



HAL
open science

Décomposition polaire des matrices de Lorentz

Alain Guimier

► **To cite this version:**

Alain Guimier. Décomposition polaire des matrices de Lorentz : Explicitation du terme symétrique et du terme orthogonal. 2022. hal-03576259

HAL Id: hal-03576259

<https://amu.hal.science/hal-03576259>

Preprint submitted on 15 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Alain Guimier

*Décomposition polaire des matrices de Lorentz .
Explicitation du terme symétrique et du terme orthogonal .*

Chapitre I : Axiomatique • Matrice de Lorentz .

Chapitre II : Explicitation du terme symétrique .

Chapitre III : Explicitation du terme orthogonal .

Chapitre IV : Exemples numériques .

Annexe .

Bibliographie .

Février 2022

Nous prposons une construction hypothético – déductive de la transformation de Lorentz dans le cas général et une explicitation des 2 termes de la forme polaire de cette transformation .

Chapitre I : Axiomatique • Matrices de Lorentz •

On considère notre espace physique assimilé à un espace affine réel à 3 dimensions E dans lequel peuvent se mouvoir librement par rapport à E et entre eux des points appelés "observateurs". On considère \mathcal{P} un ensemble de ces points O auxquels on associe un repère orthormé $R_O(\vec{O}, \vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O)$ et une horloge H_O .

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées sur \mathcal{P} :

(Hypothèse 1) : Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, on suppose que pour tout point Q défini à partir de R_O on peut lui associer une horloge synchronisée avec celle de O .

Conséquence : La synchronisation des horloges dans chaque repère permet d'associer à chaque observateur O un repère \mathcal{R}_O quadridimensionnel d'origine $\mathcal{O} : O$ au temps $t_0 = 0$

puisque la variable temporelle t est indépendante des variables spatiales.

On définit ainsi une famille de repères quadridimensionnels (\mathcal{R}_O) :

$$\mathcal{R}_O = \mathcal{R}_O(\vec{O}_{t_0=0}, e_1 = c \cdot \tau, e_2 = I, e_3 = J, e_4 = K) \text{ avec } c \text{ la vitesse de la lumière,}$$

τ vecteur temporel unitaire porté par la droite d'univers associées à O ,

et I, J, K sont $\vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O$ au temps $t_0 = 0$.

On définit aussi sur \mathcal{R}_O la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\varphi(e_i, e_j) = 0 \text{ pour } i \neq j, \varphi(e_1, e_1) = 1, \varphi(e_i, e_i) = -1 \text{ pour } i = 2, 3, 4.$$

(Hypothèse 2) : Si une ligne d'univers est une droite affine pour \mathcal{R}_O ,

elle est aussi une droite affine pour tout autre $\mathcal{R}_{O'}$.

(Hypothèse 3) :

On suppose que les espaces E_O défini par (R_O, H_O) sont munis des mêmes lois physiques qui permettent de définir les mêmes unités de mesure d'espace et de temps pour chaque E_O .

On choisit un point arbitraire O_0 de \mathcal{P} et le temps $t_{O_0} = 0$ indiqué par H_{O_0} .

Pour tout point O de \mathcal{P} , par translation spatiale prenons comme nouvelle origine spatiale de E_O le point O' de R_{O_0} qui coïncide avec O_0 au temps $t_{O_0} = 0$.

Prenons comme nouvelle origine temporelle de E_O , l'instant où O' et O_0 coïncident.

Par la suite, on supposera que tous les repères spatiaux R_O auront leur origines confondues au temps $t = 0$ de leur horloge respective.

Et par conséquent la famille de repères quadridimensionnels (\mathcal{R}_O) aura la même origine spatio-temporelle.

(Hypothèse 4) : On suppose que la lumière a un mouvement rectiligne uniforme dans tout E_O et que sa vitesse numérique c est constante et indépendante de la source d'émission et de l'espace E_O considéré.

Conséquence : Si $X = (ct, x, y, z)$ est le vecteur représentant la position d'un photon issu de l'observateur O au temps $t = 0$ pour le repère \mathcal{R}_O

et si $X' = (ct', x', y', z')$ est le vecteur représentant

la position de ce même photon issu de l'observateur O' au temps $t'=0$

$$\text{on a } c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} \text{ pour } t > 0 \text{ et } t' > 0.$$

Donc les coordonnées du photon vérifieront simultanément :

$$c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ et } c^2 t'^2 - x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \text{ dans } \mathcal{R}_O \text{ et } \mathcal{R}_{O'}.$$

Si on considère la forme quadratique associée à Φ :

$$\Phi(X) = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0.$$

(Hypothèse 5) : Isotropie de l'espace .

Nous énoncerons cette hypothèse au chapitre III.

(Voir aussi C. Semay , B. Silvestre – Brac : relativité restreinte p.105)

Le problème à résoudre :

On cherche une transformation $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ inversible qui donne les coordonnées spatio-temporelles

du point P pour l'observateur O en fonction de celles de l'observateur O' ,

telle que sous les hypothèses 1, 2, 3, 4 ci-dessus possède les invariants suivant :

(1) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

(2) T transforme les droites affines en droites affines ,

(3) si $X = T(X') : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0$ c'est à dire que T laisse invariant le cône d'isotropie de Φ .

Remarques :

L'inversibilité permet d'avoir un groupe de transformation .

La première condition vient de l'origine commune des 2 repères et que dès que T est affine , elle est linéaire .

Les 2 autres conditions traduisent les 2 invariances admises par les hypothèses 2 et 4 .

Le seul paramètre qui lie O et O' est la vitesse relative \vec{V} de O' par rapport à O et donc $T = T(\vec{V})$.

Pour cela on va utiliser les 2 théorèmes suivants donnés dans toute leur généralité :

Théorème 1 : (P • Boyer . "Algèbre et Géométries " . C&M 2015 p.51).

Soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une bijection d'un espace affine \mathcal{E} de dimension ≥ 2 sur un corps \mathbb{K} possédant au moins 3 éléments, telle que pour tout a, b, c alignés alors $f(a), f(b), f(c)$ sont alignés, alors f est semi-affine .

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ f est affine .

(Ce théorème est appelé théorème fondamental de la géométrie affine • Abouabdillah Driss a proposé une version améliorée de ce théorème : (<https://ssrn.com/abstract=3181422>) en remplaçant l'hypothèse f bijective par f surjective).

Conséquence : Dans un espace affine réel les bijections qui conservent les droites affines sont les applications affines bijectives .

On note $\mathcal{C}(\Phi) = \{x / \Phi(x, x) = 0\}$ le cône d'isotropie de Φ une forme bilinéaire symétrique et $\text{Rad } \Phi = \{x / \forall y \Phi(x, y) = 0\}$.

Remarque : Si Φ est la forme bilinéaire symétrique associée à $\Phi = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \text{Rad } \Phi = \{0\}$.

Théorème 2 : (R. Goblot . "Algèbre linéaire " Masson 1995 p.254)

Soit $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbf{K}$, E espace vectoriel sur \mathbf{K} , une forme bilinéaire symétrique telle que $\text{Rad } \Phi \neq \mathcal{C}(\Phi)$

Pour qu'une forme bilinéaire Φ' soit proportionnelle à Φ il faut et il suffit que $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$.

(Comparer ce théorème associé aux formes linéaires ayant un noyau commun .)
 Les conditions (1) et (2) imposées à T implique que T est linéaire (Théorème 1) .
 Soit M est la matrice qui représente T dans les bases associées aux repères \mathcal{R}_O et $\mathcal{R}_{O'}$.

Si on note $X' = MX$, on a $\Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = \Phi(MX) = 0$

alors (Théorème 2) : $\exists \lambda \neq 0, \forall X \Phi(MX) = \lambda \cdot \Phi(X)$

en notant $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ on a :

$${}^t(MX)G(MX) = {}^tX {}^tMGMX = \lambda \cdot {}^tXGX \Leftrightarrow {}^tMGM = \lambda \cdot G$$

la dernière équivalence est conséquence de la symétrie des matrices tMGM et G .
 (J-M. Monier."Algèbre 1 et 2". Dunod 1997.)

Evaluation de λ :

Montrons d'abord que si la vitesse de O' mesurée par l'observateur O est \vec{V} ,
 la vitesse de O mesurée par l'observateur O' est $-\vec{V}$:

(Pour le moment on ne dispose que des hypothèses ci – dessus)

(cf C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". Dunod 2010 p108 note 5)

On se place d'abord du point de vue de l'observateur O .

Considérons le cas où O' s'éloignant de O .

Plaçons nous du point de vue de l'observateur O .

Un rayon lumineux part de O vers O' au temps t_0 , atteint O' au temps t_1 au point P_1 ,

et revient immédiatement vers O , qui est atteint au temps t_2 puis repart immédiatement

vers O' qui est atteint au temps t_3 au point P_2 ,

puis retourne immédiatement vers O qui est atteint au temps t_4 .

Il y a donc un double aller – retour.

La vitesse numérique c du rayon lumineux étant la même dans les 2 sens on a :

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2} \text{ et } t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2} .$$

Lorsque le rayon lumineux atteint , au temps t_1 , le point P_1 ,

O' continue à s'éloigner de O alors que le rayon retourne vers O .

$t_3 - t_1 = \frac{t_4 - t_0}{2}$ est la durée entre les 2 contacts du rayon lumineux et O' .

Si on suppose que O' a une vitesse uniforme \vec{V} de module V on a $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = V \cdot \frac{t_4 - t_0}{2}$.

On peut remarquer que $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$ est aussi égal à la la différence

$$\|\overrightarrow{OP_2}\| - \|\overrightarrow{OP_1}\| = c \left(\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2} \right) .$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } V &= c \left(\frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}} \right) = c \left(\frac{t_4 - 2t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right) \\ &= c \left(\frac{(t_4 - t_0) - 2(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) = c \left(1 - 2 \left(\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right). \end{aligned}$$

Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice de transformation telle que $X' = MX$,
 X les coordonnées d'un point P dans la base de $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$,
 X' les coordonnées d'un même point P dans la base de $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$.

Plaçons nous maintenant du point de vue de l'observateur \mathcal{O}' qui veut évaluer V' !
 Considérons les coordonnées de l'observateur \mathcal{O} dans $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$:

\mathcal{O} a pour coordonnée $(ct, 0, 0, 0)$ dans la base associée à $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$,
 et \mathcal{O} aura pour coordonnées :

$$(ct', x', y', z') = (m_{1,1} \cdot ct, m_{2,1} \cdot ct, m_{3,1} \cdot ct, m_{4,1} \cdot ct) \text{ pour la base associée à } \mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$$

Donc $ct' = m_{1,1} \cdot ct$: on peut donc écrire qu'en \mathcal{O}' $t = \alpha \cdot t'$ avec nécessairement $\alpha > 0$.

Si l'observateur \mathcal{O}' évalue V' en observant l'horloge sur l'observateur \mathcal{O} ,
 il obtiendra la même valeur que l'observateur \mathcal{O} puisque en faisant le même calcul il obtient :

$$V' = c \left(1 - 2 \left(\frac{\alpha \cdot t_2 - \alpha \cdot t_0}{\alpha \cdot t_4 - \alpha \cdot t_0} \right) \right) = c \left(1 - 2 \left(\frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right) = V.$$

La vitesse dans les 2 cas est collinéaire à $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$ et le sens de \vec{V} est celle de $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$ pour \mathcal{O}
 et $\overrightarrow{\mathcal{O}'\mathcal{O}}$ pour \mathcal{O}' .

On peut maintenant évaluer λ :

(N.M.J. Woodhouse. " Special Relativity " • Springer 2002 p.80)

D'après l'axiome 2 les lois de la physique étant les mêmes pour les espaces associés
 à \mathcal{O} et \mathcal{O}' la dilatation des durée sera la même que ce soit l'observateur \mathcal{O} observant \mathcal{O}'
 ou bien que ce soit l'observateur \mathcal{O}' observant \mathcal{O} puisque les situations physiques sont les mêmes,
 le modules des vitesses étant identique.

Les coordonnées spatio-temporelle de \mathcal{O}' sont représentée par le vecteur $X = {}^t(ct, x, y, z)$
 pour l'observateur \mathcal{O} , et par $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$ pour l'observateur \mathcal{O}' .

Comme $X = MX'$ on en déduit que le temps t mesuré par un observateur situé en \mathcal{O} d'une horloge
 située en \mathcal{O}' et qui indique le temps t' à un observateur situé en \mathcal{O}' vérifie $t = m_{1,1}t'$

avec $m_{1,1} > 0$ si on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps car :

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} ct' \\ m_{2,1} ct' \\ m_{3,1} ct' \\ m_{4,1} ct' \end{bmatrix}.$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en O' observe une horloge située en O qui indique un temps t pour l'observateur situé en O . L'observateur situé en O' mesure alors un temps t' . Comme $X' = M^{-1}X$ et si on pose $N = M^{-1}$ on aura $t' = n_{1,1}t$ et $n_{1,1} > 0$ comme précédemment.

