divers auteurs et qu'il adapte à son propre point de vue. Cette première partie permettra d'analyser le regard particulier qu'il porte sur des éléments et des formes qui joueront ensuite un rôle majeur dans sa progression.

Dans un deuxième temps nous étudierons les processus multiples qui ont permis à Fréchet de généraliser et d'étendre le résultat initial d'Hadamard à des situations qui n'avaient pas été envisagées jusque là. Cette partie mettra en évidence les différentes stratégies de sélection, d'appropriation et d'utilisation de matériaux extraits de la littérature récente de son époque. Nous verrons comment l'approche nouvelle de

⁸ Fréchet (1904, 1905, 1907). Le lecteur remarquera que ces trois articles sont publiés dans la revue américaine *Transactions of the American Mathematical Society* : A. E. Taylor montre précisément les liens importants que Fréchet établit avec les mathématiciens américains et en particulier la rencontre avec Wilson qui était alors un des éditeurs de la revue (cf. Taylor 1982, p. 241).

⁹ Nous reviendrons en détails sur les sources qui ont inspiré Fréchet dans notre analyse.

¹⁰ Banach (1932).

¹¹ Hadamard (1903).

Fréchet et des éléments que nous aurons mis en évidence dans la première partie jouent un rôle fondamental dans cette première phase de généralisation.

Enfin, nous montrerons comment l'agencement nouveau de certains concepts (ou plus largement l'émergence d'éléments structurels en un sens à définir), est intimement lié à une organisation particulière de l'exposé mathématique : celui-ci met en jeu une véritable dynamique du discours qui participe de la progression vers le général. C'est dans une lecture des mouvements internes du texte que nous trouverons des éléments pour caractériser de façon plus précise la notion de structure dans un champ en passe de se constituer.

2 Un théorème d'Hadamard comme objet central d'étude

Cette étude de Fréchet dont les trois volets partagent le même titre, *Sur les Opérations Linéaires*, introduit cette dernière notion dès le début de la première note par le biais d'une définition attribuée à Hadamard :

Rappelons d'abord quelques définitions. Nous dirons qu'une *opération* est définie si l'on fait correspondre un nombre réel déterminé et fini U_f à toute fonction $f(x)$ réelle et continue entre deux nombres fixes a, b . Nous appellerons avec M. Hadamard *opération linéaire* toute opération qui jouit des deux propriétés suivantes:

1° elle est *distributive*, c'est-à-dire que si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues entre a et b , on a toujours:

$$U_{f_1+f_2} = U_{f_1} + U_{f_2}.$$

2° elle est *continue*, c'est-à-dire que U_{f_1} tend vers U_{f_2} lorsque la fonction f_1 tend *uniformément* vers f_2 entre a et b .

(Fréchet 1904, p. 493)

Cette définition appelle quelques commentaires qui permettent de mieux cerner le contexte choisi par Fréchet pour développer sa réflexion.

On peut tout d'abord contraster cette définition avec celle que donnent Pincherle et Amaldi dans leur livre *Le Operazioni Distributive* publié en 1901:

On établit une *correspondance* entre les éléments de deux systèmes S et S' en associant un ou plusieurs éléments de S à chaque élément de S' . [...]

Si α et β sont des éléments quelconques de l'espace linéaire S et A une opération agissant sur ces éléments, on dit que A possède la *propriété de distributivité* lorsque l'on a:

$$(4) \quad A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta).$$

Il en résulte que si [...] c est un nombre rationnel,

$$(5) \quad A(c\alpha) = cA(\alpha).$$

Nous admettrons que l'égalité (5) est valable pour tous les nombres c réels ou complexes, et :

Nous nommerons distributives les opérations qui vérifient les équations (4) et (5).¹²

(Pincherle and Amaldi 1901, pp.17–18)

Contrairement à ce texte antérieur, Fréchet n'envisage comme résultat de l'opération que des nombres réels, tout comme l'avait fait Hadamard avant lui. De plus, il ne considère pas dans cette définition ce qui pourrait correspondre au système (*insieme o spazio lineare*) \mathcal{S} de Pincherle et Amaldi : il fait référence à « toute fonction $f(x)$ réelle et continue entre deux nombres fixes a, b », et il se servira lorsqu'il en aura besoin de l'addition de deux fonctions ou de la multiplication par un nombre réel. Pour leur part, Pincherle et Amaldi développent, avant la définition que nous avons citée, un chapitre dédié à la notion de système linéaire et aux opérations (addition et multiplication par un nombre) qui permettent de définir un tel système. Fréchet n'isole dans sa définition initiale aucun objet qui correspondrait à la collection des fonctions qu'il utilise assorties des opérations : il y a là un contexte usuel sur lequel il ne lui semble pas nécessaire d'insister.¹³

D'autre part, et nous verrons par la suite qu'il y a ici un enjeu essentiel, la définition retenue par Fréchet se distingue par sa référence à la continuité (une opération¹⁴ U_f est continue si U_{f_1} converge vers U_{f_2} lorsque la fonction f_1 converge uniformément vers la fonction f_2) et l'absence d'une propriété qui correspondrait au point (5) de la définition de Pincherle et Amaldi (et son extension à tous les nombres réels). Nous verrons par la suite comment ce choix et le lien établi entre les deux notions participe de l'organisation générale des idées développées par Fréchet et contribue à l'émergence de certains aspects structurels. Nous indiquons pour l'instant ce contraste au niveau des définitions dans le but de préciser le contexte précis qui constitue le point de

¹² Tra gli elementi di due sistemi S ed S' sia stabilita una *corrispondenza* che coordini uno o più elementi di S ad ogni elemento di S' . [...] Se α e β sono elementi qualsivogliano dello spazio lineare S ed A una operazione applicabile a questi enti, se dice che A gode della *proprietà distributiva* quando sia

$$(4) \quad A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta).$$

Risulta da questa che se [...] c è un numero razionale,

$$(5) \quad A(c\alpha) = cA(\alpha).$$

Noi ammetteremo che l'uguaglianza (5) sussista per ogni numero c , reale o complesso, e :
Chiameremo operazioni distributive quelle che godono della proprietà espresse dalle equazioni (4) e (5).
[Traduction de l'auteur]

¹³ Cette remarque est fondamentale ici et montre que la présence d'opérations algébriques ne s'accompagne pas forcément de lignes de partage claires qui distingueraient des éléments de nature différentes et permettraient de conclure à l'existence d'une structure.

¹⁴ La notation qui ne distingue pas clairement l'opération de l'objet à laquelle elle s'applique est aussi contraire à la présentation adoptée par quelques prédécesseurs, dont Pincherle et Amaldi cités plus haut. Ce choix semble confirmer l'impossibilité de tracer une ligne de séparation nette entre fonction et opération, et peut être rapproché du constat fait dans la note précédente.

départ de Fréchet dans son étude des opérations linéaires et nous nous concentrerons essentiellement sur la progression des idées dans ces trois notes.¹⁵

C'est dans ce contexte, tout au début de son article, que Fréchet propose un théorème d'Hadamard comme objet central d'investigation et prétexte à son travail :

M. Hadamard a démontré en se basant sur l'étude de l'expression:

$$\lim_{\mu=\infty} \int_a^b f(u) \mu e^{-\mu^2(u-x)^2} du,$$

que toute¹⁶ opération linéaire peut être représentée sous la forme:

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) K_n(x) dx,$$

où $K_n(x)$ est une fonction continue de x entre a et b .

