

Addendum

- (I) Note sur l'homogénéité de l'espace temps .*
- (II) Valeurs propres pour une matrice de Lorentz
(Cas général) .*
- (III) Sur la nécessité de montrer que les vitesses relatives
des 2 observateurs sont de même module .*

(I) Note sur l'homogénéité de l'espace temps :

Si on relit l'article de J • M Lévy - Leblond : *One more derivation of the Lorentz transformation ; American Journal of physics* , vol 44 , n° 3 , march 1976, http://o.castera.free.fr/pdf/One_more_derivation.pdf , (et repris dans de nombreux autres articles) où est traduit l'homogénéité de l'espace temps par : "We assume first that space-time is homogeneous in that it has "everywhere and every time" the same properties • More precisely , the transformation properties of a spatiotemporal interval $(\Delta x, \Delta t)$ depend only on that interval and not on the location of its end points (in the considered reference frame) • In other words the transformed interval $(\Delta x', \Delta t')$ obtained through an inertial transformation is independent of these end points". Cet auteur écrit plus loin que T est supposé être un élément d'un groupe de transformation donc bijective .

La transformation T considérée par J • M Lévy - Leblond est supposée plus loin différentiable . On voit qu'il est fait implicitement l'hypothèse que tout intervalle spatio - temporel est transformé en intervalle spatio - temporel , hypothèse équivalente à ce que toute droite d'univers est transformée en droite d'univers :

Lemme 1 :

Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} • T une application de E dans E bijective alors on a les équivalences : T transforme 3 points alignés en 3 points alignés $\Leftrightarrow T$ transforme tout segment en segment $\Leftrightarrow T$ transforme toute droite en droite .

Démonstration :

Si T bijective transforme 3 points alignés en 3 points alignés alors T est affine (Voir document précédent).

Si on écrit $T(X) = A(X) + B$ avec A application linéaire et B un vecteur constant , on a $T(\lambda X + (1 - \lambda) Y) = A(\lambda X + (1 - \lambda) Y) + B = \lambda(A(X) + B) + (1 - \lambda) \cdot (A(Y) + B) = \lambda T(X) + (1 - \lambda) T(Y)$ donc T transforme tout segment en segment idem pour les droites .

Réciproquement considérons 3 points alignés ,

ils appartiennent donc à une droite D ou à un segment S ,

l'image de ces 3 points par T appartiennent soit à la droite $T(D)$ soit au segment $T(S)$, ils sont donc alignés .

La dernière partie de la citation peut se traduire par :

Soit \overrightarrow{AB} un bipoint de l'espace - temps , A de coordonnées a , B de coordonnées b ,

\overrightarrow{H} un vecteur de ce même espace de coordonnées h , O étant l'origine ;

définissons C de coordonnées c et D de coordonnées d par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{H}$.

On peut donc traduire la dernière partie de la citation par :

$\forall A, \forall B, \forall H, T(A)T(B) = T(C)T(D)$ ce qui se traduit par :

$\forall (a, b, h) \quad T(a) - T(b) = T(a + h) - T(b + h)$.

Or cette propriété est équivalente à la Q -affinité de T et donc ici à son affinité par les résultats suivants :

Lemme 2 :

Soient E et F 2 espaces vectoriels sur \mathbf{R} , f une application de E dans F .

Si f est additive $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in E, \forall y \in E$ alors elle est Q - linéaire .

Démonstration :

Si f est additive $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = f(0)$ donc $f(0) = 0$,

donc $f(0 \cdot x) = 0$. Supposons que $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ avec $n \in \mathbf{N}$

$f((n + 1) \cdot x) = f(n \cdot x + x) = f(n \cdot x) + f(x) = (n + 1)f(x)$.

donc par récurrence $\forall n \in \mathbf{N} \quad f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$.

Soit p et q 2 entiers naturels avec $p \neq 0$.

$$\text{On a } f\left(\left(p \cdot \frac{q}{p}\right) \cdot x\right) = p \cdot f\left(\left(\frac{q}{p}\right) \cdot x\right) \text{ et } \frac{1}{p} \cdot f(q \cdot x) = f\left(\left(\frac{q}{p}\right) \cdot x\right) = \frac{q}{p} \cdot f(x).$$

Lemme 3 :

Soient E et F 2 espaces vectoriels sur \mathbf{R} , f une application de E dans F ,

Si f est \mathbf{Q} – linéaire alors :

f est continue $\Rightarrow f$ est \mathbf{R} – linéaire.

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, on sait que $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n$ avec $\lambda^n \in \mathbf{Q} \forall n$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } f(\lambda \cdot x) &= f\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n\right) \cdot x\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lambda^n \cdot x) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n\right) \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

Théorème 1 :

Soient E et F 2 espaces vectoriels sur \mathbf{R} , f une application de E dans F .