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment $n_{1,1} = m_{1,1}$.

De ${}^tMGM = \lambda \cdot G$, $\lambda \neq 0$, on en déduit que ${}^tM = \lambda \cdot G \cdot M^{-1}G^{-1}$.

D'où $M^{-1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G) \Rightarrow m_{1,1} = n_{1,1} = (M^{-1})_{1,1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1}$.

Or $(G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1} = m_{1,1}$ donc $\lambda = 1$.

Les matrices M qui vérifient ${}^tMGM = G$ sont appelées matrices de Lorentz et forment un sous-groupe L du groupe $GL_n(\mathbf{R})$. En particulier $M^{-1} = G \cdot {}^tM \cdot G$ et $\det^2(M) = 1$.

Pour expliciter M dans le cas qui nous intéresse on va utiliser les 2 théorèmes suivants :

Théorème 3 : (J-M. Souriau. "Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.378, voir Annexe →)

Toute matrice M de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que : } {}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbf{R}^3}.$$

$$\text{De plus } \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & (Id_{\mathbf{R}^3-1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix}$$

Théorème 4 :

(R. Mneimé, F. Testard. "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques".

Hermann Paris 1986 • Voir annexe →)

Soit M une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice S' symétrique définie positive et O orthogonale telles que $M = OS'$.

Conséquences :

On en déduit en posant $S = OS' \cdot O \Leftrightarrow S' = {}^tOSO$ que M peut se décomposer de manière unique en $M = OS' = O({}^tOSO) = SO$.

Cela entraîne que décomposition du théorème 3 est unique :

il suffit de vérifier que $\exp(\alpha N)$ est définie positive.

αN est symétrique réelle, il existe donc une matrice U orthogonale réelle et une matrice diagonale réelle $D = (d_{i,i})$ telle que $\alpha N = {}^tUDU$.

Comme $\exp(\alpha N) = {}^tU \exp(D) U$ et $\exp(D) = (\exp(d_{i,i}))$ les valeurs propres de $\exp(\alpha N)$ sont strictement positive et $\exp(\alpha N)$ est définie positive.

De la formule $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ on en déduit que $\det(\exp(\alpha N)) = 1$

et que $\det(M) = \varepsilon \cdot \det(\Omega) = \pm 1$.

Chapitre II : Expression de la partie symétrique .

On considère maintenant un point O' qui s'éloigne d'un point O à la vitesse constante \vec{V} .

On pose $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$ où c est la vitesse de la lumière .

On considère les 2 repères \mathcal{R}_O et $\mathcal{R}_{O'}$, définis plus haut .

X étant les coordonnées d'un point P dans la base associée à \mathcal{R}_O ,

X' étant les coordonnées de ce même point P dans la base associée à $\mathcal{R}_{O'}$,

M la matrice définie par $X = M \cdot X'$ la matrice de passage de $\mathcal{R}_{O'}$ à \mathcal{R}_O ,

M est donc une matrice de Lorentz et s'écrit donc sous la forme

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1, N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix},$$

avec $X \in \mathbf{R}^3$ tel que : ${}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbf{R}^3}$. (voir théorème 3).

On va exprimer dans un premier temps $\exp(\alpha N)$ en fonction de $\vec{\beta}$.

Théorème 5 :

En reprenant les notations du théorème 3 on a , si $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$:

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ & [\gamma\vec{\beta}] & & \\ & & Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{[\gamma\vec{\beta}][{}^t\gamma\vec{\beta}]}{(1 + \gamma)} & \\ & & & \end{bmatrix} \text{ avec } [{}^t\gamma\vec{\beta}] \text{ les coordonnées de } \vec{\gamma\beta} \text{ dans } \mathcal{R}_O.$$

Démonstration : On peut donc écrire que les coordonnées de O' dans la base associée à \mathcal{B}_O sont :

$${}^tW = {}^t(ct, {}^tV_1, {}^tV_2, {}^tV_3) = ct {}^t(1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \text{ avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

et dans \mathcal{B}'_O : ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0) = ct' {}^t(1, 0, 0, 0)$ avec $W = M \cdot W'$.

On remarque d'abord que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$ donc $W = \exp(\alpha N) W'$.

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & & & sh(\alpha) {}^tX \\ & & & \\ sh(\alpha) X & & (Id_{\mathbf{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^{t'} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} t,$$

cela entraine que $t \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = t' \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix}$ et donc $t = ch(\alpha)t'$ d'où :

$$ch(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \Rightarrow ch(\alpha)\vec{\beta} = sh(\alpha)\vec{X},$$

donc $\vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = th^2(\alpha)$ puisque $\vec{X}^2 = 1$.

Remarque :

Comme $|th(\alpha)| < 1 \forall \alpha \in \mathbf{R}$, nécessairement $\|\vec{\beta}\| = \left\| \frac{\vec{V}}{c} \right\| < 1 \Leftrightarrow \|\vec{V}\| < c$
ce qui exclut toute vitesse supraluminique entre observateurs.

On pose $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Comme $1 - th^2(\alpha) = \frac{1}{ch^2(\alpha)} \Rightarrow ch^2(\alpha) = \frac{1}{1 - th^2(\alpha)} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$,

comme $ch(\alpha) \geq 1$ $\gamma = ch(\alpha)$; comme $sh^2(\alpha) = ch^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$
 $= \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \beta^2$.

En résumé on a $\gamma = ch(\alpha)$, $\gamma^2 \beta^2 = sh^2(\alpha)$, $\beta^2 = th^2(\alpha)$.

D'autre part :

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} = (\gamma - 1) = ch(\alpha) - 1$$

et $X_i X_j = \frac{(\beta_i \beta_j)}{th^2(\alpha)} = \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2}$ donc

$$(ch(\alpha) - 1)X_i X_j = \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_i \beta_j, \text{ ce qui permet d'écrire que :}$$

$$Id_{\mathbf{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X^t X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)}.$$

Comme $sh(\alpha)X_i = \frac{sh(\alpha)\beta_i}{th(\alpha)} = ch(\alpha)\beta_i = \gamma\beta_i$ d'où le résultat.

En résumé :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \right) \Omega \end{bmatrix}$$

avec ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$.

$$\text{Par la suite si on note } C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & C\Omega \end{bmatrix}.$$

Remarques :

$$(1) C[\vec{\beta}] = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \right) \vec{\beta} = \vec{\beta} + \gamma^2 \frac{[\vec{\beta}]^t [\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} = [\vec{\beta}] \left(1 + \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)} \right)$$

$$= [\vec{\beta}] \left(1 + \frac{\gamma^2 - 1}{(1+\gamma)} \right) = \gamma [\vec{\beta}].$$

(2) Si $M = M' \cdot M''$ est le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation avec :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma\beta})\Omega \\ \vec{\gamma\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma'\beta'}) \\ \vec{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma''\beta''}) \\ \vec{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

$$\text{alors } M = \begin{bmatrix} \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1) & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' + \gamma' \vec{\beta}' C'' \\ \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' + \gamma' C' \vec{\beta}'' & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma} \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \text{ et } \Omega = C^{-1} (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'').$$

En notant que $\begin{pmatrix} \vec{\beta} & \vec{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\beta} & \vec{\beta} \end{pmatrix} = \vec{\beta} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{\beta} = \vec{\beta} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{\beta}$ et que $\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta} = \gamma^2 - 1$:

$$\begin{aligned} & \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\begin{bmatrix} \vec{\gamma} \vec{\beta} & \vec{\gamma} \vec{\beta} \end{bmatrix}}{(1 + \gamma)} \right) \cdot \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) \\ &= Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} - \gamma^3 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix}}{(1 + \gamma)^2} \\ &= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)^2} (-\gamma(1 + \gamma) + \gamma^2(1 + \gamma) - \gamma(\gamma^2 - 1)) = Id_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } C^{-1} = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\begin{bmatrix} \vec{\gamma} \vec{\beta} & \vec{\gamma} \vec{\beta} \end{bmatrix}}{(1 + \gamma)} \right)^{-1} = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}, \text{ ce qui permet d'\'ecrire } \Omega$$

en fonction de $\vec{\beta}', \vec{\beta}''$:

$$\Omega = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'') \text{ avec :}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma} \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}''}{(1 + \gamma')} \text{ et } C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')}, \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1).$$

(3) La connaissance de $C^{-1} = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}$ permet d'\'evaluer Ω en fonction de M :

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \text{Consid\'erons le bloc } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{3,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$$

qui repr\'esente les composantes spatiales des vecteurs spatiaux de la base associ\'ee à \mathbf{O}' exprim\'ees

dans la base associée à \mathbf{O} .

On aura $\Omega = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}$.

(4) Si $\vec{\beta} // \vec{i}$ alors les termes non diagonaux de \mathbf{C} sont nuls,

$$\text{et un seul terme diagonal de } \mathbf{C} \text{ est différent de } 1 : 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta^2 = \frac{(1+\gamma) + \gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)}$$

$$= \frac{1 + \gamma + \gamma^2 - 1}{(1+\gamma)} = \gamma \text{ car } \gamma^2 - 1 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma^2 \beta^2.$$

(5) Comme $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$ on peut remplacer, en notant δ_j^j le symbole de Kronecker,

$$\delta_j^j + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_i \beta_j \text{ par } \delta_j^j + (\gamma - 1) \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} \text{ dans l'évaluation de } \mathbf{Id}_{\mathbf{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X^t X$$

$$\text{car } \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}.$$

(6) $\gamma \cdot (1 + \beta) = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ car :

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \Leftrightarrow \gamma \cdot \beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

$$\text{Donc } \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) = \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right);$$

et on retrouve que $\text{argth}(\beta) = \text{argcosh}(\gamma) = \alpha$ car $\gamma = \text{ch}(\alpha)$ et $\beta = \text{th}(\alpha)$.

(7) Sachant que $[\exp(\alpha N)]^{-1} = \exp(-\alpha N)$, $\gamma = \text{ch}(\alpha)$ et $\vec{\beta} = \text{th}(\alpha) \vec{X}$ il vient :

$$\left[\begin{array}{cc} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [{}^t\vec{\gamma\beta}] & \mathbf{Id}_{\mathbf{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma\beta}][\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \gamma & -{}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ -[{}^t\vec{\gamma\beta}] & \mathbf{Id}_{\mathbf{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma\beta}][\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{array} \right].$$

(8) Valeurs propres d'une matrice de Lorentz symétrique :

Tout calcul fait on a :

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(1+\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Donc les valeurs propres de Λ_0 sont $\gamma(1+\beta)$, $\gamma(1-\beta)$, 1 .

En se servant des remarques du théorème 5 on a :

$$\gamma(1+\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \text{ et donc que } \gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

De plus $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \operatorname{argth}(\beta) = \alpha$, les valeurs propres de M' peuvent s'écrire :

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right) = e^\alpha, \quad \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right) = e^{-\alpha} \text{ et } 1.$$

Plus généralement :

Calcul des valeurs et vecteurs propres de $M = \begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ & & & \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} & + & \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} :$

On remarque que :

$$\begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ & & & \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} & + & \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]][\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{\gamma^2\beta^2[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + (\gamma-1)[\vec{\beta}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ \beta[\vec{\gamma\beta}] + \gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\beta)\gamma\beta \\ (1+\beta)\gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = (1+\beta)\gamma \begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix},$$

de même :

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]([\vec{\beta}])}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + \frac{\gamma^2\beta^2[\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{\beta}] + (\gamma-1)[\vec{\beta}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\gamma\beta + \gamma\beta^2 \\ -\beta[\vec{\gamma\beta}] + \gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta-1)\gamma\beta \\ (1-\beta)\gamma[\vec{\beta}] \end{bmatrix} = (1-\beta)\gamma \begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}.$$

Le produit des 2 premières valeurs propres est $P' = (1+\beta)\gamma(1-\beta)\gamma = 1$, leur somme est $S' = 2\gamma$. Or $\det(M) = 1$ et $\text{Trace}(M) = \gamma + 3 + \gamma - 1 = 2(\gamma + 1)$.

Donc la somme des 2 autres est $S = 2$. Donc les autres racines sont égales à 1.

Si on a :

$$\begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix} \text{ alors}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma u + {}^t[\vec{\gamma\beta}][\vec{u}] \\ a[\vec{\gamma\beta}] + [\vec{u}] + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t[\vec{\gamma\beta}]]([\vec{u}])}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ [\vec{u}] \end{bmatrix}.$$

Une solution possible est $a = 0$ et tout vecteur \vec{u} tel que ${}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] = 0$.