(Fréchet 1904, p. 493)

Ce théorème fait référence (Fréchet le précise en note de bas de page) à une communication d'Hadamard adressée à l'Académie des Sciences en 1903 et intitulée « Sur les opérations fonctionnelles ». ¹⁷ Dans cette intervention Hadamard se place dans la continuité des travaux de Volterra, Pincherle et Bourlet dont il mentionne explicitement les noms, et cette filiation explicite facilite l'appréhension d'un texte assez sibyllin. L'exposé d'Hadamard peut sembler assez difficile à lire à notre époque, en particulier à cause du manque de distinction explicite entre la fonction f et sa valeur $f(x)$. De ce fait, il n'est pas toujours immédiat de saisir comment interagissent un certain type de convergence et la continuité de l'opération linéaire U . Nous reprenons ici rapidement le schéma de la preuve d'Hadamard en commentant les passages qui pourraient sembler flous hors de leur contexte. Ce point de départ que constitue l'exposé d'Hadamard est essentiel car il permet de comprendre les choix effectués par Fréchet et la reprise qu'il va proposer.

La stratégie générale qu'Hadamard met en œuvre consiste principalement à exprimer une fonction continue comme limite uniforme d'une quantité mettant en jeu une intégrale et la fonction f comme nous allons le préciser. En appliquant l'opération U aux deux membres, puis en utilisant la continuité et la distributivité de l'opération, on exprime ainsi l'action de U sous la forme rappelée par Fréchet. Dans le détail, Hadamard s'appuie sur un résultat qu'il attribue à Weierstrass et Kirchhoff qui

¹⁵ L'utilisation, nouvelle au tournant du siècle, des opérations linéaires pour relire certains problèmes mais aussi peu après comme objet d'étude principal, constitue un élément essentiel dans l'émergence de l'analyse fonctionnelle. L'article présent n'est pas centré sur cet aspect que nous développerons dans un travail prochain.

¹⁶ Il faut reprendre la définition d'Hadamard ou la version qu'en donne Fréchet et que nous avons rappelée p.4 pour comprendre la portée exacte de cet énoncé.

¹⁷ Hadamard (1903).

permet de trouver une fonction F continue (par exemple, comme le rappelle Fréchet, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$) telle que pour toute fonction f continue entre a et b on a¹⁸:

$$\lim_{\mu=\pm\infty} \mu \int_a^b f(x)F[\mu(x-x_0)] dx = f(x_0) \quad a < x_0 < b.^{19}$$

Comme la continuité de l'opération U est définie par Hadamard ainsi que par Fréchet via la convergence uniforme des suites de fonctions continues, cette formulation pourrait sembler insuffisante à un lecteur de notre époque. En fait, Hadamard fait référence aux travaux de Weierstrass où il est spécifié que la convergence est uniforme dans la limite au-dessus. Il faut concevoir ici le x_0 comme une « variable muette » (comme on le fait par ailleurs pour l'intégrale) et penser à une limite uniforme en μ . Il est alors possible d'appliquer l'opération linéaire U et écrire comme Hadamard : $U[f(x)] = \lim_{\mu=\pm\infty} \int_a^b f(x)\Phi(x, \mu)dx$ où $U[\mu F\mu(x-x_0)] = \Phi(x_0)$.²⁰ On retrouve donc ici l'inspiration directe de Fréchet, à la seule différence que celui-ci préfère au paramètre réel μ une écriture sous forme séquentielle.

Par ailleurs, Hadamard remarque au sujet de Volterra, Pincherle ou Boulet qu'ils « [avaient] été conduits à exprimer les opérations en question par des séries de la forme²¹ :

$$U = a_0 f(x_0) + a_1 f'(x_0) + \dots + \frac{a_p}{p!} f^p(x_0) + \dots \gg$$

Mais « [u]n tel développement [...] ne saurait être valable que pour des fonctions analytiques », ²² ce qui pousse Hadamard à emprunter une voie différente et à proposer la formule, valable pour toutes les fonctions continues entre a et b , que nous venons de voir. Sa motivation à dépasser la limitation initiale est explicite dans l'exposé à l'Académie : « Il m'a paru nécessaire de traiter la question en faisant totalement abstraction de l'analyticité de $f(x)$. » ²³

Pendant, malgré cette avancée importante, Hadamard souligne que dans le cas des fonctions seulement continues il est « un peu moins aisé d'exprimer que U est de la forme » ²⁴ indiquée au dessus (faisant intervenir une somme d'opérations linéaires simples).

C'est essentiellement ce résultat d'Hadamard et la difficulté qui subsiste pour faire le lien avec les développements obtenus précédemment pour les fonctions analytiques

¹⁸ Hadamard (1903, p. 352).

¹⁹ Hadamard ne rappelle pas explicitement la définition de la continuité des opérations linéaires qu'il utilise, mais fait référence aux travaux de Boulet où l'on retrouve une définition semblable à celle donnée ici par Fréchet.

²⁰ Hadamard (1903, p. 352).

²¹ Hadamard (1903, p. 351).

²² Ibid.

²³ Hadamard (1903, p. 352).

²⁴ Hadamard (1903, p. 352).

qui constitue le point de départ du travail de Fréchet : sitôt le théorème d'Hadamard énoncé, il mentionne le cas des fonctions analytiques et le développement qu'elles permettent d'obtenir pour l'opération linéaire dans un paragraphe intitulé « Développements en séries d'opérations linéaires canoniques. »²⁵

Ainsi ces trois notes successives de Fréchet vont-elles tour à tour reprendre, prolonger et généraliser de diverses façons que nous allons étudier, cette avancée initiée par Hadamard.

3 Généralisation par extension

Après avoir exposé le point de départ de sa réflexion, Fréchet place au premier plan de son étude le désir de généraliser ce résultat initial—le théorème d'Hadamard—et le mouvement va s'opérer suivant plusieurs modalités.