On a l'équivalence :

$$\forall (t, a, b) \in E^3 \quad f(a) - f(b) = f(a+t) - f(b+t) \Leftrightarrow f \text{ est } \mathbf{Q}\text{-affine.}$$

Démonstration :

$$\text{On a } \forall (t, a, b) \in E^3 \quad f(a+t) - f(a) = f(b+t) - f(b),$$

$$\text{en particulier si } b=0 \quad f(a+t) - f(a) = f(t) - f(0) \quad (1)$$

$$\text{Posons } g(t) = f(t) - f(0) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + f(0).$$

$$\text{De (1) } f(a+t) - [f(a) + f(t)] = -f(0)$$

$$\text{donc } (g(a+t) + f(0)) - [(g(a) + f(0)) + (g(t) + f(0))] = -f(0),$$

$$\text{et } g(a+t) - [g(a) + g(t)] = 0,$$

donc g est additive, donc \mathbf{Q} – linéaire et f est \mathbf{Q} – affine.

Réciproquement si f est \mathbf{Q} – affine, $g(t) = f(t) - f(0)$ est \mathbf{Q} – linéaire

donc additive et $g(a+t) - g(b+t) = g(a) - g(b)$ d'où :

$$(g(a+t) + f(0)) - (g(b+t) + f(0)) = (g(a) + f(0)) - (g(b) + f(0)) \text{ et}$$

$$f(a+t) - f(b+t) = f(a) - f(b).$$

Si f est différentiable la preuve est immédiate :

Théorème 2 :

Soient E et F 2 espaces vectoriels sur \mathbf{R} ,

f une application différentiable de E dans F .

On a l'équivalence :

$$\forall (t, a, b) \in E^3 \quad f(a) - f(b) = f(a+t) - f(b+t) \Leftrightarrow f \text{ est } \mathbf{R}\text{-affine.}$$

Démonstration :

$$\text{Soit } \lambda > 0 : \text{ on a } \frac{f(a) - f(a + \lambda t)}{\lambda} = \frac{f(b) - f(b + \lambda t)}{\lambda}.$$

La fonction étant différentiable, en faisant $\lambda \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$\forall (t, a, b) \in E^3 \quad \frac{\partial}{\partial t} f(a) = \frac{\partial}{\partial t} f(b) \Rightarrow f' \text{ est constante}$$

et donc f est affine.

La réciproque est immédiate .

**(II) Valeurs propres pour une matrice de Lorentz
(Cas général)**

On démontre plus généralement que toute matrice de Lorentz M a au moins une valeur propre α réelle associée à une direction propre isotrope (E.ourgoulhon, relativité restreinte, EDP Sciences p.183).

Le polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$ de M se factorise alors en $\chi(\lambda) = (\lambda - \alpha)Q(\lambda)$ où Q est un polynôme du 3^{ème} degré et donc M a au moins 2 valeurs propres réelles.

La matrice de Lorentz :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$
 montre que 2 (valeurs propres réelles)

est une valeur maximale dans le cas général. En outre, dans cet exemple, on peut remarquer que :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ vecteur "temps", } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ vecteur "espace" et } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ vecteur lumière sont associés à}$$

la valeur propre 1.

Toujours dans le cas général, si une valeur propre λ est associée à un vecteur propre non isotrope X , alors $\lambda = \pm 1$ car si $MX = \lambda X \Leftrightarrow {}^tX^tM = \lambda^tX$ on a, comme ${}^tX^tMGMX = {}^tX GX$ car M est de Lorentz, et on a aussi ${}^tX^tMGMX = \lambda^2({}^tX GX)$.

(III) Sur la nécessité de montrer que les vitesses relatives des 2 observateurs sont de même module .

Dans l'article de J.M Lévy – Leblond : One more derivation of the Lorentz transformation ; American Journal of physics , vol 44 , n° 3, march 1976, http://o.castera.free.fr/pdf/One_more_derivation.pdf, 3eme page dans le chapitre : "hypothesis 2:isotropy of space" l'auteur affirme :

"...Such a natural result ,expressing the relative velocity of the "reversed" reference frames as the opposite of the relative frames might have been taken for granted .It is satisfying , however ,to derive from first principles. ..."

Ce fait , qui est évident (c'est à dire immédiatement démontrable) avec la transformation de Galilée ne l'est plus avec la transformation de Lorentz .

Peu d'articles ou de livres consacrés à ce sujet insiste sur cette difficulté , excepté peut – être le livre de C. Semay , B. Sylvestre – Brac : Relativité restreinte , Dunod, p108 ligne 2.