2 vecteurs propres possibles associés à la valeur propre 1 sont $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{u} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$

avec ${}^t[\vec{\beta}][\vec{u}] = 0$, ${}^t[\vec{\beta}][\vec{v}] = 0$, ${}^t[\vec{v}][\vec{u}] = 0$. $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{u} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ sont du genre espace.

Plus généralement tout vecteur de la forme $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{w} \end{bmatrix}$ avec $\vec{w} \perp \vec{\beta}$ est invariant.

On aura l'ensemble spectral suivant associé à $M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}$:

$$\left\{ \left(\begin{bmatrix} \beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}, (1+\beta)\gamma \right), \left(\begin{bmatrix} -\beta \\ [\vec{\beta}] \end{bmatrix}, (1-\beta)\gamma \right), \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{u} \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{bmatrix}, 1 \right) \right\}$$

(9) Autres formulations :

On a vu qu'une matrice de Lorentz M sans rotation pouvait s'écrire sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \text{ c'est à dire sous forme développée :}$$

$$X = MX' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ct \\ [\vec{r}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}][{}^t\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ [\vec{r}'] \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ct = \gamma ct' + {}^t[\vec{\gamma\beta}][\vec{r}'] = \gamma(ct' + {}^t[\vec{\beta}][\vec{r}']) \\ [\vec{r}] = [\vec{r}'] + [\vec{\gamma\beta}] \left(\frac{{}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{cases}$$

On trouve dans la littérature d'autres formes par exemple :

(a) forme symétrique :

$$\begin{cases} [\vec{ct}] = [\vec{ct}'] + [\vec{\gamma\beta}] \left(\frac{{}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} ct' + [\vec{r}'] \right) \\ [\vec{r}] = [\vec{r}'] + [\vec{\gamma\beta}] \left(\frac{{}^t[\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} [\vec{r}'] + ct' \right) \end{cases}$$

Pour cela on remarque que :

$$ct = \gamma ct' + {}^t[\vec{\gamma\beta}][\vec{r}'] = ct' + (\gamma - 1)ct' + {}^t[\vec{\gamma\beta}][\vec{r}'] \text{ or}$$

$$\text{comme } \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 \text{ on a } \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)} = \gamma - 1.$$

(b) forme avec double produit vectoriel noté \mathbf{x} :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + {}^t[\vec{\beta}][r']) \\ [\vec{r}] = \gamma([\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}']) + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \left([\vec{\beta}] \times \left([\vec{\beta}] \times [\vec{r}'] \right) \right) \end{array} \right.$$

On remarque que : $\frac{(\gamma-1)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}$,

$[\vec{\beta}] \times \left([\vec{\beta}] \times [\vec{r}'] \right) = \left({}^t[\vec{\beta}][r'] \right) \cdot [\vec{\beta}] - \left({}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}] \right) \cdot [r']$ (formule du double produit vectoriel)
et que

$\left({}^t[\vec{\beta}][r'] \right) \cdot [\vec{\beta}] = [\vec{\beta}] \cdot \left({}^t[\vec{\beta}][r'] \right) = \left([\vec{\beta}] \quad {}^t[\vec{\beta}] \right) [r']$ (associativité de la composition d'applications).

On a donc :

$$\begin{aligned} & \gamma([\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}']) + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \left([\vec{\beta}] \times \left([\vec{\beta}] \times [\vec{r}'] \right) \right) \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + (\gamma-1)[r'] + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} \left(\left({}^t[\vec{\beta}][r'] \right) \cdot [\vec{\beta}] - \left({}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}] \right) \cdot [r'] \right) \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + [r'] \left((\gamma-1) - \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} {}^t[\vec{\beta}][\vec{\beta}] \right) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \left({}^t[\vec{\beta}][r'] \right) \cdot [\vec{\beta}] \\ &= \gamma[\vec{\beta}]ct' + [\vec{r}'] + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} [\vec{\beta}] \cdot \left({}^t[\vec{\beta}][r'] \right) = [r'] + [\gamma\vec{\beta}] \left(\frac{{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} [r'] + ct' \right) = [\vec{r}]. \end{aligned}$$

Chapitre III : Expression de la partie orthogonale .

Maintenant évaluons $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\Omega}$

Evaluation de $\boldsymbol{\varepsilon} = \pm 1$:

Comme

$$W = MW' = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \gamma\boldsymbol{\varepsilon} & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\varepsilon}[\vec{\gamma\beta}] & C\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} W'$$

avec ${}^tW = {}^t(ct, tV_1, tV_2, tV_3)$, ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$. On en déduit que $t = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot t'$.

Donc si $\boldsymbol{\varepsilon} = -1$, il y aurait un renversement du temps difficile à justifier physiquement .

Par la suite on suppose que $\boldsymbol{\varepsilon} = +1$.

Reste à évaluer $\boldsymbol{\Omega}$. On posera $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}$.

Remarquons tout d'abord que M est symétrique $\Leftrightarrow \boldsymbol{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^3}$

car $M = S\boldsymbol{\Omega} = M Id_{\mathbb{R}^4}$ avec S symétrique définie positive , par unicité de la décomposition $\boldsymbol{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^3}$

Evaluons d'abord directement un cas particulier :

Théorème 6 :

Dans le cas où $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ et de même sens , $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ et de même sens , $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ et de même sens ,

$$M \text{ se réduit à } \boldsymbol{\Lambda}_0 = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\boldsymbol{\beta} & 0 & 0 \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \vec{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\vec{V}}{c} , \boldsymbol{\beta} = \sqrt{\vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}} , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}} .$$

Démonstration :

Si $\vec{V} // \vec{Ox} // \vec{O'x'}$ de même sens , $\vec{Oy} // \vec{O'y'}$ de même sens , $\vec{Oz} // \vec{O'z'}$ de même sens ,

$$M \text{ s'écrit sous la forme } M = \boldsymbol{\Lambda}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \text{ avec } \boldsymbol{\Lambda}_0 = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\boldsymbol{\beta} & 0 & 0 \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

et $\Lambda_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ où Ω est une matrice orthogonale d'ordre 3,

$$\text{puisque } 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_x^2 = \frac{(1+\gamma) + \gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)} = \frac{1+\gamma+\gamma^2-1}{(1+\gamma)} = \gamma$$

$$\text{car } \gamma^2 - 1 = \frac{1}{1-\beta} - 1 = \frac{\beta}{1-\beta} = \gamma^2 \beta^2.$$

$$\text{Si } X = M \cdot X' \text{ et si } \Lambda_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \omega_{2,4} \\ 0 & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} & \omega_{3,4} \\ 0 & \omega_{4,2} & \omega_{4,3} & \omega_{4,4} \end{bmatrix}, X'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } X'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ on a :}$$

$$\Lambda_{\Omega} \Lambda_{\Omega} X'_1 = \begin{bmatrix} \gamma \beta \omega_{2,2} \\ \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{4,2} \end{bmatrix}, \Lambda_{\Omega} \Lambda_{\Omega} X'_2 = \begin{bmatrix} \gamma \beta \omega_{2,3} \\ \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda_{\Omega} \Lambda_{\Omega} X'_3 = \begin{bmatrix} \gamma \beta \omega_{2,4} \\ \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Les hypothèses impliquent que } \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,2} \\ \omega_{3,2} \\ \omega_{4,2} \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,3} \\ \omega_{3,3} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \gamma \omega_{2,4} \\ \omega_{3,4} \\ \omega_{4,4} \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où : } \Lambda_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{4,4} \end{bmatrix}$$

Comme Λ_{Ω} est orthogonal $\omega_{2,2}^2 = \omega_{3,3}^2 = \omega_{4,4}^2 = 1$.

$$D'où \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \gamma & \pm \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \pm \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \text{ les sens des axes étant conservés nécessairement } \mathbf{\Omega} = \mathbf{Id}_{\mathbf{R}^4}$$

Bases standards et bases "parallèles" :

Considérons les points \mathbf{O} et \mathbf{O}' tel que \mathbf{O}' est un mouvement rectiligne uniforme de vitesse \vec{V} dans \mathbf{R}^3 .
Munissons \mathbf{O} d'une base orthonormale directe $\mathbf{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que $\vec{i} \parallel \vec{V} \parallel \vec{OO}'$.

Considérons le plan \mathbf{P} défini par \mathbf{O} , \vec{i} et \vec{j} .

Munissons \mathbf{O}' d'une base orthonormale directe $\mathbf{B}'(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ telle que $\vec{i}' \parallel \vec{V} \parallel \vec{OO}'$ et \vec{j}' dans le plan \mathbf{P} de même direction que \vec{j} .

Hypothèse : Isotropie de l'espace.

(Voir aussi C. Semay, B. Silvestre – Brac : relativité restreinte p.105)

Nous traduisons l'hypothèse énoncée dans l'ouvrage cité ci – dessus, en l'énonçant sous forme matricielle aux bases \mathbf{B} et \mathbf{B}' .

Considérons une rotation d'axe \mathbf{OO}' définie dans la base \mathbf{B} :

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \text{ et une symétrie } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

par rapport au plan \mathbf{Oxy} (changement de l'orientation de l'axe \mathbf{Oz}).

$$\text{Appelons } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \text{ la matrice de Lorentz associée à } \mathbf{O} \text{ et } \mathbf{O}' : \mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}'$$

L'hypothèse de l'isotropie de l'espace, dans notre cas particulier, se traduit par :

$\mathbf{R}(\varphi) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}(\varphi) \cdot \mathbf{M}\mathbf{X}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}(\varphi)\mathbf{X}'$ i.e $\mathbf{R}(\varphi)\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}(\varphi)$ ou $\mathbf{M} = {}^t\mathbf{R}(\varphi) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}(\varphi) \mathbf{V} \varphi$.
et par $\mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{M}\mathbf{X}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}\mathbf{X}'$ i.e $\mathbf{S}\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}$ ou $\mathbf{M} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}$.

Si on fait une rotation d'axe \mathbf{OO}' d'angle $\varphi = \pi$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ 0 & 0 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ 0 & 0 & -\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & -m_{1,3} & -m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & -m_{2,3} & -m_{2,4} \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ -m_{4,1} & -m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Donc $M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & m_{3,4} \\ 0 & 0 & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$.

On a en faisant maintenant une rotation d'axe OO' d'angle $\varphi = \pi$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & m_{3,4} \\ 0 & 0 & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{4,4} & -m_{4,3} \\ 0 & 0 & -m_{3,4} & m_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & m_{3,4} \\ 0 & 0 & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix},$$

d'où $m_{4,4} = m_{3,3}$ et $m_{3,4} = -m_{4,3}$ et donc :

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & m_{3,4} \\ 0 & 0 & -m_{3,4} & m_{3,3} \end{bmatrix}.$$

En appliquant l'égalité : $M = S \cdot M \cdot S$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & m_{3,4} \\ 0 & 0 & -m_{3,4} & m_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & -m_{3,4} \\ 0 & 0 & m_{3,4} & m_{3,3} \end{bmatrix} \text{ et donc } m_{3,4} = 0 \text{ et,}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{3,3} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{B}'(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ont donc leur composantes parallèles 2 à 2 pour les 2 observateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' .

On peut donc appliquer le théorème 6 :

$$M = \Lambda_0 = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On appellera par la suite **bases standards** associées au mouvement relatif de \mathcal{O} et \mathcal{O}' les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' définies ci-dessus.

On peut maintenant introduire la définition suivante :

Définition : 2 bases $\mathcal{B} = (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}'_1, \vec{j}'_1, \vec{k}'_1)$ associées à \mathcal{O} et \mathcal{O}' , sont dites

(à composantes) parallèles si le même opérateur orthogonal \mathcal{Q} transforme simultanément \mathcal{B} et \mathcal{B}' en 2 bases standards associées à \mathcal{O} et \mathcal{O}' .

Théorème 7 :

Dans le cas où les 2 bases spatiales associées à \mathcal{O} et \mathcal{O}' : \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont à composantes parallèles 2 à 2

(ici \vec{V} n'est plus nécessairement parallèle à \vec{Ox}), on a $\Lambda = Id_{\mathbb{R}^4}$ et $\Lambda(\vec{\beta}) = R\Lambda_0{}^tR$ avec

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q} \end{bmatrix} \text{ où } \mathcal{Q} \text{ est l'opérateur qui transforme simultanément } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}' \text{ en 2 bases standards}$$

associées à \mathcal{O} et \mathcal{O}' .

Démonstration :

Notons \mathcal{B} et \mathcal{B}' les bases spatio-temporelles associées aux 2 bases spatiales à composantes parallèles, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 les bases spatio-temporelles associées aux 2 bases standards.

