

*Expression du produit de 2 matrices de Lorentz
dans le cas général .*

A • Guimier

Expression du produit de 2 matrices de Lorentz dans le cas général :

Résumé :

Soit 2 matrices de Lorentz $M' = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Omega'$ et $M'' = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Omega''$ on donne l'expression algébrique du produit $M = M' \cdot M''$ en fonction de $\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \Omega', \Omega''$.

Un exemple numérique est traité pour illustrer la formule démontrée.

On a vu précédemment que le produit de 2 matrices symétriques de Lorentz est donné par les formules suivantes :

Si $M = M' \cdot M''$ est le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation avec :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma\beta})\Omega \\ \vec{\gamma\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma'\beta'}) \\ \vec{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma''\beta''}) \\ \vec{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

$$\text{alors } \vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma\beta'} + C'\vec{\beta''}}{\gamma'(\vec{\beta}'\vec{\beta}'' + 1)} \text{ et}$$

$$\Omega = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}}{(1+\gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'') \text{ avec :}$$

$$C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma)}, C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')}, \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1).$$

Considérons maintenant le produit M de 2 matrices de Lorentz quelconques M' et M'' avec

$$M = M' \cdot M'', M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma\beta})\Omega \\ \vec{\gamma\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma'\beta'})\Omega' \\ \vec{\gamma'\beta'} & C'\Omega' \end{bmatrix},$$

$$M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma''\beta''})\Omega'' \\ \vec{\gamma''\beta''} & C''\Omega'' \end{bmatrix}, C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} \text{ et } C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')}.$$

En faisant le produit on voit immédiatement que $\gamma = \gamma' \cdot \gamma'' \cdot ({}^t\vec{\beta}' \cdot \Omega' \cdot \vec{\beta}'' + 1)$ et que

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma'\beta'} + C'\Omega'\vec{\beta}''}{\gamma'({}^t\vec{\beta}'\Omega'\vec{\beta}'' + 1)}.$$

Nous allons calculer $\hat{\Omega}$ • Pour cela remarquons que :

Si A est une matrice orthogonale et $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix}$, une matrice orthogonale de Lorentz et

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ & [\gamma\vec{\beta}] & & \\ & & Id_{\mathbb{R}^3} & \\ & & & \frac{[\gamma\vec{\beta}][{}^t[\gamma\vec{\beta}]]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix}, \text{ on a :}$$

${}^t(\hat{A}) \cdot \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{A} = \Lambda({}^t A \vec{\beta})$: il suffit de faire le produit matriciel .

On remarque en particulier si on note $\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega \end{bmatrix}$:

$$\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{\Omega} = \hat{\Omega} ({}^t \hat{\Omega} \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{\Omega}) = \hat{\Omega} \Lambda({}^t \Omega \vec{\beta}) .$$

Maintenant revenons au produit M :

$$M = M' \cdot M'' = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \hat{\Omega}'' = \hat{\Omega}' \cdot \Lambda({}^t \Omega' \vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \hat{\Omega}''$$

or on sait faire le produit des 2 matrices symétriques de Lorentz $\Lambda({}^t \Omega' \vec{\beta}')$ et $\Lambda(\vec{\beta}'')$

en reprenant les formules du début du paragraphe en remplaçant $\vec{\beta}'$ par ${}^t \Omega' \vec{\beta}'$,
 $\vec{\beta}''$ par $\vec{\beta}''$ et Ω par Ω'' :

$$\vec{\beta}''' = \frac{\gamma' ({}^t \Omega' \vec{\beta}') + C' \vec{\beta}''}{\gamma' ({}^t \Omega' \vec{\beta}') \cdot \vec{\beta}'' + 1}$$

$$\Omega''' = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma''' \frac{\vec{\beta}''' \cdot {}^t \vec{\beta}''}{(1 + \gamma''')} \right) (\gamma' \gamma'' ({}^t \Omega' \vec{\beta}') \cdot \vec{\beta}'' + C' C'')$$

avec :

$$C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 ({}^t \Omega' \vec{\beta}') ({}^t \Omega' \vec{\beta}')}{(1 + \gamma')} , C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} , \gamma''' = \gamma' \gamma'' ({}^t \Omega' \vec{\beta}') \cdot \vec{\beta}'' + 1$$

puisque $\gamma(\vec{\beta}') = \gamma({}^t \Omega' \vec{\beta}')$.