La première stratégie mise en place, qui occupe l'essentiel de la première note, consiste à reprendre la technique utilisée par Pincherle dans le cas des fonctions analytiques (dont Hadamard avait souligné la limitation) et à étendre le *domaine de validité de la preuve* du résultat. Fréchet rappelle la technique générale mise en œuvre par ses prédécesseurs avant d'en donner une première analyse et de l'appliquer à des cas nouveaux. Nous esquissons ici l'enchaînement des idées auxquelles Fréchet fait référence en citant le résultat de Pincherle :

M. PINCHERLE a déjà montré que l'on pouvait écrire :

$$U_f = u_0 f(c) + u_1 f'_c + \dots + u_n f_c^{(n)} + \dots,$$

c étant un nombre fixe compris entre a et b , en prenant :

$$u_0 = U_1, \quad u_1 = U_{(x-c)}, \dots, \quad u_n = \frac{1}{n!} U_{(x-c)^n}, \dots$$

(Fréchet 1904, p. 494)

Cependant, dès ce rappel, Fréchet souligne à son tour le fait que cette méthode dépend fondamentalement non seulement de la nature de la fonction f mais aussi du type de propriété qu'on attribue à l'opération²⁶ :

[...] un tel développement ne peut s'écrire que si $f(x)$ est dérivable indéfiniment en $x = c$ et encore cela ne suffit pas pour assurer la convergence du développement vers U_f .

(Fréchet 1904, p. 494)

Plus précisément, Fréchet fait ici (explicitement dans une note de bas de page) référence au livre d'Amaldi et Pincherle de 1901. Celui-ci contient des idées qui

²⁵ Fréchet (1904, p. 493).

²⁶ On voit dans la citation qui suit que Fréchet reste ici évasif sur ce point (« et encore cela ne suffit pas »), mais il y a là un enjeu essentiel que nous allons analyser dans la suite.

avaient été développées par Pincherle dès 1897 dans son *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*.²⁷ Dans ce travail Pincherle étudie les opérations linéaires agissant sur les fonctions φ représentées par une série entière avec convergence uniforme. En appliquant terme à terme l'opération linéaire A , et en utilisant simplement la distributivité, Pincherle obtient alors formellement²⁸ un développement en série du résultat $A(\varphi)$. Pour montrer que cette série formelle permet effectivement de définir l'action de A , Pincherle doit ajouter quelques conditions sur les opérations qu'il considère :

48. La propriété distributive dont jouit une opération A peut naturellement s'étendre, sous certaines restrictions, au cas où l'on exécute cette opération sur une série infinie de fonctions. Cette extension est admissible, par exemple, si l'on assujettit A aux conditions suivantes :

- a) d'être à détermination unique,²⁹
- b) de faire correspondre aux fonctions α qui appartiennent à un certain cercle (r) ,³⁰ des fonctions qui appartiennent à un cercle (r') ,
- c) de faire correspondre à un nombre positif arbitraire g un nombre positif h tel qu'à une fonction α appartenant à (r) et dont la valeur absolue maxima en (r) est moindre que h , correspond une fonction $A(\alpha)$ dont la valeur absolue maxima en (r') soit moindre que g .³¹

49. Sous ces conditions, on peut en effet démontrer le théorème suivant :

Soit un système de fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ appartenant au cercle (r) et telles que la série

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

soit convergente uniformément dans ce cercle, la circonférence comprise ; soit A une opération jouissant des propriétés énoncées au § précédent; on aura :

$$A\left(\sum_1^{\infty} \alpha_n\right) = \sum_1^{\infty} A(\alpha_n)$$

(Pincherle 1897, p. 349)

En particulier en appliquant cette idée lorsque la fonction φ est représentée par son développement de Taylor, on obtient formellement la formule citée par Fréchet. Pin-

²⁷ Pincherle (1897).

²⁸ Fréchet utilise de nombreuses fois le mot « forme » lorsqu'il fait référence aux résultats de Pincherle ou d'Hadamard. Nous verrons que cet emploi est caractéristique et déterminant dans ces trois notes.

²⁹ (NDA) on entend ici que le résultat de l'opération est unique.

³⁰ (NDA) Pincherle précise que cela signifie que l'on considère des séries de puissances entières de x , ordonnées par puissances croissantes, dont le rayon de convergence est supérieur à r .

³¹ Ce point c) fait référence à une notion qui doit être analysée en regard des choix d'Hadamard ou Fréchet concernant les différentes façons d'écrire la convergence des fonctions. Ce point et l'influence générale de Pincherle dans le traitement des opérations linéaires sont cruciaux et seront analysés en détail dans un article en préparation.

cherle commente d'ailleurs la validité de cette « série fonctionnelle de Taylor »³² comme il la nomme :

62. Le développement trouvé n'a [en général] qu'une valeur formelle. On peut, dans les cas particuliers, discuter de la validité [de la formule] comme on le fait en calcul différentiel pour la série de Taylor ordinaire, en examinant le reste. (Pincherle 1897, p. 355)

Fréchet relit cette stratégie et sélectionne dans ce schéma deux éléments clés que sont : 1) la décomposition de φ en une série de fonctions qui converge uniformément, 2) l'application (justifiée) de l'opération linéaire terme à terme à cette série.

Le but est clairement annoncé par l'auteur :

Je vais montrer d'abord qu'on peut obtenir un développement de la forme [$U_f = u_0 f(c) + u_1 f'(c) + \dots$ (cf. p. 10)] ayant un champ de validité beaucoup plus étendu que le développement [$U_f = u_0 f(c) + u_1 f'(c) + \dots$] puisqu'il n'exige même pas que $f(x)$ soit dérivable.

(Fréchet 1904, p. 494)

En fait son étude repose ici sur la considération des fonctions paires obtenues par symétrie des « fonctions $f(x)$ continues dans $(0, \pi)$ et n'ayant qu'un nombre limité de maxima et de minima dans cet intervalle. » La contrainte sur les fonctions retenues est issue des travaux initiés par Dirichlet en 1829,³³ et il sera ensuite montré que sous ces conditions la convergence de la série de Fourier est en fait uniforme (cf. Heine 1870 par exemple). C'est cette propriété que Fréchet exploite donc dans un premier temps en utilisant la distributivité et la continuité comme il les a énoncées :

Si l'on développe en série de Fourier la fonction (satisfaisant aux conditions de Dirichlet) qui est égale à $f(x)$ entre 0 et π et à $f(-x)$ entre 0 et $-\pi$, on aura entre 0 et π :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots, \quad (1)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

[P]uisque la série (6) converge *uniformément* dans $(0, \pi)$, on peut lui appliquer *terme à terme* toute opération linéaire U_f et l'on aura :

³² Pincherle (1897, p. 355).

³³ Dans son article de 1829 Dirichlet ne considère que la convergence ponctuelle de la série de Fourier (Dirichlet 1829). Il faudra attendre quelques années pour voir apparaître la nécessité de distinguer plusieurs types de convergence et en particulier la convergence uniforme. On peut consulter le livre de Bottazzini pour un panorama général du développement de ces problèmes (Bottazzini 1986).

$$U_f = \frac{\pi}{2}(2a_0u_0 + a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + \cdots),$$

En posant cette fois :

$$u_0 = \frac{1}{\pi}U_1, u_1 = \frac{2}{\pi}U_{\cos x}, \dots, u_n = \frac{2}{\pi}U_{\cos nx}, \dots$$

(Fréchet 1904, p. 494)

De plus, comme l'avait aussi fait Pincherle dans le contexte que nous avons rappelé plus haut, Fréchet relie le résultat obtenu en termes d'analogie avec le développement de Taylor pour les fonctions. Cette interprétation va elle aussi conditionner la stratégie mise en place pour dégager une vision générale. Pour Fréchet il s'agit de mettre en évidence des « opérations linéaires canoniques »³⁴ qui permettraient de donner une écriture simple et commune à toutes les opérations linéaires :

Il est assez naturel de chercher à établir pour les opérations linéaires un développement analogue à celui de Taylor pour les fonctions ordinaires. Il s'agit de trouver une suite d'opérations linéaires simples : $U_f^{(0)}, \dots, U_f^{(n)}, \dots$ choisies une fois pour toutes et telles que toute opération linéaire U_f puisse s'écrire sous la forme:

$$U_f = u_0U_f^{(0)} + u_1U_f^{(1)} + \cdots + u_nU_f^{(n)} + \cdots,$$

les constantes u_0, u_1, \dots variant seules avec l'opération U_f .