M la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

On a le schéma suivant : $\mathcal{B} \xrightarrow{M} \mathcal{B}'$,
 $R \downarrow \qquad \downarrow R$

$$\mathcal{B}_1 \xrightarrow{\Lambda_0} \mathcal{B}'_1$$

Comme $M = R\Lambda_0^t R \Leftrightarrow \Lambda_0 = {}^t R M R$ et comme M est de Lorentz, elle est de la forme $M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}$.

En lisant le schéma ci – dessus $\Lambda_0 = {}^t R M R^t = {}^t R (\Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}) R = ({}^t R \Lambda(\vec{\beta}) R) ({}^t R \hat{\Omega} R)$.

On remarque que ${}^t R \Lambda(\vec{\beta}) R$ est symétrique et que ${}^t R \hat{\Omega} R$ est orthogonal .

Comme $\Lambda_0 = \Lambda_0 \cdot Id_{\mathbb{R}^4} = ({}^t R \Lambda(\vec{\beta}) R) ({}^t R \hat{\Omega} R)$, par unicité de la décomposition

${}^t R \hat{\Omega} R = Id_{\mathbb{R}^4}$. On en déduit que $\hat{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^4}$ et que $\Lambda(\vec{\beta}) = R\Lambda_0 {}^t R$.

Comme

$${}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λ_0 est invariant par une translation autour de OO' et donc $R\Lambda_0 {}^t R$ ne dépend pas du couple de bases choisies.

Evaluation de $\hat{\Omega}$ dans le cas général :

Théorème 8 :

Considérons maintenant O et O' munis de 2 bases spatiales quelconques B et B' , Munissons O et O' de 2 bases standards B_1 et B'_1 .

On note $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ les bases spatio – temporelles correspondantes

Soit R et T les 2 opérateurs qui permettent de passer respectivement de \mathcal{B} à \mathcal{B}'

et de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}'_1 . Alors $\Lambda(\vec{\beta}) = (R\Lambda_0 {}^t T)$ et $\hat{\Omega} = R {}^t T$.

Démonstration :

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}' \\ R \downarrow & & \downarrow T \end{array} ,$$

$$\mathcal{B}_1 \xrightarrow{\Lambda_0} \mathcal{B}'_1$$

Comme $M = R\Lambda_0{}^tT \Leftrightarrow \Lambda_0 = {}^tRMT$ et comme M est de Lorentz, elle est de la forme $M = \Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega}$.

En lisant le schéma ci – dessus $\Lambda_0 = {}^tRMT = {}^tR(\Lambda(\vec{\beta}) \hat{\Omega})T = ({}^tR\Lambda(\vec{\beta})R)({}^tR\hat{\Omega}T)$.

Comme $\Lambda_0 = \Lambda_0 \cdot Id_{\mathbb{R}^4} = ({}^tR\Lambda(\vec{\beta})R)({}^tR\hat{\Omega}T)$, par unicité de la décomposition

${}^tR\hat{\Omega}T = Id_{\mathbb{R}^4}$. On en déduit que $\hat{\Omega} = R{}^tT$ et que $\Lambda(\vec{\beta}) = R\Lambda_0{}^tR$.

Comme au théorème précédent $R{}^tT$ et $R\Lambda_0{}^tR$ ne dépendent pas du couple de bases standards choisies.

Conséquence : $\hat{\Omega} = M(\vec{0})$

Les opérateurs R et T sont indépendants du module de la vitesse relative de O et O' et $\hat{\Omega}$ est donc indépendants du module de la vitesse relative de O et O' .

Comme $\lim_{\|\vec{\beta}\| \rightarrow 0} \Lambda(\vec{\beta}) = Id_{\mathbb{R}^4}$ on a $\lim_{\|\vec{\beta}\| \rightarrow 0} M(\vec{\beta}) = \hat{\Omega} = R{}^tT$.

Si la vitesse est nulle $O = O'$ indéfiniment.

On peut donc interpréter $\hat{\Omega}$ comme la matrice de passage de B à B' si la vitesse relative est nulle.

Remarque : N • M • J • Woodhouse dans **Special relativity** p.82 propose la décomposition :

$$M = \hat{H} \cdot \Lambda_0 \cdot {}^t\hat{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \cdot \Lambda_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \text{ où } H \text{ et } K \text{ sont 2 matrices orthogonales } 3 \times 3.$$

On peut alors écrire : $M = \hat{H} \cdot \Lambda_0 \cdot {}^t\hat{K} = (\hat{H} \cdot \Lambda_0 \cdot {}^t\hat{H}) \cdot (\hat{H} \cdot {}^t\hat{K}) = \Lambda \cdot \Omega$,

par unicité $\Lambda = \hat{H} \cdot \Lambda_0 \cdot {}^t\hat{H}$ et $\hat{H} \cdot {}^t\hat{K} = \Omega$.

Chapitre IV :

#Exemples numériques :

#Pour illustrer cette étude des matrices de Lorentz, on va donner plusieurs exemples numériques qui permettront de vérifier la justesse des formules données précédemment.
#Pour cela on va utiliser le logiciel Maple de Maplesoft approprié aux matrices de petites dimensions.

#Liste des exemples :

##(1) un programme qui génère de façon aléatoires des matrices de Lorentz.

##(2) Maintenant un programme qui génère 2 matrices de Lorentz symétriques et leur produit qui n'est pas symétrique.

##(3) Décomposition polaire : $M = \Lambda \cdot \Omega$.

##(4) Un programme qui donne les parties symétriques et orthogonale d'une matrice de Lorentz.

##par la formule : $C^{-1} \cdot M$

##(5) Transformation d'une matrice de Lorentz, symétrique M sous la forme $M = A \cdot \Lambda \cdot A^t$

##et d'une matrice de Lorentz, M non symétrique sous la forme $M = A \cdot \Lambda \cdot B$.

##(6) vérification de la formule :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^t \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^t$$

##(7) Vérification de

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^t \right) \cdot \beta = \gamma \cdot \beta$$

##(8) Vérification de la formule (cas du produit de 2 matrices sans rotation) :

$$\# \Omega := \left(Id - \frac{\gamma \cdot \beta \cdot \beta^t}{1+\gamma} \right) \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2^t + C1 \cdot C2)$$

#Exemples :

##(1) un programme qui génère de façon aléatoires des matrices de Lorentz :

##Cas général :

##On génère aléatoirement le vecteur β ce qui permet de construire la partie symétrique de la matrice.

##On génère aléatoirement trois vecteurs ω_1 , ω_2 et ω_3 et par la méthode de Gram — Schmidt

##on obtient un système orthonormal de 3 vecteurs ce qui permet d'avoir la partie orthonormale

##de la matrice.

##En retour on aura la matrice générale, vérification qu'elle est bien de Lorentz, la partie symétrique,

##la partie orthogonale et la vérification que cette dernière est bien orthogonale et finalement β

##On se limite à 10 chiffres significatifs.

restart :

with(RandomTools) : with(LinearAlgebra) :

randomize() :

p1 := proc()

local G, co, beta, gamma, M, Lambda, beta_x, beta_y, beta_z, Omega, GS, omega1, omega2, omega3 :

unprotect(gamma) :

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} :$$

```

co := evalf(sqrt(3)) :
beta := [
  Generate(float(range=-1..1, digits=10))
  -----
  co
  Generate(float(range=-1..1, digits=10))
  -----
  co
  Generate(float(range=-1..1, digits=10))
  -----
  co
] :
beta_x := beta[1] : beta_y := beta[2] : beta_z := beta[3] :

```

```

gamma := 1 / sqrt(1 - (beta_x^2 + beta_y^2 + beta_z^2)) :
Lambda := [
  gamma      beta_x * gamma      beta_y * gamma      beta_z * gamma
  beta_x * gamma  1 + gamma^2 / (gamma + 1) * beta_x^2  gamma^2 / (gamma + 1) * beta_x * beta_y  gamma^2 / (gamma + 1) * beta_x * beta_z
  beta_y * gamma  gamma^2 / (gamma + 1) * beta_y * beta_x  1 + gamma^2 / (gamma + 1) * beta_y^2  gamma^2 / (gamma + 1) * beta_y * beta_z
  beta_z * gamma  gamma^2 / (gamma + 1) * beta_z * beta_x  gamma^2 / (gamma + 1) * beta_z * beta_y  1 + gamma^2 / (gamma + 1) * beta_z^2
] :

```

```

omega1 := [
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
] ;

```

```

omega2 := [
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
] ;

```

```

omega3 := [
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
  Generate(float(range=-10..10, digits=10))
] ;

```

```
GS := GramSchmidt({omega1, omega2, omega3}, normalized);
```

```

Omega := [
  1      0      0      0
  0  GS[1][1]  GS[2][1]  GS[3][1]
  0  GS[1][2]  GS[2][2]  GS[3][2]
  0  GS[1][3]  GS[2][3]  GS[3][3]
] ;

```

```
M := Lambda * Omega;
```

```

return M, M%T * G * M, Lambda, Omega, Omega * Omega%T,
[
  beta_x
  beta_y
  beta_z
] ;

```

```
end proc;
```

p1();

$$\begin{bmatrix}
 1.37137909400000 & 0.0693759093241285 & -0.867398928126097 & -0.351406747366782 \\
 0.407386895800000 & 0.749462011891991 & -0.292339217513503 & -0.720283663541724 \\
 0.617131505500000 & 0.240561552388650 & -1.09680276211141 & 0.346417572003398 \\
 0.577810731800000 & -0.620684982570698 & -0.681133160210365 & -0.696184609664106
 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}
 0.99999999726752 & 1.35069122553233 \cdot 10^{-10} & -2.73939648742783 \cdot 10^{-10} & -7.82773845742213 \cdot 10^{-12} \\
 1.35069122553233 \cdot 10^{-10} & -0.99999998551066 & 1.71263558890189 \cdot 10^{-10} & -2.41488051777594 \cdot 10^{-10} \\
 -2.73939648742783 \cdot 10^{-10} & 1.71263558890189 \cdot 10^{-10} & -0.99999998495485 & -3.83972298401147 \cdot 10^{-11} \\
 -7.82773845742213 \cdot 10^{-12} & -2.41488051777594 \cdot 10^{-10} & -3.83972298401147 \cdot 10^{-11} & -0.99999998796079
 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}
 1.371379094 & 0.4073868958 & 0.6171315055 & 0.5778107318 \\
 0.4073868958 & 1.069986314 & 0.1060190203 & 0.09926397720 \\
 0.6171315055 & 0.1060190203 & 1.160603294 & 0.1503703932 \\
 0.5778107318 & 0.09926397720 & 0.1503703932 & 1.140789485
 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.7375437000 & -0.143325946099933 & -0.659914360441726 \\
 0 & 0.2225070544 & -0.871069471880707 & 0.437868228763262 \\
 0 & -0.6375891314 & -0.469782553941856 & -0.610560767365580
 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}
 1. & 0. & 0. & 0. \\
 0. & 0.99999999352344 & 2.12288964185348 \cdot 10^{-10} & 2.59283428061252 \cdot 10^{-10} \\
 0. & 2.12288964185348 \cdot 10^{-10} & 0.99999999860575 & -1.43071110514370 \cdot 10^{-10} \\
 0. & 2.59283428061252 \cdot 10^{-10} & -1.43071110514370 \cdot 10^{-10} & 0.99999999113585
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 0.2970636621 \\
 0.4500079578 \\
 0.4213355259
 \end{bmatrix}$$

#(2)Maintenant un programme qui génère 2 matrices de Lorentz symétriques et leur produit qui n'est pas symétrique :

```

p2 := proc()
local M1, M2, M;
M1 := p1()[3];
M2 := p1()[3];
M := M1 · M2;
return M1, M2, M;
end proc;
p2();

```

$$\begin{bmatrix}
 1.368682988 & 0.3848997155 & 0.7760112340 & 0.3506449710 \\
 0.3848997155 & 1.062544372 & 0.1260981333 & 0.05697813945 \\
 0.7760112340 & 0.1260981333 & 1.254231334 & 0.1148758352 \\
 0.3506449710 & 0.05697813945 & 0.1148758352 & 1.051907282
 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix}
 1.705641095 & -0.8360995954 & 0.8859238484 & 0.6521410478 \\
 -0.8360995954 & 1.258372234 & -0.2737689683 & -0.2015252013 \\
 0.8859238484 & -0.2737689683 & 1.290083214 & 0.2135343479 \\
 0.6521410478 & -0.2015252013 & 0.2135343479 & 1.157185647
 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2.92882429158172 & -0.943119770924961 & 2.18316911404290 & 1.38647374570310 \\ -0.0830210202213288 & 0.969257551838184 & 0.224944035647489 & 0.129740003136537 \\ 2.40423475039461 & -0.856664283201202 & 2.29555782999394 & 0.881410965250509 \\ 1.33819823203237 & -0.464909675392575 & 0.667863617876428 & 1.45896939303546 \end{bmatrix}$$

#(3) On considère la décomposition polaire : $M = \Lambda \cdot \Omega$ qui correspond aux changements de base

$$\#M : \mathcal{B} \xrightarrow{M} \mathcal{B}' \Leftrightarrow M : \mathcal{B} \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{B}_0 \xrightarrow{\Omega} \mathcal{B}' \Leftrightarrow X = M \cdot X'$$

#Ce qui revient à réorienter les axes $Ox'y'z'$ selon les axes $Oxyz$

#puis d'appliquer l'opérateur symétrique ad hoc dans cette situation .