Et écrire :

$$\Lambda({}^t \Omega' \vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') \text{ sous la forme } \Lambda({}^t \Omega' \vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}''' .$$

D'où :

$$M = \hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' = \hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot ({}^t \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}') \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' = (\hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot {}^t \hat{\Omega}') \cdot \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' \\ = \Lambda(\Omega' \vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' \text{ et donc } \hat{\Omega} = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' \text{ par unicité et } M = \Lambda(\Omega' \vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega} .$$

#Programme de vérification

#On donne un exemple illustrant la formule démontrée .

*#Au préalable on donne des programmes qui nous seront utile par la suite
restart :*

$$Id \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{unprotect}(\gamma) :$$

$$f \equiv \text{proc}(m)$$

$$\text{return} \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} :$$

end proc:

h \equiv *proc*(*m*)

$$\text{return} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} :$$

end proc :

g \equiv *proc*(***β***)

local ***γ***, ***β_x***, ***β_y***, ***β_z*** :

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{0T} \cdot \beta}} : \beta_x \equiv \beta[1] : \beta_y \equiv \beta[2] : \beta_z \equiv \beta[3] :$$

$$\text{return} \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \cdot \gamma & \beta_y \cdot \gamma & \beta_z \cdot \gamma \\ \beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ \beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ \beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z^2 \end{bmatrix} :$$

end proc:

#Un proramme qui génère de façon aléatoires des matrices de Lorentz :

#Cas général :

*#On génère aléatoirement le vecteur **β** ce qui permet de construire la partie symétrique de la matrice .*

*#On génère aléatoirement trois vecteurs **ω₁**, **ω₂** et **ω₃** et par la méthode de Gram — Schmidt*

*#on obtient un système ortonormal de 3 vecteurs ce qui permet d'avoir la partie ortonormale
#de la matrice .*

#En retour on aura la matrice générale, vérification qu'elle est bien de Lorentz, la partie symétrique,

*#la partie orthogonale et la vérification que cette dernière est bien orthogonale et finalement **β***

#On se limite à 10 chiffres significatifs .

with(RandomTools) : with(LinearAlgebra) :

randomize() :

p1 ==proc()

local G, co, β , γ , M, Λ , β_x , β_y , β_z , Ω , GS, ω_1 , ω_2 , ω_3 :

unprotect(γ) :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} :$$

co == evalf($\sqrt{3}$) :

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{\text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-1..1, \text{digits} = 10))}{co} \\ \frac{\text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-1..1, \text{digits} = 10))}{co} \\ \frac{\text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-1..1, \text{digits} = 10))}{co} \end{bmatrix} :$$

$\beta_x = \beta[1]$: $\beta_y = \beta[2]$: $\beta_z = \beta[3]$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2)}} :$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \cdot \gamma & \beta_y \cdot \gamma & \beta_z \cdot \gamma \\ \beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ \beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ \beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z^2 \end{bmatrix} :$$

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \end{bmatrix} ;$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \end{bmatrix} ;$$

$$\omega_3 = \begin{bmatrix} \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits} = 10)) \end{bmatrix} ;$$

GS == GramSchmidt({ ω_1 , ω_2 , ω_3 }, normalized) ;

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS[1][1] & GS[2][1] & GS[3][1] \\ 0 & GS[1][2] & GS[2][2] & GS[3][2] \\ 0 & GS[1][3] & GS[2][3] & GS[3][3] \end{bmatrix} ;$$

M == $\Lambda \cdot \Omega$:

return $M, M^{%T} \cdot G \cdot M, \Lambda, \Omega, \Omega \cdot \Omega^{%T}, \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} :$

end proc:

#Un programme qui donne les parties symétriques et orthogonale d'une matrice de Lorentz

#par la formule : $C^{-1} \cdot M = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{%T} \right) \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix}$

En entrée on a la matrice de Lorentz considérée.

#En retour on a la partie orthogonale Ω de la matrice M , la vérification que

Ω est bien orthogonale et que $M = \Lambda \cdot \Omega$.

p4 :=proc(M)

local $\beta, \beta_x, \beta_y, \beta_z, \gamma$ Cinv, N, $\Lambda, \Omega :$

unprotect(γ) :

$\gamma = M[1, 1] :$

$\beta = \begin{bmatrix} \frac{M[2, 1]}{\gamma} \\ \frac{M[3, 1]}{\gamma} \\ \frac{M[4, 1]}{\gamma} \end{bmatrix} :$

$Cinv = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{%T} :$

$N = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{%T} \right) \cdot \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix} :$

$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N[1, 1] & N[1, 2] & N[1, 3] \\ 0 & N[2, 1] & N[2, 2] & N[2, 3] \\ 0 & N[3, 1] & N[3, 2] & N[3, 3] \end{bmatrix} :$