(Fréchet 1904, p. 494)

Ainsi Fréchet va-t-il systématiquement interpréter les développements en série de U_f en mettant en évidence des coefficients dépendant seulement de U (donnés par l'action sur les fonctions intervenant dans le développement et qui ne dépendent pas de f) et des « opérations linéaires simples » ne dépendant pas de U (qui sont elles aussi construites à partir des fonctions intervenant dans le développement de f). Dans l'exemple des fonctions satisfaisant aux conditions de Dirichlet la fonction f est développée suivant les fonctions $\cos nx$ et l'opération U est décrite grâce à des coefficients dépendant de U (qui sont, à un coefficient près, le résultat de l'action de U sur les fonctions $\cos nx$) et d'opérations élémentaires de la forme « $U_f^{(0)} = \int_0^\pi f(x)dx, \dots, U_f^{(n)} = \int_0^\pi f(x) \cos nxdx, \dots$ »³⁵ Cette présentation sera encore utilisée par Fréchet dans les différentes extensions du résultat d'Hadarnard.

Une nouvelle phase d'extension va permettre à Fréchet d'avancer beaucoup plus loin dans la généralisation du théorème d'Hadarnard. Il s'agit cette fois encore d'une extension du domaine de validité de la stratégie initiale (développement en série de la fonction f et application de U terme à terme sous hypothèse de convergence uniforme), mais cette fois-ci l'extension se fait en assouplissant les contraintes de la preuve

³⁴ Fréchet (1904, p. 493).

³⁵ Fréchet (1904, p. 495).

initiale : en particulier le développement représente dans ce nouveau cas la fonction f de façon bien moins évidente « par une série simplement indéterminée ».³⁶ Cette réflexion, amorcée dès la première note de Fréchet, sera essentielle dans la progression vers une plus grande généralité. Elle est fondée sur les travaux de Fejér³⁷ qui utilise la convergence en moyenne (développée par Cesàro) afin d'étudier la convergence du développement en série de certaines fonctions. La méthode est déjà conforme ici à celle qui est désormais devenue classique : la fonction f est définie sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$, paire, continue, et Fréchet lui associe sa série de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ où $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \dots, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n \geq 1$. Enfin il rappelle comment on peut définir la convergence généralisée de la série associée :

Pour une telle série :

$$v_0, v_1, \dots, v_n, \dots,$$

de somme généralisée σ , nous écrivons :

$$\begin{aligned} \sigma &\doteq v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots, \\ \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{gén } S_n \\ S_n &= v_0 + \dots + v_n, \\ \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \end{aligned}$$

avec:

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n} = \frac{nv_0 + (n-1)v_1 + \dots + v_n}{n}.$$

(Fréchet 1904, p. 495)

Dans ce cadre là, « M. FEJER a démontré que toute fonction périodique continue peut être représentée par la somme généralisée de son développement de FOURIER, avec une convergence uniforme. »³⁸ Ainsi ce résultat permet à Fréchet de lier le développement de f et celui de U_f comme dans les cas précédents :

[O]n aura ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + \dots, \\ U_f &\doteq u_0 U_f^{(0)} + \dots + u_n U_f^{(n)} + \dots \end{aligned}$$

(Fréchet 1904, p. 496)

³⁶ Ibid.

³⁷ Cf. Fejér (1903) par exemple.

³⁸ Fréchet (1904, p. 495).

On peut remarquer que ces deux expressions sont formellement très voisines de celles obtenues pour les fonctions dont la série de Taylor converge uniformément (au sens classique). Il y a pourtant un écart non négligeable ici et une réinterprétation subtile qui est opérée à travers le signe « \doteq » qui désigne la convergence de type Cesàro. Malgré l’opacification induite par l’emboîtement des concepts et le jeu entre les notions de limite « \lim » et « $\lim\text{gén}$ », le passage formel à cette nouvelle version suit précisément le schéma initial de la preuve.

Fréchet peut à partir de cette extension de la méthode de Pincherle traduire son résultat sous la forme intégrale (que nous avons rappelée p. 7) dans une section intitulée « *Le théorème de M. Hadamard* » :

Quelle que soit la fonction continue³⁹ $f(x)$, [on pourra] écrire :

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(y)\sigma_n(x, y)dy,$$

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(y)K_n(y)dy.$$

(Fréchet 1904, p. 496)

On remarque ici que Fréchet focalise son intérêt sur cette forme intégrale en associant le résultat au nom d’Hadamard. Pourtant la méthode employée, nous l’avons vu, est à rapprocher des travaux de Pincherle, et le passage à la forme intégrale est immédiat⁴⁰ en posant, comme Fréchet le précise :

$$\sigma_n(x, y) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\frac{1}{2}n + (n - 1) \cos y \cos x + \dots + \cos ny \cos nx}{n} \right)$$

$$K_n(y) = \frac{nu_0 + (n - 1)u_1 \cos y + \dots + u_n \cos ny}{n}$$

(Fréchet 1904, p. 496)

Nous verrons que ce choix de recentrage sur la forme intégrale du résultat, qui peut être aussi associé à une certaine révérence de l’élève envers Hadamard, jouera un rôle important dans la progression des idées exposées par Fréchet.

Avec ce théorème Fréchet semble donc avoir atteint les limites des possibilités d’extension de la démarche initiale qui utilise un développement similaire à celui de Taylor : il s’est affranchi avant tout des contraintes de régularité sur la fonction f .

³⁹ Fréchet note qu’on peut, partant d’une fonction définie sur un intervalle (a, b) , se ramener à l’étude sur $(0, \pi)$ par un changement de variable, ce qui rétablit la portée générale des passages cités plus haut.