Un programme qui donne les parties symétriques et orthogonale d'une matrice de Lorentz

#par la formule : $\Omega = \Lambda^{-1}M$.

En entrée on a la matrice de Lorentz considérée .

En retour on a β , les parties symétriques et orthogonale de la matrice la vérification que

Ω est bien orthogonale .

p3 := proc(M)

local $\beta, \gamma, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \Omega, \Lambda\phi inv$;

$\gamma := M[1][1]$:

$$\beta[1] := \frac{M[2][1]}{\gamma} ; \beta[2] := \frac{M[3][1]}{\gamma} ; \beta[3] := \frac{M[4][1]}{\gamma} ;$$

$$\beta_x := \beta[1] ; \beta_y := \beta[2] ; \beta_z := \beta[3] ;$$

$$\Lambda\phi inv := \begin{bmatrix} \gamma & -\beta_x \cdot \gamma & -\beta_y \cdot \gamma & -\beta_z \cdot \gamma \\ -\beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ -\beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ -\beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_z^2 \end{bmatrix} ;$$

$\Omega := \Lambda\phi inv \cdot M$:

$$\text{return } \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix}, \Lambda\phi inv, \Omega, \Omega \cdot \Omega^T ;$$

end proc :

$M := p2()$ [3];

p3(M);

$$M := \begin{bmatrix} 1.38083390331948 & 0.932012422794345 & -0.143386261535510 & -0.132270532031612 \\ 0.891753407171495 & 1.32442538856998 & -0.125725949457531 & 0.159105358690483 \\ -0.0627733200163432 & 0.0563998342199275 & 0.999893227938980 & -0.0311942286970146 \\ -0.327929322210753 & -0.333711858912975 & 0.0704708246877686 & 0.995594244327785 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.645807873798396 \\ -0.0454604423207151 \\ -0.237486435857652 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.38083390331948 & -0.891753407171495 & 0.0627733200163432 & 0.327929322210753 \\ -0.891753407171495 & 1.33401075904255 & -0.0235120652163062 & -0.122827589940295 \\ 0.0627733200163432 & -0.0235120652163062 & 1.00165508803465 & 0.00864621940118425 \\ 0.327929322210753 & -0.122827589940295 & 0.00864621940118425 & 1.04516805654341 \end{bmatrix},$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 0.99999999283068 & 4.29898894260816 \cdot 10^{-11} & -4.47618851706633 \cdot 10^{-11} & -3.12159520454713 \cdot 10^{-10} \\ 2.68530746250217 \cdot 10^{-10} & 0.975335411132845 & -0.0720198983434591 & 0.208647957072290 \\ -1.89027157641852 \cdot 10^{-11} & 0.0809733729268503 & 0.996112690509814 & -0.0346816876264137 \\ -9.87482318137722 \cdot 10^{-11} & -0.205339106119544 & 0.0507212069135954 & 0.977375675632391 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.999999998566135 & 2.48552607731753 \cdot 10^{-10} & -4.91833422936703 \cdot 10^{-11} & -4.14943236258999 \cdot 10^{-10} \\ 2.48552607731753 \cdot 10^{-10} & 0.99999999957519 & -5.79414641266318 \cdot 10^{-12} & 3.58315876969328 \cdot 10^{-10} \\ -4.91833422936703 \cdot 10^{-11} & -5.79414641266318 \cdot 10^{-12} & 0.999999998774467 & -7.61509605373689 \cdot 10^{-12} \\ -4.14943236258999 \cdot 10^{-10} & 3.58315876969328 \cdot 10^{-10} & -7.61509605373689 \cdot 10^{-12} & 1.0000000065062 \end{bmatrix}$$

#(4) Un programme qui donne les parties symétriques et orthogonale d'une matrice de Lorentz

#par la formule : $C^{-1} \cdot M = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^T \right) \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix}$

En entrée on a la matrice de Lorentz considérée .

#En retour on a la partie orthogonale Ω de la matrice M , la vérification que

Ω est bien orthogonale et que $M = \Lambda \cdot \Omega$.

p4 := proc(M)

local β , β_x , β_y , β_z , γ , Cinv, N, Λ , Ω ;

unprotect(γ);

$\gamma := M[1, 1]$;

$$\beta := \begin{bmatrix} \frac{M[2, 1]}{\gamma} \\ \frac{M[3, 1]}{\gamma} \\ \frac{M[4, 1]}{\gamma} \end{bmatrix};$$

$$Cinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^T;$$

$$N := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^T \right) \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix};$$

$$\Omega := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N[1, 1] & N[1, 2] & N[1, 3] \\ 0 & N[2, 1] & N[2, 2] & N[2, 3] \\ 0 & N[3, 1] & N[3, 2] & N[3, 3] \end{bmatrix};$$

$\beta_x := \beta[1]$: $\beta_y := \beta[2]$: $\beta_z := \beta[3]$:

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & \beta x \cdot \gamma & \beta y \cdot \gamma & \beta z \cdot \gamma \\ \beta x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta x \cdot \beta z \\ \beta y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta y \cdot \beta z \\ \beta z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z \cdot \beta y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta z^2 \end{bmatrix};$$

```
return "M=" , M, beta, Omega, Omega*Omega^T, Lambda*Omega;
end proc;
p4(M);
```

$$\text{"M="}, \begin{bmatrix} 1.62544210582349 & -0.620767627885989 & -0.531312165942930 & -0.987125611695587 \\ -0.742738427361049 & 1.16928792128352 & 0.202238837494802 & 0.378847701738497 \\ -0.498020524205100 & 0.0655819952579160 & 1.09942281087722 & 0.187063969441193 \\ -0.917811105247344 & 0.117546614876760 & 0.180725079895222 & 1.34011136198897 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0.456945482524434 \\ -0.306390810488319 \\ -0.564653211553392 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.993672557106914 & 0.0519304525664274 & 0.0995895445522121 \\ 0 & -0.0521715132503900 & 0.998638122894378 & -0.000184042385260623 \\ 0 & -0.0994634731377091 & -0.00501285935373779 & 0.995028586607148 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1.00000000003526 & -4.98607929168846 \cdot 10^{-12} & 1.02634983845107 \cdot 10^{-11} \\ 0. & -4.98607929168846 \cdot 10^{-12} & 1.00000000116444 & 1.69018843788459 \cdot 10^{-11} \\ 0. & 1.02634983845107 \cdot 10^{-11} & 1.69018843788459 \cdot 10^{-11} & 0.999999999412934 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1.62544210582349 & -0.620767627787629 & -0.531312166142487 & -0.987125611643738 \\ -0.742738427361049 & 1.16928792131431 & 0.202238837521153 & 0.378847701787455 \\ -0.498020524205100 & 0.0655819952785598 & 1.09942281089489 & 0.187063969474021 \\ -0.917811105247344 & 0.117546614914805 & 0.180725079927785 & 1.34011136204947 \end{bmatrix}$$

(4)

#(5) Transformation d'une matrice de Lorentz M symétrique sous la forme $M = A \cdot \Lambda \cdot A^t$:
 #D'abord un programme qui construit une base orthormée à partir de β :

```
p5 := proc (beta)
local Delta, c1, c2, c3, d1, d2, d3, c, d;
with(RandomTools) : with(LinearAlgebra) :
randomize() :
if Norm(beta, 2) = 0 then print("beta=0"); return .end if;
```

```
c1 := Generate(float(range=-1..1));
c2 := Generate(float(range=-1..1));
c3 := Generate(float(range=-1..1));
d1 := Generate(float(range=-1..1));
d2 := Generate(float(range=-1..1));
d3 := Generate(float(range=-1..1));
```

```
c :=  $\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$  ; d :=  $\begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{bmatrix}$  ;
```

$\Delta := \text{GramSchmidt}([\beta, c, d], \text{normalized}) :$

```
return  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta[1][1] & \Delta[2][1] & \Delta[3][1] \\ 0 & \Delta[1][2] & \Delta[2][2] & \Delta[3][2] \\ 0 & \Delta[1][3] & \Delta[2][3] & \Delta[3][3] \end{bmatrix} ;$ 
```

end proc:

#le programme final :

#On donne la matrice de Lorentz M symétrique en entrée et on obtient A, Λo et

#A · Λo · A = M, la décomposition n'est pas unique .

p6 := proc(M)

local γ, β, A, Λo :

unprotect(γ) :

#calcul de A

γ := M[1][1];

```
β :=  $\begin{bmatrix} \frac{M[2][1]}{\gamma} \\ \frac{M[3][1]}{\gamma} \\ \frac{M[4][1]}{\gamma} \end{bmatrix} ;$ 
```

A := p5(β) :

#calcul de Λo

```
Λo :=  $\begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \text{Norm}(\beta, 2) & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \text{Norm}(\beta, 2) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$ 
```

return A, Λo, A · Λo.A%T :

end proc:

#programme pour transformer une matrice de Lorentz M non symétrique sous la forme M = A · Λo · B,

#il donne A, Λo, B, A · Λo · B :

p7 := proc(M)

local γ, β, A, B, Λo, βx, βy, βz, Ω, N :

unprotect(γ) :

#calcul de A, Λo

A := p6(M)[1] : Λo := p6(M)[2] :

#calcul de Ω :

Ω := p3(M)[3];

#calcul de B:

B := A%T · Ω :

N := A · Λo · B :

return A, Λo, B, N :

end proc :

#Λ:=p2()<sub>[I];p6(Λ);
M := pI()<sub>[I];
p7(M);</sub></sub>

$$M := \begin{bmatrix} 1.14630177500000 & -0.187578579359841 & 0.456368299099120 & 0.265612520527367 \\ 0.183822213000000 & 0.394658776379304 & 0.851535493083302 & -0.391052887222597 \\ -0.463019536400000 & 0.104666235055864 & -0.576945157041309 & -0.933041454534980 \\ -0.256573697000000 & 0.931920142736560 & -0.387677203626374 & 0.216936152945549 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.328040753250266 & 0.0775274998606912 & 0.941476898823284 \\ 0 & -0.826283586795056 & -0.459507533735608 & 0.325742629317178 \\ 0 & -0.457869739758195 & 0.884783765793880 & 0.0866774968671706 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.14630177500000 & 0.560363952331461 & 0 & 0 \\ 0.560363952331461 & 1.14630177500000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000000029561 & -1.63093039073914 \cdot 10^{-10} & 5.90026638658259 \cdot 10^{-12} & -7.45295700155246 \cdot 10^{-11} \\ -7.71801484377995 \cdot 10^{-11} & -0.334744193368859 & 0.814414091589783 & 0.474000012971911 \\ -6.14795999036710 \cdot 10^{-18} & 0.807049798004479 & -0.0118824321028395 & 0.590363811326780 \\ 6.17397736510085 \cdot 10^{-17} & 0.486432880739307 & 0.580162473236776 & -0.653295153483057 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1.14630177529561 & -0.187578579403134 & 0.456368299204451 & 0.265612520588671 \\ 0.183822213042427 & 0.394658776292668 & 0.851535493202813 & -0.391052887232183 \\ -0.463019536506866 & 0.104666235532494 & -0.576945157289849 & -0.933041454418524 \\ -0.256573697059218 & 0.931920142085773 & -0.387677203752586 & 0.216936152344186 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda := \begin{bmatrix} 1.241716459 & 0.3868137862 & -0.01793713486 & 0.6260296461 \\ 0.3868137862 & 1.066745687 & -0.003095097519 & 0.1080229825 \\ -0.01793713486 & -0.003095097519 & 1.000143524 & -0.005009187556 \\ 0.6260296461 & 0.1080229825 & -0.005009187556 & 1.174827247 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5254827843 & 0.214368773706647 & -0.823355252697488 \\ 0 & -0.02436742407 & -0.963548601974385 & -0.266421320706501 \\ 0 & 0.8504552145 & -0.160062863999307 & 0.501104587495512 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.241716459 & 0.7361112442 & 0 & 0 \\ 0.7361112442 & 1.241716459 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 1.24171645900000 & 0.386813786156753 & -0.0179371348501167 & 0.626029646081973 \\ 0.386813786156753 & 1.06674568698906 & -0.00309509774445957 & 0.108022982466224 \\ -0.0179371348501167 & -0.00309509774445957 & 1.00014352415918 & -0.00500918760113681 \\ 0.626029646081973 & 0.108022982466224 & -0.00500918760113681 & 1.17482724744993 \end{bmatrix}$$