$\beta_x = \beta[1] : \beta_y = \beta[2] : \beta_z = \beta[3] :$

$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \cdot \gamma & \beta_y \cdot \gamma & \beta_z \cdot \gamma \\ \beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ \beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ \beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z^2 \end{bmatrix} ;$

return "M=", M, $\beta, \Omega, \Omega^{%T}, \Lambda :$

end proc:

#Donnée de $M1$ et $M2$ et $M = M1 \cdot M2$

$$a := p1() : M1 := a[1]; \beta1 := a[6]; \Omega1 := a[4]; \gamma1 := M1[1][1];$$

$$a := p1() : M2 := a[1]; \beta2 := a[6]; \Omega2 := a[4]; \gamma2 := M2[1][1];$$

$$M := M1 \cdot M2;$$

#Calcul des paramètres de M selon 2 manières :

$$\gamma := \gamma1 \cdot \gamma2 \cdot (\beta1^{ \%T} \cdot f(\Omega1) \cdot \beta2 + 1); \gamma_v := M[1, 1];$$

$$C1 := Id + \frac{\gamma1^2}{1 + \gamma1} \cdot \beta1 \cdot \beta1^{ \%T};$$

$$C2 := Id + \frac{\gamma2^2}{1 + \gamma2} \cdot \beta2 \cdot \beta2^{ \%T};$$

$$\beta = \frac{\gamma1 \cdot \beta1 + C1 \cdot f(\Omega1) \cdot \beta2}{(\beta1^{ \%T} \cdot f(\Omega1) \cdot \beta2 + 1) \cdot \gamma1}; \beta_v = \begin{bmatrix} \frac{M[2, 1]}{M[1, 1]} \\ \frac{M[3, 1]}{M[1, 1]} \\ \frac{M[4, 1]}{M[1, 1]} \end{bmatrix};$$

Calcul du produit intermédiaire

$$C1 = \left(Id + \frac{\gamma1^2 \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1)^{ \%T}}{1 + \gamma1} \right); C2 = Id + \frac{\gamma2^2}{1 + \gamma2} \cdot \beta2 \cdot \beta2^{ \%T};$$

$$\beta3 = \frac{\gamma1 \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) + C1 \cdot \beta2}{\gamma1 \cdot ((f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot \beta2 + 1)};$$

$$\gamma3 = \gamma1 \cdot \gamma2 \cdot \left((f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot \beta2 + 1 \right); \gamma3_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta3^{ \%T} \cdot \beta3}};$$

$$\Omega3 = \left(Id - \frac{\gamma3 \cdot (\beta3 \cdot \beta3^{ \%T})}{1 + \gamma3} \right) \cdot (\gamma1 \cdot \gamma2 \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot \beta2^{ \%T} + C1 \cdot C2);$$

#Calcul de Ω

$$\Omega := f(\Omega1) \cdot \Omega3 \cdot f(\Omega2);$$

#Vérification de l'orthogonalité de Ω :

$$\Omega \cdot \Omega^{ \%T};$$

#Vérification avec un autre programme :

$$\Omega_v := f(p4(M)[4]);$$

#Calcul de Λ

$$\Lambda := g(f(\Omega1) \cdot \beta3);$$

#Vérification avec un autre programme :

$$\Lambda_v := p4(M)[6];$$

#Vérification ultime :

$$\Lambda = g(f(\Omega) \cdot \beta); Mf = \Lambda \cdot h(\Omega); Mv = M;$$

$$M1 = \begin{bmatrix} 1.67468551100000 & -0.786693928656870 & 0.152452215757818 & -1.07816628862018 \\ 0.847421806900000 & -0.262286367684665 & 0.788973259660187 & -1.01333645718720 \\ 0.543319685500000 & 0.0222809515380425 & -0.627838230770929 & -0.948956793240696 \\ -0.889523221600000 & 1.24482800374528 & 0.0811297070426241 & 0.484843041413859 \end{bmatrix}$$

$$M2 = \begin{bmatrix} 1.17560683700000 & 0.429704069249763 & 0.368763942601609 & -0.247828572708692 \\ -0.109397508100000 & 0.0281109462715493 & -0.795176919184823 & -0.615525188553972 \\ 0.159600840600000 & -0.453459541284826 & 0.557939415794519 & -0.713127256086562 \\ 0.587035937400000 & 0.989055006419444 & 0.438616143292397 & -0.417129788916830 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & -0.437992209308167 & 0.855282447038959 & 0.410212454925417 \\ 0.555984223454041 & -1.00324546777367 & 0.516796223221964 & -0.188516984260923 \\ -0.0209823936898763 & -0.419778212709573 & -0.583884053574633 & 0.695202072552982 \\ -0.884342003856170 & 0.0955089428148110 & -1.05995714088802 & -0.805872002215380 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = 1.44624323570801$$