⁴⁰ On utilise ici seulement la définition de la convergence de Cesàro rappelée par Fréchet et le fait que $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

A ce point de la progression, la fonction f est vue comme un élément générique (une fonction continue quelconque), mais jamais dans cette première note Fréchet ne mentionne l'ensemble des fonctions continues, ni même aucune réserve de fonctions sur lesquelles agirait U , contrairement au point de vue qu'avait adopté Pincherle avant lui. On ne peut donc pas à proprement parler d'éléments de structure dégagés lors de cette première avancée sur l'étude des opérations linéaires. Pourtant, s'il n'y a pas encore ici de concept mathématique mettant en jeu une structure, nous avons montré qu'apparaissaient dans la démarche et dans le texte trois éléments—le schéma de la preuve, l'analogie avec le développement de Taylor et l'énoncé du résultat sous forme intégrale—qui organiseraient fondamentalement le point de vue de Fréchet. L'angle d'approche particulier qui en découle va finalement permettre à Fréchet de réinterpréter l'énoncé du théorème d'Hadamard et de dépasser son cadre limite. La recherche de la *bonne distance critique*⁴¹ par rapport à un objet d'étude revisité va amener Fréchet dans la suite de ces notes à adapter son discours, à penser en termes d'éléments clés ou essentiels dont l'assemblage sera propice à l'émergence d'un point de vue général.

4 Modalisation⁴² du discours et émergence d'éléments structurels

Nous l'avons vu dans la partie précédente, la première évolution vers un contexte général est dirigée par la volonté d'étendre le champ d'applicabilité du schéma de la preuve du théorème d'Hadamard. Ce développement est totalement linéaire en ce sens qu'il suit la règle déterminée qui consiste à s'affranchir petit à petit des hypothèses d'abord formulées sur la fonction f , tout en conservant la forme de la preuve : on est passé de fonctions analytiques à des fonctions satisfaisant aux conditions de Dirichlet avant d'obtenir le résultat pour les fonctions seulement continues.

Après avoir mis en valeur le schéma de la preuve, et après en avoir établi les limites pratiques, Fréchet va déplacer son attention et analyser la nature du résultat obtenu, indépendamment de la méthode qui permettait de l'obtenir. Ce changement d'optique, amorcé à la huitième et dernière partie du premier article, va en fait être le déclencheur d'une analyse nouvelle du problème d'Hadamard mais aussi de son contexte. Cette nouvelle approche est introduite par Fréchet en ces termes :

⁴¹ Fréchet veut dépasser le cadre limite exploré au début de son texte mais sa stratégie ne consiste pas à convoquer ici les idées les plus générales possible : on peut voir dans le travail de Pincherle une vision plus générale d'opérations agissant sur des espaces linéaires quelconques, alors que Fréchet choisit d'élaborer un cadre particulier pour l'étude du problème d'Hadamard, un cadre adapté aux problèmes posés d'abord en termes de fonctions.

⁴² Nous employons le terme *modalisation* pour faire référence aux éléments dynamiques du discours qui permettent de créer une forme stable et reconnaissable—nous nous rapprochons donc ici d'une acception bien illustrée en théorie de la musique par exemple. Ainsi, l'étude de la modalisation du discours mathématique permet de mettre en évidence la dynamique des inflexions du texte nécessaires à l'émergence de théories nouvelles et générales. Cette dynamique rend compte en particulier des processus de sélection de matériaux antérieurs, de mouvements textuels—migrations de certaines parties—de l'ordonnement ou de la hiérarchisation de divers éléments choisis, de leur assemblage et de la recherche de la meilleure distance interprétative.

Le théorème de M. HADAMARD conduit naturellement à étudier le problème suivant : puisque toute opération linéaire peut s'exprimer sous la forme :

$$U_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(y) H_n(y) dy,$$

$H_n(y)$ étant une fonction continue, à quelles conditions le second membre pourra-t-il définir une opération linéaire si l'on se donne a priori une suite quelconque de fonctions continues $H_n(y)$?

(Fréchet 1904, p. 497)

C'est l'intérêt nouveau porté à la forme du résultat et à l'interprétation de la formule ci-dessus qui va amorcer la progression vers un point de vue plus général et engendrer l'apparition d'éléments structurels que nous allons identifier. Il s'agit d'une progression vers le général d'une nature essentiellement différente de celle que nous avons analysée jusqu'ici : elle se traduit par la convocation et la sélection de certains éléments mathématiques clés et par un réagencement de la structure du texte. L'évolution sensible que l'on peut saisir dans cette suite d'articles s'opère en trois temps, chacun marqué par la migration et l'organisation nouvelle de certains éléments du texte.

La progression est initiée lorsque pour la première fois Fréchet mentionne la nature des fonctions qui apparaissent dans le théorème d'Hadamard. C'est l'objet d'une remarque à la fin de sa première note :

Ce qui précède montre en outre l'utilité qu'il y a à ne pas rejeter comme trop artificielles des opérations qui seraient définies par une expression telle que :

$$\int_0^{\pi} f(y) K(y) dy,$$

où K serait une fonction non continue, même pas intégrable au sens de RIEMANN, mais intégrable au sens plus large de M. LEBESGUE [...]

(Fréchet 1904, p. 498)

Cette première remarque porte seulement sur la nature du noyau K et pas encore sur la fonction f . Fréchet note d'abord ici qu'on ne peut pas se restreindre à des fonctions K continues « [c]ar on s'exposerait à rejeter en même temps [...] des opérations linéaires très simples et très naturelles. » Ceci l'amène alors à une reformulation du problème portant sur la nature de K :

Dans quel cas l'opération $[V_n^{(n)} = \int_0^{\pi} f(y) H_n(y) dy]$ a-t-elle pour limite une opération de la forme $[\int_0^{\pi} f(y) K(y) dy]$, où la fonction $K(y)$ est la fonction la plus générale qui puisse donner un sens à cette expression, c'est-à-dire une fonction mesurable⁴³ ?

(Fréchet 1904, p. 499)

⁴³ Une note de bas de page fait référence aux « Leçons sur l'intégration » de Lebesgue (Lebesgue 1904).

Ce n'est qu'à la fin de son deuxième article que Fréchet va discuter pour la première fois la nature des fonctions f admissibles, dans une section intitulée « [I]mportance du champ fonctionnel dans lequel on définit une opération linéaire. »⁴⁴ Dans cette partie Fréchet énonce le problème en ces termes : « Nous avons supposé jusqu'ici que les opérations linéaires sur lesquelles nous raisonnions faisaient correspondre un nombre U_f à toute fonction $f(x)$ continue entre a et b et cela sans savoir si U_f était définie pour d'autres fonctions. »⁴⁵ Il est à noter que la notion de « champ fonctionnel » doit être interprétée en tant qu'étendue de candidats ayant des propriétés adéquates sans y voir a posteriori les structures que nous y associons désormais usuellement. Il s'agit de considérer une collection de fonctions f la plus large possible et telle que le théorème d'Hadamard puisse faire sens. Fréchet mène alors une analyse du champ fonctionnel le plus général envisageable :

Pour donner un exemple plus général, considérons un ensemble dénombrable E de points entre a et b : c_1, c_2, c_3, \dots et soit

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

une série absolument convergente. L'opération

$$U_f = A_1 f(c_1) + \dots + A_n f(c_n) + \dots$$

sera définie et linéaire pour toute fonction $f(x)$ uniforme et bornée entre a et b . Or, on ne peut étendre à de telles opérations le théorème de M. HADAMARD. En effet, son énoncé même suppose qu'on peut calculer l'intégrale

$$\int_a^b K_n f dy;$$

il faut pour cela que f soit intégrable. Par conséquent, il ne peut y avoir de sens que dans le champ des fonctions intégrables. Mais cette restriction n'est pas encore suffisante. [...]