#(6) vérification de la formule : $\left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \frac{\gamma^2}{I + \gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{I + \gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T};$

unprotect(γ) : Digit = 16 :

$$\beta := pI()[6]; \gamma := \frac{I}{\sqrt{I - (\text{Norm}(\beta, 2))^2}};$$

$$\beta := \begin{bmatrix} -0.008610915414 \\ -0.3926553995 \\ -0.4894613276 \end{bmatrix}$$

$$\gamma := 1.284401838$$

(7)

$$a := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} \right)^{-1}; b := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T};$$

$$a := \begin{bmatrix} 0.999958310463802 & -0.00190103150520501 & -0.00236971503647201 \\ -0.00190103150520501 & 0.913313480710222 & -0.108058360767806 \\ -0.00236971503647200 & -0.108058360767806 & 0.865300747711506 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0.999958310463786 & -0.00190103150594011 & -0.00236971503738834 \\ -0.00190103150594011 & 0.913313480676701 & -0.108058360809590 \\ -0.00236971503738834 & -0.108058360809590 & 0.865300747659420 \end{bmatrix}$$

(8)

#(7) Vérification de $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} \right) \cdot \beta = \gamma \cdot \beta :$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} \right) \cdot \beta; \gamma \cdot \beta;$$

$$\begin{bmatrix} -0.0110598755850366 \\ -0.504327316838143 \\ -0.628665028823940 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.0110598755846041 \\ -0.504327316818424 \\ -0.628665028799360 \end{bmatrix}$$

(9)

#(8) Vérification de la formule (cas du produit de 2 matrices sans rotation)

$$\# \Omega := \left(Id - \frac{\gamma \cdot \beta \cdot \beta^{\%T}}{1+\gamma} \right) \cdot (\gamma 1 \cdot \gamma 2 \cdot \beta 1 \cdot \beta 2^{\%T} + C1 \cdot C2) :$$

unprotect(γ) :

$$Id := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$a := p1() : M1 := a[3]; \beta 1 := a[6] : \gamma 1 := \frac{1}{\sqrt{1 - (Norm(\beta 1, 2))^2}}; \gamma 1 \cdot \beta 1 =; \gamma 1 \cdot \beta 1;$$

$$a := p1() : M2 := a[3]; \beta 2 := a[6] : \gamma 2 := \frac{1}{\sqrt{1 - (Norm(\beta 2, 2))^2}}; \gamma 2 \cdot \beta 2 =; \gamma 2 \cdot \beta 2;$$

$$M := M1 \cdot M2;$$

$$\gamma := \gamma 1 \cdot \gamma 2 \cdot (\beta 1^{\%T} \cdot \beta 2 + 1); \gamma := M[1, 1];$$

$$C1 := Id + \frac{\gamma 1^2}{1+\gamma 1} \cdot \beta 1 \cdot \beta 1^{\%T};$$

$$C2 := Id + \frac{\gamma 2^2}{1+\gamma 2} \cdot \beta 2 \cdot \beta 2^{\%T};$$

$$\beta := \frac{\gamma I \cdot \beta I + C I \cdot \beta 2}{(\beta I \% T \cdot \beta 2 + I) \cdot \gamma I}; \beta f := \begin{bmatrix} \frac{M[2, I]}{M[I, I]} \\ \frac{M[3, I]}{M[I, I]} \\ \frac{M[4, I]}{M[I, I]} \\ \frac{M[I, I]}{M[I, I]} \end{bmatrix};$$

" $\gamma \cdot \beta =$ ", $\gamma \beta$;

$$"\gamma I \cdot \beta I =", \begin{bmatrix} M[2, I] \\ M[3, I] \\ M[4, I] \end{bmatrix};$$

$$C := \left(Id + \frac{\gamma^2 \cdot \beta \cdot \beta \% T}{I + \gamma} \right);$$

$$\Omega := \left(Id - \frac{\gamma \cdot \beta \cdot \beta \% T}{I + \gamma} \right) \cdot (\gamma I \cdot \gamma 2 \cdot \beta I \cdot \beta 2 \% T + C I \cdot C 2);$$

$\Omega I := p^3(M)[3];$

" $C \cdot \Omega =$ ", $C \cdot \Omega$;

"*vérification de l'orthogonalité de Ω* ", $\Omega \% T \cdot \Omega$;

$Bloc := (\gamma I \cdot \gamma 2 \cdot \beta I \cdot \beta 2 \% T + C I \cdot C 2)$; " $M =$ ", M ;

$$M I := \begin{bmatrix} 1.094952487 & -0.2539834648 & -0.2300330515 & 0.2854787980 \\ -0.2539834648 & 1.030791916 & 0.02788826564 & -0.03461028101 \\ -0.2300330515 & 0.02788826564 & 1.025258427 & -0.03134656248 \\ 0.2854787980 & -0.03461028101 & -0.03134656248 & 1.038902144 \end{bmatrix}$$

$$\gamma I := 1.094952487$$

$$\gamma I \cdot \beta I = \begin{bmatrix} -0.253983464845897 \\ -0.230033051513705 \\ 0.285478797969767 \end{bmatrix}$$

$$M 2 := \begin{bmatrix} 1.638170280 & 0.8327160307 & -0.5379022638 & 0.8371660729 \\ 0.8327160307 & 1.262839739 & -0.1697842786 & 0.2642443568 \\ -0.5379022638 & -0.1697842786 & 1.109674060 & -0.1706916074 \\ 0.8371660729 & 0.2642443568 & -0.1706916074 & 1.265656481 \end{bmatrix}$$

$$\gamma 2 := 1.638170280$$

$$\gamma 2 \cdot \beta 2 = \begin{bmatrix} 0.832716030705982 \\ -0.537902263803150 \\ 0.837166072928481 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 1.94495098291234 & 0.705536233442017 & -0.849845567264778 & 1.25012617845242 \\ 0.398313074866063 & 1.07634833098581 & -0.00153941170382430 & 0.0111895876706808 \\ -0.931341409991784 & -0.338689714120093 & 1.26205358646206 & -0.399883538410058 \\ 1.32543736156987 & 0.473861715598860 & -0.359799754262568 & 1.55009141958829 \end{bmatrix}$$

$$\gamma := 1.944950983$$

$$\gamma f := 1.94495098291234$$

$$\begin{aligned}
\beta &:= \begin{bmatrix} 0.204793374191607 \\ -0.478850838892369 \\ 0.681475971905856 \end{bmatrix} \\
\beta_f &:= \begin{bmatrix} 0.204793374416889 \\ -0.478850839005314 \\ 0.681475971998628 \end{bmatrix} \\
\gamma^* \beta &:= \begin{bmatrix} 0.398313074445852 \\ -0.931341409814088 \\ 1.32543736144917 \end{bmatrix} \\
\gamma^* \beta_1 &:= \begin{bmatrix} 0.398313074866063 \\ -0.931341409991784 \\ 1.32543736156987 \end{bmatrix} \\
\Omega &:= \begin{bmatrix} 0.980922529528066 & 0.113404640943630 & -0.157893566680858 \\ -0.115563721858629 & 0.993289735023370 & -0.00453085372986185 \\ 0.156320239142954 & 0.0226911845224586 & 0.987445741923861 \end{bmatrix} \\
\Omega_1 &:= \begin{bmatrix} 0.999999998911629 & -5.99240324028472 \cdot 10^{-10} & 1.17939602528594 \cdot 10^{-10} & 6.07358607851438 \cdot 10^{-10} \\ 1.47205275746742 \cdot 10^{-10} & 0.980922530025584 & 0.113404641007299 & -0.157893566935660 \\ -3.44197559343229 \cdot 10^{-10} & -0.115563721969872 & 0.993289734916023 & -0.00453085341501858 \\ 4.89844609319334 \cdot 10^{-10} & 0.156320239228924 & 0.0226911845669175 & 0.987445740927857 \end{bmatrix} \\
C_{\Omega} &:= \begin{bmatrix} 1.07634833046138 & -0.00153941164370804 & 0.0111895876454864 \\ -0.338689714138731 & 1.26205358651223 & -0.399883538411865 \\ 0.473861715729400 & -0.359799754263803 & 1.55009142019491 \end{bmatrix} \\
\text{"v\u00e9rification de l'orthogonalit\u00e9 de \Omega"} & \\
\begin{bmatrix} 0.99999999911268 & -1.76368924861377 \cdot 10^{-11} & 1.36538543895174 \cdot 10^{-11} \\ -1.76368924861377 \cdot 10^{-11} & 1.00000000014538 & -2.01605528363526 \cdot 10^{-10} \\ 1.36538543895174 \cdot 10^{-11} & -2.01605528363526 \cdot 10^{-10} & 1.00000000027829 \end{bmatrix} \\
Bloc &:= \begin{bmatrix} 1.07634833045804 & -0.00153941163968860 & 0.0111895876395738 \\ -0.338689714130929 & 1.26205358650283 & -0.399883538398040 \\ 0.473861715718296 & -0.359799754250428 & 1.55009142017523 \end{bmatrix} \\
M &:= \begin{bmatrix} 1.94495098291234 & 0.705536233442017 & -0.849845567264778 & 1.25012617845242 \\ 0.398313074866063 & 1.07634833098581 & -0.00153941170382430 & 0.0111895876706808 \\ -0.931341409991784 & -0.338689714120093 & 1.26205358646206 & -0.399883538410058 \\ 1.32543736156987 & 0.473861715598860 & -0.359799754262568 & 1.55009141958829 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(10)

Annexe :

Démonstration du Théorème 3 : (J-M. Souriau. "Calcul Linéaire " • PUF 1964 • p.378).

Soit $X \in \mathbf{R}^n$ tel que ${}^tXX = I$. Soit N la matrice définie par :

\mathbf{O}_{n-1} étant la matrice nulle de $\mathbf{M}_{n-1}(\mathbf{R})$,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & \mathbf{O}_{n-1} \end{bmatrix} . \text{ On a alors } \forall \alpha \in \mathbf{R} :$$

$$M = \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^tX \\ \text{sh}(\alpha) X & \left(Id_{\mathbf{R}^{n-1}} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X {}^tX \right) \end{bmatrix}$$

est une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ de Lorentz, de déterminant égal à 1 .

Démonstration :

On a $N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{O}^{n-1} & X {}^tX \end{bmatrix}$ en notant \mathbf{O}^{n-1} la colonne nulle d'ordre $n-1$,

puisque ${}^tXX = I$ et on a $N^3 = N$.

En remarquant que pour toute matrice carrée A et tout $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} , \quad \text{sh}(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} , \quad \text{ch}(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

donc $\exp(\alpha N) = Id_{\mathbf{R}^n} + \alpha N + \frac{\alpha^2 N^2}{2!} + \frac{\alpha^3 N}{3!} + \frac{\alpha^4 N^2}{4!} + \dots +$
 $+ \frac{\alpha^{2p-1} N}{(2p-1)!} + \frac{\alpha^{2p} N^2}{(2p)!} + \dots$

$$= Id_{\mathbf{R}^n} + \text{sh}(\alpha) N + (\text{ch}(\alpha) - 1) N^2 .$$

Vérifions que M est bien de Lorentz : ${}^tMGM = G$?