$$\gamma v = 1.44624323586195$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0.384433413161911 \\ -0.0145082053021837 \\ -0.611475291378323 \end{bmatrix}$$

$$\beta v = \begin{bmatrix} 0.384433413182174 \\ -0.0145082052379460 \\ -0.611475291242492 \end{bmatrix}$$

$$C1 = \begin{bmatrix} 1.23138695552407 & -0.0448401249527581 & 0.317116487093209 \\ -0.0448401249527581 & 1.00868949937660 & -0.0614535200293941 \\ 0.317116487093209 & -0.0614535200293941 & 1.43460905632545 \end{bmatrix}$$

$$C2 = \begin{bmatrix} 1.00550090878963 & -0.00802531686643268 & -0.0295183245490957 \\ -0.00802531686643268 & 1.01170819464013 & 0.0430645038723615 \\ -0.0295183245490957 & 0.0430645038723615 & 1.15839773344865 \end{bmatrix}$$

$$\gamma \beta = 1.44624323570801$$

$$\gamma \beta v = 1.446243236$$

$$\Omega \beta = \begin{bmatrix} 0.975554098856391 & -0.0298585577336796 & -0.217721534445259 \\ 0.0511654485505307 & 0.994360729876032 & 0.0928915267173489 \\ 0.213720136800983 & -0.101760529573219 & 0.971580412367140 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -0.903698229747633 & 0.322406907778476 & -0.281750416398464 \\ -0.423535045291322 & -0.576547958669593 & 0.698720626762929 \\ -0.0628297304816074 & -0.750763769356264 & -0.657575994735920 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_v = \begin{bmatrix} 1.00000000177299 & -1.41145609960312 \cdot 10^{-9} & 1.19196244275352 \cdot 10^{-9} \\ -1.41145609960312 \cdot 10^{-9} & 0.999999997499976 & 2.24473740573059 \cdot 10^{-10} \\ 1.19196244275352 \cdot 10^{-9} & 2.24473685061907 \cdot 10^{-10} & 1.00000000126335 \\ -0.903698229395731 & 0.322406908116973 & -0.281750416658580 \\ -0.423535044753133 & -0.576547958472331 & 0.698720626679344 \\ -0.0628297303917543 & -0.750763769572174 & -0.657575994964109 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1.446243236 & 0.555984223336941 & -0.0209823939197258 & -0.884342004369736 \\ 0.555984223336941 & 1.12636456265454 & -0.00476889616615003 & -0.200993995744189 \\ -0.0209823939197258 & -0.00476889616615003 & 1.00017997427574 & 0.00758535047791896 \\ -0.884342004369736 & -0.200993995744189 & 0.00758535047791896 & 1.31969869935496 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_v = \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & 0.555984223454041 & -0.0209823936898763 & -0.884342003856171 \\ 0.555984223454041 & 1.12636456268866 & -0.00476889611419295 & -0.200993995639406 \\ -0.0209823936898763 & -0.00476889611419295 & 1.00017997427177 & 0.00758535038927398 \\ -0.884342003856171 & -0.200993995639406 & 0.00758535038927398 & 1.31969869893530 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1.446243236 & 0.555984223336941 & -0.0209823939197258 & -0.884342004369736 \\ 0.555984223336941 & 1.12636456265454 & -0.00476889616615003 & -0.200993995744189 \\ -0.0209823939197258 & -0.00476889616615003 & 1.00017997427574 & 0.00758535047791896 \\ -0.884342004369736 & -0.200993995744189 & 0.00758535047791896 & 1.31969869935496 \end{bmatrix}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 1.44624323600000 & -0.437992209449980 & 0.855282447202797 & 0.410212455343449 \\ 0.555984223336941 & -1.00324546808663 & 0.516796222889292 & -0.188516983975137 \\ -0.0209823939197258 & -0.419778213207286 & -0.583884053854022 & 0.695202072596314 \\ -0.884342004369736 & 0.0955089427883110 & -1.05995714092605 & -0.805872002145374 \end{bmatrix}$$

$$M_v = \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & -0.437992209308167 & 0.855282447038959 & 0.410212454925417 \\ 0.555984223454041 & -1.00324546777367 & 0.516796223221964 & -0.188516984260923 \\ -0.0209823936898763 & -0.419778212709573 & -0.583884053574633 & 0.695202072552982 \\ -0.884342003856170 & 0.0955089428148110 & -1.05995714088802 & -0.805872002215380 \end{bmatrix}$$

(1)