(Fréchet 1905, p. 138)

C'est essentiellement la forme du théorème d'Hadamard qui dirige alors l'analyse de Fréchet et permet de cerner les contours du champ fonctionnel le plus vaste possible, d'en mettre à jour les caractéristiques nécessaires. D'ailleurs la suite de la note expose quelques cas limites élémentaires : « Si l'on applique la formule [$U_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K_n(y) f(y) dy$] à la fonction sommable $f(x)$ qui est égale à 1 pour $x = a$ et nulle partout ailleurs, on arrive à une impossibilité. »⁴⁶ Dans le même ordre d'idées, Fréchet remarque aussi que certaines opérations linéaires peuvent ne pas être définies

⁴⁴ Fréchet (1905, p. 138).

⁴⁵ Ibid.

⁴⁶ Ibid.

pour toutes les fonctions continues, ce qui va l'amener à considérer des opérations définies sur un champ plus restreint : « Un autre genre de difficultés se présente quand on considère des opérations linéaires qui ne sont pas définies dans tout le champ des fonctions continues, comme l'opération $U_f = f'_c$. »⁴⁷

Finalement, après cette analyse précise de Fréchet, l'évolution du point de vue va être complète dans la troisième note et on y observe un réagencement essentiel des idées. Le texte s'ouvre sur l'introduction d'un champ fonctionnel quelconque avec lequel on peut définir une opération :

Définition du champ. Considérons un champ de fonctions de la variable x définies dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Je supposerai que si deux fonctions appartiennent au champ, il en est de même de leur somme. A toute fonction du champ, $f(x)$, nous pourrons faire correspondre un nombre bien déterminé U_f . Nous définirons ainsi une opération dans ce champ de fonctions. Nous dirons que cette opération est *distributive*, si quelles que soient les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ du champ, on a :

$$U_{f_1} + U_{f_2} = U_{f_1+f_2}.$$

(Fréchet 1907, p. 433)

On est donc passé d'un discours respectant une forme établie antérieurement—présentation conforme au texte d'Hadamard—à une singularisation de certains éléments qui ont été extraits et ramenés à une place particulière au début de l'exposé. Une analyse du texte semble indiquer ici que c'est le concept d'opération et les deux propriétés principales associées qui déterminent le processus à l'œuvre. La distributivité (de l'opération U) trouve un écho dans le choix de donner une place particulière à l'addition des fonctions (avec la contrainte supplémentaire que le champ fonctionnel doit être additivement fermé). Quant à la propriété $cU_f = U_{cf}$ pour un nombre réel quelconque c , elle est traitée à part comme conséquence d'une propriété plus générale de l'opération (sa continuité) qui sera énoncée dans des termes différents adaptés à chaque champ fonctionnel choisi. Ainsi Fréchet ne place pas sur le même plan l'addition des fonctions et la multiplication par un réel, et il utilise immédiatement cette dernière de façon implicite⁴⁸ :

On en conclut en particulier que l'on a pour toute opération distributive :

$$cU_f = U_{cf}$$

quelle que soit la constante c . Pour que cette relation ait lieu même pour c irrationnel, il suffit que U_f satisfasse à une certaine condition complémentaire. Nous allons énoncer plus loin cette condition complémentaire, mais nous l'énonçons

⁴⁷ Fréchet (1905, p. 139).

⁴⁸ Ici Fréchet ne propose pas que le champ de fonctions soit fermé pour la multiplication par un réel par exemple.

rons d'une manière particulière pour chacun des champs de fonctions que nous allons examiner.

(Fréchet 1907, p. 433)

Les remarques qui précèdent montrent que Fréchet, même à ce point avancé de sa réflexion, ne considère pas les champs de fonctions comme des espaces vectoriels. Cette notion, comme nous l'avons rappelé, est pourtant bien établie à cette époque depuis les travaux de Peano d'abord et de Pincherle par la suite, dans des domaines connus de Fréchet. Les définitions établies par ces prédécesseurs auraient permis de constater pour chaque champ de fonction étudié dans la suite qu'il y a des opérations algébriques à disposition qui le font rentrer dans la catégorie des espaces (ou systèmes) linéaires—Pincherle a par exemple montré que de nombreux champs fonctionnels tombaient sous sa définition de *spazio lineare*. Mais ici l'enjeu est différent et il y a un véritable mouvement qui s'amorce vers une vision générale qui s'émancipe pour partie des cas particuliers de champs de fonctions qui vont permettre de mener à bout l'étude de Fréchet. Cette démarche accompagne un processus de structuration important dans lequel Fréchet place côte à côte une première catégorie d'objets (« les champs de fonctions de la variable x définies dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ ») et une opération (la « somme » de deux fonctions), afin de créer une nouvelle catégorie (que nous nommerions de nos jours des champs additivement fermés⁴⁹) que sont étudiés et utilisés. Ce nouvel objet composite n'est pas à proprement parler l'agrégation de deux entités indépendantes ou placées sur le même plan : la notion de champ de fonctions embarque avec elle de multiples concepts ou objets cachés, dont l'addition des fonctions. C'est donc ici le choix de Fréchet de faire une place particulière à l'addition, plus que la nature des objets considérés et leur interdépendance, qui met en place un phénomène de structuration.

Le deuxième motif structurant du texte et de la pensée de Fréchet est déterminé par l'introduction de la continuité et le traitement particulier réservé à la deuxième propriété des opérations, à savoir la possibilité d'écrire $cU_f = U_{cf}$ pour tout nombre réel c et toute fonction f du champ considéré (dans la suite de notre article nous noterons cette propriété (\mathcal{D})). Fréchet va donc réintroduire ici la continuité de l'opération U , laquelle était présente dans la formulation d'Hadamard (cf. p. 5), et voir la propriété (\mathcal{D}) comme conséquence immédiate de celle-ci.

Alors que pour l'addition et la distributivité Fréchet a opté pour un traitement uniforme des champs fonctionnels, et bien que l'approche soit encore uniforme dans l'énoncé de la propriété (in *line graphics*), la définition de la continuité sera établie de façon particulière pour les divers champs fonctionnels envisagés. Ainsi Fréchet distingue les opérations définies successivement dans les champs de fonctions suivants :

⁴⁹ Fréchet n'emploiera que le mot « champ » tout au long de son étude, et ceci malgré l'évolution de point de vue et la création d'éléments structurels attachés à la collection de fonctions. Le vocabulaire en analyse fonctionnelle ne se stabilisera finalement qu'à partir du livre de Banach (Banach 1932) où les mots « ensemble », « champ », « espace » permettront de distinguer plusieurs structures et de mieux apprécier la pertinence de l'une par rapport à l'autre.