On remarque que M est symétrique :

$$\begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^tX \\ \text{sh}(\alpha) X & \left(Id_{\mathbf{R}^{n-1}} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X {}^tX \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbf{R}^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & -\text{sh}(\alpha) {}^tX \\ \text{sh}(\alpha) X & -\left(Id_{\mathbf{R}^{n-1}} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X {}^tX \right) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & -\text{sh}(\alpha) {}^tX \\ \text{sh}(\alpha) X & -\left(Id_{\mathbf{R}^{n-1}} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X {}^tX \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbf{R}^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ (sh(\alpha))X & (Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad . \text{Calculons } a, b, c, d.$$

$$a = ch^2(\alpha) - sh^2(\alpha) {}^tXX = 1, \text{ car } {}^tXX = 1.$$

$$\begin{aligned} b &= ch(\alpha) sh(\alpha) {}^tX - sh(\alpha) {}^tX (Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX) \\ &= ch(\alpha) sh(\alpha) {}^tX - sh(\alpha) {}^tX - sh(\alpha)(ch(\alpha) - 1) {}^tXX {}^tX \\ &= ch(\alpha) sh(\alpha) {}^tX - sh(\alpha) {}^tX - sh(\alpha)ch(\alpha) {}^tX + sh(\alpha) {}^tX = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= ch(\alpha) sh(\alpha) X - (Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX)sh(\alpha) X \\ &= ch(\alpha) sh(\alpha) X - sh(\alpha) X - sh(\alpha)(ch(\alpha) - 1)X = 0, \end{aligned}$$

$$d = sh^2(\alpha)X {}^tX - (Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX)^2 \quad \text{or :}$$

$$(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX)(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX)$$

$$= Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX + (ch(\alpha) - 1)^2 X {}^tXX {}^tX,$$

on remarque comme ${}^tXX = 1 : X ({}^tXX) {}^tX = X {}^tX$ (association du produit matriciel),

$$\text{et } (ch(\alpha) - 1)^2 = ch^2(\alpha) - 2ch(\alpha) + 1$$

$$= Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (2(ch(\alpha) - 1) + ch^2(\alpha) - 2ch(\alpha) + 1)X {}^tX$$

$$= Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch^2(\alpha) - 1)X {}^tX = Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + sh^2(\alpha)X {}^tX$$

finalement :

$$sh^2(\alpha)X {}^tX - (Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX)^2 = -Id_{\mathbb{R}^{n-1}}.$$

$$\text{Donc } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{bmatrix}$$

et M est bien de Lorentz.

Une autre démonstration possible est de calculer :

$$\begin{aligned} \exp(\alpha N)G &= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha)X & (Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & -Id_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha)X & -(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X {}^tX) \end{bmatrix} \text{ et} \end{aligned}$$

$$G \exp(-\alpha N) = \begin{bmatrix} 1 & & & {}^t\theta \\ & 0 & & \\ & & -Id_{\mathbf{R}^n-1} & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ch(\alpha) & & & -sh(\alpha) {}^tX \\ -sh(\alpha) X & & & \\ & & (Id_{\mathbf{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ch(\alpha) & & & -sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & & & \\ & & - (Id_{\mathbf{R}^n-1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) & \\ & & & \end{bmatrix}$$

donc $\exp(\alpha N) G = G \exp(-\alpha N) \Rightarrow \exp(\alpha N) G \exp(\alpha N) = G$

comme $M = \exp(\alpha N)$ est symétrique ${}^tMGM = G$ et M est de Lorentz.

Pour une troisième démonstration voir : **J.M. Souriau : Calcul linéaire.PUF.**

Montrons rapidement que $\det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$ pour $A \in M_n(\mathbf{R})$:

Considérons A comme élément de $M_n(\mathbf{C})$. A est alors trigonalisable et peut s'écrire :

$A = P^{-1}BP$ avec B triangulaire supérieur dont la diagonale est composée des valeurs propres λ_i de A .

en s'appuyant sur la définition de l'exponentielle on peut écrire : $\exp(A) = P^{-1}\exp(B)P$.

En développant $\exp(B)$ en série et en remarquant que B^k triangulaire supérieur $\forall k \geq 1$.

Alors $\exp(B)$ a pour diagonale les e^{λ_i} .

$$D'où \det(\exp(A)) = \det(\exp(B)) = \prod_i e^{\lambda_i} = e^{\sum_i \lambda_i} = e^{\text{Tr}(A)}.$$

Comme αN est de trace nulle $\det(\exp(\alpha N)) = 1$.

Lemme 2 :

Si M est une matrice de Lorentz dont la première colonne K_1 est

de la forme : $K_1 = {}^t(\alpha, 0, \dots, 0)$ alors M est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \varepsilon & {}^tQ \\ Q & \Omega \end{bmatrix} \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1, {}^tQ = (0, 0, 0), {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbf{R}^n-1} \quad (1).$$

Réciproquement toute matrice de cette forme (1) est de Lorentz.

Démonstration :

Soit $M = \begin{bmatrix} \alpha & {}^tL \\ \theta & C \end{bmatrix}$ avec $C \in M_3(\mathbf{R})$, ${}^tL = (l_1, l_2, l_3)$.

Comme $({}^tMG)M = G$ on a :

$$G = \begin{bmatrix} \alpha & \theta \\ {}^tL & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & {}^tL \\ \theta & C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^t L \\ \alpha L & L^t L - {}^t C C \end{bmatrix}$$

par identification $\alpha = \pm 1$, $L = 0$, ${}^t C C = Id_{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Si M est de la forme (1) un calcul immédiat montre que ${}^t M G M = G$.

Théorème 2 :

Toute matrice M de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$M = \exp(\alpha N) \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, N = \begin{bmatrix} 0 & {}^t X \\ X & 0 \end{bmatrix}, X \in \mathbb{R}^{n-1}$$

tel que : ${}^t X X = 1$, ${}^t \Omega \Omega = Id_{\mathbb{R}^{n-1}}$.

Démonstration :

Soit M une matrice de Lorentz $M = (m_{i,j})$ et M_1 la première colonne de M .

Si $M_1 = (m_{i,1})$ alors :

$${}^t M_1 G M_1 = m_{1,1}^2 - m_{1,2}^2 - \dots - m_{1,n}^2 = G_{1,1} = 1.$$

On peut poser ${}^t M_1 = (\beta, Y)$ avec $\beta = m_{1,1}$ et ${}^t Y = (m_{1,2}, \dots, m_{1,n})$.

On a donc $\beta^2 - {}^t Y Y = 1$ donc $|\beta| \geq 1$. On peut poser $\beta = \varepsilon \cdot \text{ch}(\alpha)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

De plus ${}^t Y Y = \beta^2 - 1 = \text{sh}^2(\alpha)$.

Si $\alpha \neq 0$ posons $X = \frac{Y}{\varepsilon \cdot \text{sh}(\alpha)}$, on a ${}^t X X = 1$.

Si $\alpha = 0$ on a ${}^t M_1 = (\varepsilon, 0, 0, 0) \dots$

Dans tous les cas ${}^t M_1 = \varepsilon(\text{ch}(\alpha), \text{sh}(\alpha)X)$ avec ${}^t X X = 1$.

d'après le lemme 1 M_1 est la première colonne de $\varepsilon \cdot \exp(\alpha N)$ avec

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^t X \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que $\exp(-\alpha N) \cdot M$ est une matrice de Lorentz puisque M et $\exp(-\alpha N)$ le sont. Calculons la première colonne K_1 de ce produit :

$$K_1 = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & (\text{sh}(\alpha)) {}^t X \\ (\text{sh}(\alpha)) X & Id_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X {}^t X \end{bmatrix} \cdot M_1$$

En remarquant que ${}^t X X = 1$, $\text{ch}^2(\alpha) - \text{sh}^2(\alpha) = 1$, et que $(Id_{\mathbb{R}^3} + (\text{ch}(\alpha) - 1) X {}^t X) \cdot X = \text{ch}(\alpha) \cdot X$

on obtient : ${}^t\mathbf{K}_1 = (\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$. On peut alors appliquer le **lemme 2** et le **théorème 2** est démontré.

Théorème :

La décomposition du théorème précédent est unique.

Démonstration :

Elle découle des résultats qui suivent :

Lemme :

Toute matrice carrée **symétrique** A d'ordre $n \geq 1$, à coefficients réels, est **diagonalisable**. De plus les sous – espaces propres de A sont orthogonaux 2 à 2.

On peut donc écrire que $A = PD^tP$ avec P matrice orthogonale, D matrice diagonale.

Démonstration : (D'après J. Grifone Algèbre Linéaire .Cépaduès éditions 2002)

On note, si $A = (a_{i,j})_{i=1, n; j=1, n}$ alors ${}^tA = (a_{j,i})_{i=1, n; j=1, n}$

et si A est symétrique ${}^tA = A$.

(a) Montrons que toute valeur propre de A est réelle.

On peut considérer A comme un opérateur de \mathbf{O}^n dans \mathbf{O}^n et

$P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A . Comme

polynôme sur \mathbf{C} , il admet au moins une racine λ , montrons

que cette racine est réelle. Soit ${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \mathbf{0}$,

le vecteur propre associé à λ .

Comme A est symétrique on a, en notant $\bar{\lambda}$ et \bar{X} les conjugués de λ et X dans \mathbf{C} :

${}^t(AX)\bar{X} = {}^tX A \bar{X}$ puisque A est symétrique. D'autre part $AX = \lambda X$ d'où :

comme A est réelle $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$, il vient ${}^t(\lambda X)\bar{X} = {}^tX \bar{\lambda}\bar{X}$ c'est à dire que :

$$\lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad \text{d'où } \lambda = \bar{\lambda}.$$

Comme $AX = \lambda X \Rightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} \Rightarrow A\bar{X} = \lambda\bar{X} \Rightarrow A(\bar{X} + X) = \lambda(\bar{X} + X)$

on peut donc associer un vecteur propre réel à λ . Ou plus simplement remarquer que

λ est aussi valeur propre de A comme opérateur de \mathbf{R}^n dans lui – même.

Cela implique que tout endomorphisme f , d'un espace vectoriel réel E de dimension n

dans lui – même, symétrique, admet au moins une valeur propre réelle λ

et un vecteur propre réel x associé : $f(x) = \lambda x$.

Rappel : f est dite symétrique si $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x \in E, \forall y \in E$ \langle, \rangle étant le produit scalaire euclidien de E .

(b) Montrons par récurrence sur n , dimension de E ,

qu'il existe une base de n vecteurs propres réels orthogonaux 2 à 2,

pour tout endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel réel E

de dimension n dans lui – même.

Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer puisque dans ce cas $f = \lambda$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang $n - 1$:

Pour tout endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel réel E

de dimension $n - 1$ dans lui – même, il existe une base de $n - 1$

vecteurs propres réels, orthogonaux 2 à 2.

Montrons qu'elle est vraie au rang n .

On vient de montrer qu'il existe λ et x valeur propre réelle et vecteur propre réel associé pour f endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel réel E de dimension n , n quelconque.

Considérons le couple (x, λ) associé à E de dimension n .

Considérons dans E , $H = (x^\perp)$ l'hyperplan orthogonal de x dans E , de dimension $n - 1$.

Montrons que f est stable sur H :

Soit y un vecteur de H : $\langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0$ donc $f(y)$ est orthogonal à x .

Soit y et z 2 vecteurs de H , comme ils sont aussi vecteurs de E on a aussi $\langle f(z), y \rangle = \langle z, f(y) \rangle$ et la restriction de f à H est aussi symétrique.

Comme H est de dimension $n - 1$, l'hypothèse de récurrence s'applique : il existe une base de vecteurs propres, dans H , pour la restriction de f à H : x_2, \dots, x_n , orthogonaux 2 à 2.

Alors x, x_2, \dots, x_n est une base de n vecteurs propres réels de f dans E :

f est diagonalisable. Comme H est orthogonal à x , alors x_2, \dots, x_n sont orthogonaux à x .

Les x, x_2, \dots, x_n , après normalisation, forment une base orthonormée de

vecteurs propres. Soit \mathcal{B} une base de E , A la matrice qui représente f dans \mathcal{B} ,

P la matrice composée de colonnes représentant successivement les composantes des

x, x_2, \dots, x_n , D la matrice diagonale composée des valeurs propres λ et λ_i associées à

x, x_2, \dots, x_n . On a donc $A = PDP^{-1}$ de plus P est une matrice orthogonale

et donc $P^{-1} = {}^tP$.

(Pour d'autres démonstrations consulter J.M. Monier Algèbre 2 Dunod 1997 par exemple).

Remarque : La propriété est fautive si les coefficients de la matrice sont des nombres

complexes. Considérons : $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Si la matrice A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice unité.

Lemme

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbf{R}

Soit f et g 2 endomorphismes symétriques de E qui commutent : $f \circ g = g \circ f$

alors il existe une même base de vecteurs propres dans laquelle f et g se diagonalisent.

Démonstration :

Puisque f et g sont symétriques ils se diagonalisent chacun dans une base orthonormée de vecteurs propres (lemme 3). Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$

les espaces propres correspondants. Montrons que E_{λ_i} est stable par g :

Soit $x \in E_{\lambda_i}$: $f(x) = \lambda_i x$ alors $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda_i g(x)$,

ou bien $g(x) = 0$ ou bien $g(x) \neq 0$ et $g(x)$ est valeur propre f

et dans les 2 cas $g(x) \in E_{\lambda_i}$ donc $g(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$.

On peut définir $g_{/E_{\lambda_i}} : E_{\lambda_i} \rightarrow E_{\lambda_i}$ tel que $g_{/E_{\lambda_i}}$ soit un endomorphisme symétrique

donc il existe une base \mathcal{B}_i orthonormée de E_{λ_i} constituée de vecteurs propres de f

qui diagonalisent $g_{/E}$ λ_i .