1. « [L]e champ (M) des fonctions mesurables et bornées. »⁵⁰

Dans ce cas, les fonctions mesurables sont définies au sens de Lebesgue et la convergence adoptée est celle que nous appelons convergence presque partout :

Nous dirons que cette opération est *continue* dans (M) si l'on a :

$$U_f = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{f_n},$$

lorsque $f(x), f_1(x), f_2(x) \dots$ sont des fonctions du champ (M) qui sont bornées dans leur ensemble⁵¹ et que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ sauf peut être en un ensemble de valeurs de x de mesure nulle. (Fréchet 1907, pp. 433–434)

2. « [L]e champ (Ω) des fonctions sommables et de carré sommable. »⁵²

Dans ce cas Fréchet utilise la « convergence en moyenne introduite par M. RIESZ et M. FISCHER »⁵³ et cette fois-ci le mode de convergence des fonctions est nettement dissocié dans l'exposé de la continuité de l'application linéaire :

On dira que $f_n(x)$ converge en moyenne vers $f(x)$ et on écrira :

$$f(x) \sim \lim f_n(x)$$

si $f(x)$ et $f_n(x)$ sont des fonctions de (Ω) telles que l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} [f_n(x) - f(x)]^2 dx$$

tende vers zéro avec $1/n$. Nous dirons alors qu'une opération U_f est continue dans le champ Ω si U_{f_n} tend vers U_f quand $f_n(x)$ converge en moyenne vers $f(x)$.

(Fréchet 1907, p. 439)

3. « [L]e champ des fonctions continues. »⁵⁴

Dans ce cas Fréchet reprend une définition due à Hadamard pour définir la proximité de deux fonctions et la convergence d'une suite (C, C_n, C_ω, E désignant respectivement les champs des fonctions continues, n fois dérivables, indéfiniment dérivables ou holomorphes) :

[D]eux fonctions ont un voisinage d'ordre n défini par le nombre ϵ quand, de 0 à 2π , ces fonctions et leurs n premières dérivées diffèrent en valeur absolue de moins de ϵ (n pouvant être nul, entier ou infini). Cela étant, une opération U_f

⁵⁰ Fréchet (1907, p. 433).

⁵¹ Il faut comprendre ici « qui sont chacune bornée sur $(0, 2\pi)$. »

⁵² Fréchet (1907).

⁵³ Fréchet (1907, p. 439).

⁵⁴ Fréchet (1907).

définie dans l'un des champs C , C_n , C_ω ou E s'appellera opération continue si $U_f - U_{f_p}$ est infiniment petit en même temps que le voisinage (d'ordre 0 , n , ∞ , ∞ respectivement) de $f(x)$ et $f_p(x)$.
(Fréchet 1907, p. 441)

Ces définitions dont l'unité n'est pas encore vraiment avérée ici (contexte vu de façon non uniforme, fluctuation de vocabulaire, dissociation non systématique de la définition de la convergence des fonctions et de la continuité de l'opération), permettent pourtant à Fréchet de définir la continuité de U_f d'une manière similaire dans les trois situations : U_f est continue si $\lim U_{f_n} = U_f$ lorsque f_n converge vers f .⁵⁵ Ainsi une certaine uniformité de vision des champs fonctionnels, qui semblait avoir disparu dans le traitement cas par cas, réapparaît ici dans une formulation (presque) unique de la continuité de l'opération U et dans la formulation isolée au début de la propriété (\mathcal{D}). On peut donc penser ici que le mouvement vers le général ne s'effectue pas dans l'élaboration d'une structure que l'on qualifierait maintenant de topologique (issue des considérations de convergences des suites de fonctions) mais plutôt dans une formulation unique de la continuité d'une opération, définition indifféremment adaptée à chacun des espaces considérés tout au long de ces trois notes. Cette formulation unique est elle-même intimement liée à l'extraction et à la mise en avant de la convergence des suites de fonctions comme élément fondamental, et ceci pour tous les champs fonctionnels étudiés.

Enfin, mentionnons que Fréchet pourra dans chacun de ces cas utiliser sa méthode et le schéma unique de la preuve du théorème d'Hadamard en approchant la fonction f par une série convergente (en un sens adapté à chacun des cas et des types de convergence) et en appliquant U terme à terme grâce à la continuité exprimée de façon adaptée et comme il l'a fait dès la première note.

5 Conclusion : éléments structurels et structures

Nous avons souligné tout au long de cet article comment une certaine modalisation du discours mathématique donnait une place particulière à des éléments sélectionnés : des objets mathématiques mais aussi des formes ou des éléments du discours sur lesquels l'auteur s'appuie pour forger une vision nouvelle. Cependant, il nous reste à établir quel est l'enjeu exact de la mise en valeur de ces éléments dont la nature est double dans l'émergence de structures propres à l'analyse fonctionnelle. Notre étude permet ici de faire retour sur l'idée de *structure* et d'en préciser certains aspects essentiels.

La notion de *structure* peut être approchée dans un premier temps à travers deux situations : l'une antérieure aux textes de Fréchet avec la *structure de groupe* par exemple, l'autre, avec une vision rétrospective (qui constitue une extension de la première), nous permet de parler de structures algébriques, topologiques etc. au sens que l'on utilise de nos jours.

⁵⁵ Il s'agit donc de ce que nous nommerions une continuité séquentielle et le travail de Fréchet dans ces trois articles ne dépasse pas ce cadre. Fréchet développe dans des travaux de la même époque des éléments de topologie dans les espaces abstraits qui ne semblent pas trouver d'échos directs dans ces trois notes.

Cependant, pour être plus précis, il nous faut extraire quelques qualités essentielles de ce concept si on veut le mettre à l'épreuve dans les situations multiples que nous avons rencontrées lors de cette étude. En particulier, il semble que le concept de structure auquel nous faisons ici référence repose sur deux caractéristiques essentielles qui se sont dégagées tout au long de l'étude des notes de Fréchet sous diverses formes.

Tout d'abord, il est nécessaire d'avoir, pour parler de structure, une agrégation d'objets a priori indépendants afin de constituer un nouvel objet cohérent. De plus la *structure* est soumise à la nécessité d'être en efficace : des objets nouveaux ou revisités doivent tomber sous sa définition. Il est par ailleurs important de constater que la notion de *structure* s'accompagne d'une vision plus ou moins réflexive tendant à étudier ses propriétés propres parallèlement à son utilisation comme outil apte à résoudre des problèmes.

Cette approche permet de tracer une première ligne de partage entre différentes situations tout en conservant les occurrences récentes et anciennes que nous avons citées plus haut, lesquelles nous apparaissent naturellement du côté de la *structure*.

De ce point de vue, notre analyse nous permet de donner une première évaluation des structures présentes dans le texte de Fréchet.

D'abord du point de vue algébrique : une addition et sa conséquence en termes de multiplication par un rationnel sont mentionnées dans le cadre particulier des champs de fonctions. Les objets convoqués dans cette définition ne sont pas nouveaux ici, ni même évoqués pour la première fois simultanément pour étudier les fonctions. Ce qui est nouveau, et permet de parler d'élément structurel, c'est l'agrégation cohérente des deux notions au début de l'article dans le cadre d'une définition traitant des fonctions. Cependant, la multiplication par un réel général n'est toujours pas dégagée et se trouve liée à la notion de continuité elle-même définie de façon particulière dans chaque espace. Malgré le titre choisi par Fréchet (« Définition du champ »), il n'y a pas de ligne de démarcation franche entre l'introduction de l'addition et l'évocation de l'opération U_f qui permettent de penser qu'un concept nouveau et une structure d'espace de fonctions sont établis ici.

De même du point de vue topologique,⁵⁶ il s'agit d'un choix de mode de convergence, ou de son extraction dans des situations classiques. La nouveauté ici ne vient pas d'une définition, qui est bien connue à l'époque de Fréchet dans chacun des cas qu'il évoque, mais du positionnement hiérarchisé des éléments tels qu'ils sont exposés. Des éléments sont isolés et agencés pour former une entité cohérente avec chaque champ de fonctions, et sont positionnés en amont de chaque situation particulière envisagée. Cependant il n'y a pas de nouveau concept composé pour traiter ni la convergence des suites d'éléments du champ, ni la continuité des opérations, et toute évocation de *structure* serait ici prématurée.

Pourtant, nous avons vu dans ces textes que de nombreuses autres permanences et éléments structurants étaient à l'œuvre. Les premiers éléments de définition que nous venons d'indiquer ne permettent pas d'explorer la richesse des situations que nous avons rencontrées dans les trois notes de Fréchet ni de rendre compte de l'organisation des idées mathématiques dans une dynamique propre à générer de la généralité.

⁵⁶ Nous employons ici ce terme comme simple outil taxinomique.

Nous avons en particulier dégagé un certain nombre de schèmes forts, de formes déterminantes, à la fois dans le discours mathématique et dans la nature des objets appréhendés, mis en valeur ou réagencés par le mathématicien. Il est donc une catégorie d'éléments structurels dont la nature dépasse celle constituée strictement d'objets mathématiques : ces éléments se retrouvent aussi dans une certaine pratique ou modalisation du discours et participent de façon essentielle à la progression vers la généralité. L'étude des trois notes de Fréchet que nous avons menée ici a permis de dégager dans la pratique quelques uns de ces éléments structurels et de montrer qu'il y avait là une collection de textes essentiels dans la constitution de l'analyse fonctionnelle du XX^{ème} siècle.

On voit donc à différents niveaux qu'il s'opère ici quelque chose de nouveau, et que malgré de nombreuses coïncidences formelles avec les textes de ses prédécesseurs, l'approche de Fréchet ne met pas en jeu une simple illustration de la notion d'espace vectoriel, ou de type de convergence, mais dégage un outil, un mode de pensée fécond pour étudier le problème d'Hadamard et le généraliser. La dynamique nécessaire à l'émergence de structures en analyse est décelable dans des textes antérieurs à ces trois notes de Fréchet : par exemple chez Pincherle, puis chez Hadamard qui, pour la première fois, exprime la nécessité de dépasser le contexte qu'il utilise lui-même et de trouver des voies de généralisation afin d'analyser les opérations intégrales. Cependant, ces trois articles de Fréchet n'ont pas seulement vocation à établir un point de vue général, une prise de recul appelée par le titre « Sur les opérations linéaires » et qui réinterprète le résultat d'Hadamard avec une certaine distance générale : outre la sélection des éléments pertinents, le processus de progression vers le général permet une réorganisation et une véritable hiérarchisation des concepts qu'elle isole. Ainsi l'émergence des structures ne pourra-t-elle s'opérer qu'à partir de cette hiérarchisation essentielle dans la recherche de la bonne distance interprétative, laquelle constitue l'enjeu essentiel de ce travail de Fréchet au tout début du XX^{ème} siècle.

Remerciements L'auteur souhaite exprimer ses remerciements à Karine Chemla pour les nombreuses discussions qui ont nourri et permis d'améliorer substantiellement cet article, à Umberto Bottazzini pour avoir partagé quelques pistes de lectures essentielles, ainsi qu'au referee de la présente revue pour sa lecture rigoureuse.

References

- Banach, Stefan. 1932. *Théorie des opérations linéaires*, vol. VIII. Warszawa: Mathematisches Seminar der Univ. Warschau (Monografie Matematyczne I).
- Bottazzini, Umberto. 1986. *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer.
- Dieudonné, Jean. 1981. *History of functional analysis*, vol. 49. Amsterdam/New York/Oxford: North-Holland Studies.
- Dirichlet, P. G. Lejeune. 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 3: 157–169.
- Dorier, Jean-Luc. 1996. Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions. *Revue d'histoire des mathématiques* 2: 265–307.
- Duda, Roman. 2004. On the origins of functional analysis and the Lvov School. *Annales Societatis Mathematicae Polonae*. Serie I, 5–45.
- Fejèr, Leopold. 1903. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Mathematische Annalen* 58: 51–69.

- Fréchet, Maurice. 1904. Sur les opérations linéaires. *Transactions of the American Mathematical Society* 5: 493–499.
- Fréchet, Maurice. 1905. Sur les Opérations linéaires. *Transactions of the American Mathematical Society* 6:134–140.
- Fréchet, Maurice. 1907. Sur les Opérations linéaires. *Transactions of the American Mathematical Society* 8:433–446.
- Fréchet, Maurice. 1928. *Les Espaces Abstraits et Leur Théorie Considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*. Paris: Gauthier-Villars et Cie.
- Hadamard, Jacques. 1903. Sur les opérations fonctionnelles. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences* 351–354.
- Heine, E. 1870. Ueber trigonometrische Reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 71: 353–365.
- Lebesgue, Henri. 1904. *Leçons sur l'intégration*. Paris: Gauthier Villars.
- Monna, A.F. 1973. *Functional analysis in historical perspective*. Utrecht: Oosthoek.
- Pietsch, Albrecht. 2007. *History of Banach spaces and linear operators*. Boston: Birkhäuser.
- Pincherle, Salvatore. 1897. *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*. Bologne.
- Pincherle, Salvatore, and Amaldi, Ugo. 1901. *Le Operazioni Distributive e le loro Applicazioni All' Analisi*. Bologna: Zanichelli.
- Siegmund-Schultze, Reinhard. 2003. *The origins of functional analysis*. In *A history of analysis*, ed. by H.N. Jahnke, vol. 24, 385–407. Providence (Rhode Island), USA: American Mathematical Society.
- Taylor, Angus, E. 1982. A study of Maurice Fréchet. I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences* 27: 233–295.
- Taylor, Angus, E. 1985. A study of Maurice Fréchet. II. Mainly about his work on general topology, 1909–1928. *Archive for History of Exact Sciences* 334: 279–380.
- Taylor, Angus, E. 1987. A study of Maurice Fréchet. III. Fréchet as analyst, 1909–1930. *Archive for History of Exact Sciences* 37: 25–76.