Comme $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i} = E$, $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$ base de E composée de vecteurs propres de f et g qui diagonalisent f et g .

Lemme :

Soit M une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice O orthogonale et S symétrique définie positive telles que $M = OS$.

Démonstration :

Existence :

tMM est une matrice symétrique définie positive car ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$,

$\det({}^tMM) = (\det(M))^2 > 0$ car $\neq 0$, M étant une matrice inversible,

de plus ${}^tX{}^tMMX = \|MX\|^2 \geq 0$ avec $\|\cdot\|$ norme euclidienne,

tMM étant symétrique, elle est diagonalisable. Si λ est une valeur propre de tMM , elle est différente de 0, M étant une matrice inversible et soit X_λ

un vecteur propre associé on et si $\lambda < 0$ on aurait $\|MX\|^2 = {}^tX_\lambda {}^tMMX_\lambda = \lambda {}^tX_\lambda X_\lambda < 0$, ce qui est impossible, donc on peut écrire :

$${}^tMM = O_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} O_1^{-1} \text{ avec } \lambda_i > 0 \text{ car } {}^tO = O^{-1}.$$

$$\text{Soit } S = O_1 \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} O_1^{-1}, S \text{ est de la forme } S = O_1 D O_1^{-1};$$

S est symétrique : ${}^tS = {}^tO_1^{-1} D {}^tO_1 = O_1 D O_1^{-1} = S$ et S est définie positive.

Soit $O = MS^{-1}$. Montrons que O est orthogonale :

On a ${}^tO = (S^{-1}){}^tM = ({}^tS)^{-1}{}^tM = S^{-1}{}^tM$. Donc :

$${}^tOO = S^{-1} ({}^tMM) S^{-1} =$$

$$\begin{matrix}
\mathbf{O}_1 & \begin{bmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\sqrt{\lambda_n})^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_1^{-1} \mathbf{O}_1 & \begin{bmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\sqrt{\lambda_n})^{-1} \end{bmatrix} & \mathbf{O}_1^{-1}
\end{matrix}$$

$= \text{Id}_{\mathbf{R}^n}$.

donc \mathbf{O} et \mathbf{S} répondent à la question.

Unicité :

Soit \mathbf{P} un polynôme tel que $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i = 1, \dots, p$

par exemple le polynôme d'interpolation de Lagrange pour la fonction sur \mathbf{R}^+ : $f(x) = \sqrt{x}$,

$$P(x) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^p \frac{(x - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} \right),$$

car $\prod_{j=1, j \neq i}^p \frac{(x - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} = 1$ si $x = \lambda_i$ et $= 0$ si $x = \lambda_j \neq \lambda_i$.

$$P({}^t \mathbf{M} \mathbf{M}) = P \left(\mathbf{O}_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{O}_1^{-1} \right)$$

$$= \mathbf{O}_1 P \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) \mathbf{O}_1^{-1} = \mathbf{S}.$$

Si $\mathbf{M} = \mathbf{O} \mathbf{S}$ alors ${}^t \mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{O}^{-1}$ et ${}^t \mathbf{M} \mathbf{M} = \mathbf{S}^2$

soit \mathbf{S}_1 une autre matrice symétrique, définie positive et \mathbf{O}_1 une autre matrice orthogonale

telle que $\mathbf{M} = \mathbf{O}_1 \mathbf{S}_1$ alors comme précédemment $\mathbf{S}_1^2 = {}^t \mathbf{M} \mathbf{M}$.

Calculons $\mathbf{S}_1 {}^t \mathbf{M} \mathbf{M} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^2 = \mathbf{S}_1^2 \mathbf{S}_1 = {}^t \mathbf{M} \mathbf{M} \mathbf{S}_1$ donc \mathbf{S}_1 commute avec ${}^t \mathbf{M} \mathbf{M}$ et

commute donc avec $P({}^tMM)$ et donc avec S . Donc S et S_1 sont diagonalisables dans une même base (**lemme 4**). Leurs valeurs propres sont positive non nulles de même carré car $S_1^2 = {}^tMM = S^2$ donc elles sont égales et $S_1 = S$ et donc $O = O_1$.

Corollaire :

Soit M une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice O orthogonale et S symétrique définie positive telles que $M = SO$.

Démonstration :

On considère $N = M^{-1} = O_N S_N$ de manière unique d'après le **lemme 3**,

S_N étant symétrique définie positive, $(S_N^{-1}) = (S_N)^{-1} = S_N^{-1}$

donc S_N^{-1} est aussi symétrique donc diagonalisable.

Soit $x \neq 0$ un vecteur de S_N^{-1} et $\lambda \neq 0$ la valeur propre associée :

on a $x = S_N \cdot S_N^{-1} \cdot x = S_N \cdot \lambda \cdot x$ et donc $S_N^{-1}x$ est vecteur propre de S_N ,

et $\mu = \frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de S_N donc $\lambda > 0$ et S_N^{-1} est symétrique définie positive.

Comme O_N étant orthogonale ${}^tO_N = O_N^{-1}$, O_N^{-1} est aussi orthogonale.

On peut donc écrire $M = S_N^{-1}O_N^{-1}$ de manière unique.

On peut aussi considérer $N = {}^tM = O_N S_N$, et donc $M = {}^tS_N {}^tO_N = S_N {}^tO_N$.

Cas où M n'est pas inversible :

On remarque tout d'abord que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $M_n(\mathbf{R})$:

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$, $\lambda_0 = \min(|\lambda_i|/\lambda_i, \text{valeur propre de } M)$ et considérons les matrices inversibles $M - \lambda Id_{\mathbf{R}^n}$, avec $0 < \lambda < \lambda_0$, qui tendent vers M lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

On peut donc considérer une suite (M_i) de matrice inversibles qui tend vers M .

D'après ce qui précède $M_i = O_i S_i$ avec O_i orthonormale et S_i symétrique.

On remarque $O_n(\mathbf{R}) = \{O \mid O \text{ orthormale}\}$ est compact dans $M_n(\mathbf{R})$:

Si $O \in O_n(\mathbf{R})$ et ρ le rayon spectral $\|O\|_2 = \rho^{\frac{1}{2}} (O^t O) = \rho^{\frac{1}{2}} (Id_{\mathbf{R}^n}) = \sqrt{n}$,

donc est borné dans $M_n(\mathbf{R})$. D'autre part soit $\Phi: M \rightarrow M^t M$ définie sur $M_n(\mathbf{R})$,

qui est une application continue dans $M_n(\mathbf{R})$ et on remarque que $\Phi^{-1}(Id_{\mathbf{R}^n}) = O_n(\mathbf{R})$

par définition même d'une matrice orthormale. Donc $O_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{R})$

et donc compact.

De la suite des (O_i) on peut donc extraire une sous-suite convergente (O_{i_k}) convergente vers la matrice O qui est orthonormale car $O_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{R})$.

On en déduit que la suite de terme général $S_{i_k} = O_{i_k} M_{i_k}$ est convergente

vers une matrice S symétrique (considérer les composantes) et

$M = OS$ avec les propriétés requises.

Puisque O est inversible le rang de S est égal au rang de M , que l'on suppose inférieur strictement à n . O n'est déterminé par M que sur $\text{Im}(S)$ d'où l'impossibilité de démontrer l'unicité.

Remarque relative aux droites d'univers : Rappel de géométrie affine :

Lemme :

Toute intersection de sous – espaces affines est un espace affine, éventuellement vide et , sinon, de direction l'intersection des directions des sous – espaces des sous – espaces considérés .

Conséquence :

L'intersection d'une droite affine \mathcal{D} et d'un hyperplan affine \mathcal{H} est un sous – espace affine de dimension au plus égale à 1 :

Soit \mathcal{D} est parallèle à \mathcal{H} soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ ou $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

Si \mathcal{D} n'est pas parallèle à \mathcal{H} $\mathcal{D} \cap \mathcal{H}$ se réduit à un point unique P .

Définitions :

On considère l'espace vectoriel réel E de dimension 4 de la relativité restreinte .

On considère les hyperplans affines $\mathcal{H}_t = \{ (ct, x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$.

Ils représentent l'espace physique de l'observateur à un instant t donné (présent absolu).

On considère les droites affines de l'espace E qu'on va partager en 2 catégories :

$C_1 = \{ \Delta_t \text{ droite affine} / \exists \mathcal{H}_t \text{ tel que } \Delta_t \subset \mathcal{H}_t \}$ et

$$C_2 = \left\{ \mathbf{D}_{\vec{V}, X_0} \text{ droite affine d'équation paramétrique : } t \begin{bmatrix} c \\ \vec{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\vec{V} \text{ étant un vecteur de dimension 3 et } X_0 = \begin{bmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \text{ un vecteur constant .}$$

Δ_t est une droite d'univers dont tout les points sont contemporains , $\mathbf{D}_{\vec{V}}$ est une droite d'univers qui représente la trajectoire d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse uniforme \vec{V} .

On a immédiatement $C_2 \cap C_2 = \emptyset$ et une droite d'univers a tous ses points contemporains ou aucun .

Considérons maintenant les différentes opérations suivantes :

$$(a) \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta \\ \gamma \cdot \beta & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \cdot \beta \cdot x \\ \gamma \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} \Rightarrow t' = \frac{\gamma \cdot \beta \cdot x}{c} \Rightarrow \frac{x'}{t'} = \frac{c \cdot \gamma \cdot x}{\gamma \cdot \beta \cdot x} \Rightarrow V' = \frac{c}{\beta} > c.$$

Cela montre qu'une droite de C_1 pour un observateur est une droite de type C_2 pour tout autre observateur non fixe ($\beta > 0$) par rapport au premier

.Les 2 sont de type "espace" et pour le deuxième observateur elle représente un mouvement supraluminique $V' = \frac{c}{\beta} > c$.

$$(b) \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta \\ \gamma \cdot \beta & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \cdot t \\ -\frac{ct}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \cdot c \cdot t \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{c \cdot t \cdot \gamma \cdot \beta}{\gamma \cdot \beta} \end{bmatrix} \Rightarrow V = -\frac{c}{\beta}.$$

Cela montre qu'une droite de C_2 représentant un mobile de vitesse $V = -\frac{c}{\beta}$ peut être vue comme une droite de type C_1 .

Conclusion :

Identifier les droites affines de l'espace vectoriel réel E de dimension 4 de la relativité restreinte aux trajectoires de mouvement rectiligne uniforme est (un peu) abusif mais vrai si on considère plusieurs observateurs non fixes les uns par rapport aux autres et des transformations linéaires : Une droite d'univers est vue comme un mouvement rectiligne uniforme par au moins l'un des observateurs.

Bibliographie :

- Annequin et Boutigny* ."Mécanique relativiste ,Exercices ". *Vuibert* 1978.
R.G. Bartle ." Modern theory of integration ". *AMS* 2001.
Berkeley (Cours de Physique vol 1) ."Mécanique". *Armand Colin* 1972.
P • Boyer ."Algèbre et Géométries " . *C&M* 2015 .
P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968 .
J. Dieudonné ."Eléments d'analyse " . *Gauthier – villars* 1969 .
F • R • Gantmacher ."Théorie des matrices " • *Edition J • Gabay* 1990.
R.Goblot ."Algèbre linéaire " *Masson* 1995 .
E.Gourgoulhon ."Relativité restreinte" • *EDP Sciences* 2010 .
J. Grifone ."Algèbre Linéaire" • *Cepadues éditions* 2002 .
J – B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec ."Exercices Algèbre linéaire". *Cepadues éditions* 1988 .
D.Langlois ."Introduction à la relativité" • *Vuibert* 2011.
J • M Lévy – Leblond • *One more derivation of the Lorentz transformation*.
American Journal of Physics, vol 44, n ° 3, March 1976 p271 – 277
J.R. Lucas , P.E. Hodgson "Spacetime and electromagnetism " . *Clarenton Press* 1990 .
R. Mneimé , F. Testard ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " . *Hermann Paris* 1986 .
J-M. Monier ."Algèbre 1 et 2". *Dunod* 1997 .
J.Ph.Pérez ." Relativité et invariance " *Dunod* 2011.
W.Rudin ."Analyse réelle et complexe " . *Masson* 1978 .
C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". *Dunod* 2010.
J-M. Souriau ."Calcul Linéaire " . *PUF* 1964 .
N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " . *Springer* 2002 .

Travaux préparatoires :

- <https://archive.org/details/version-1-a-202006/mode/2-up>
<https://archive.org/details/matricesdelorentz>
<https://archive.org/details/p-20220209-202202/mode/2-up>
<https://archive.org/details/une-nouvelle-approche-axiomatique-de-la-theorie-de-la-relativite-restreinte-docu/mode/2-up>
<https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02965773/document>

