

*Etude du produit des matrices de Lorentz sans  
rotation :  
Condition nécessaire et suffisante de commutativité.*

*A • Guimier*

## Etude du produit des matrices de Lorentz sans rotation :

### Commutativité

#### Théorème 1 :

Si le produit  $M$  de 2 matrices de Lorentz  $\Lambda(\vec{\beta}')$  et  $\Lambda(\vec{\beta}'')$  sans rotation de paramètre  $\vec{\beta}' \neq \vec{0}$  et  $\vec{\beta}'' \neq \vec{0}$  vérifient  $M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$  alors  $\vec{\beta}'$  et  $\vec{\beta}''$  sont colinéaires et réciproquement. Dans les 2 cas  $M$  est sans rotation.

#### Démonstration :

Commençons par la réciproque :

Posons  $\vec{\beta} = \vec{\beta}'$  et  $\lambda \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta}''$  avec  $\lambda \neq 0$ .

On rappelle les résultats suivants :

(1) (Voir par exemple J-M. Souriau. "Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.273)

Si  $A$  et  $B$  sont 2 matrices carrées de même format qui commutent alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(B) \cdot \exp(A).$$

(2) (J-M. Souriau. "Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.378 )

Toute matrice  $M$  de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que : } {}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbf{R}^3}.$$

$$\text{De plus } \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) {}^tX \\ \text{sh}(\alpha) X & (Id_{\mathbf{R}^3} - 1 + (\text{ch}(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix}.$$

On rappelle que la décomposition d'une matrice inversible en un produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale est unique.

(3) dans <https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02965773/document> p.46

on démontre que  $\vec{\beta} = th \alpha \cdot \vec{X}$ ,  $\gamma = \text{ch}(\alpha)$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}}$ ,

d'où  $\alpha = \text{Argch}(\gamma)$  et  $\vec{X} = \frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}$  car  ${}^tXX = 1$  et donc  ${}^t\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = th^2 \alpha$ .

$$\text{si on pose } A = \text{Argch}(\gamma) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|} \\ \frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \text{Argch}(\gamma') \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|} \\ \frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\lambda} \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}}}.$$

On a  $\Lambda(\vec{\beta}) = \exp(A)$  et  $\Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) = \exp(B)$ .

On a bien  $A \cdot B = B \cdot A$  donc  $\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) \cdot \Lambda(\vec{\beta})$ .

De plus le produit est égal à  $\exp(A + B)$  or la somme de 2 matrices symétriques est symétrique, et l'exponentielle d'une matrice symétrique est symétrique donc le produit  $\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Lambda(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})$  est symétrique et

est donc une matrice de Lorentz sans rotation.

Réciproquement :

Considérons 2 matrices de Lorentz sans rotation :

$$\Lambda(\vec{\beta}') = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\gamma' \vec{\beta}') \\ \vec{\gamma}' \vec{\beta}' & C' \end{bmatrix}, \Lambda(\vec{\beta}'') = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\gamma'' \vec{\beta}'') \\ \vec{\gamma}'' \vec{\beta}'' & C'' \end{bmatrix} \text{ avec } \vec{\beta}' \neq \vec{0} \text{ et } \vec{\beta}'' \neq \vec{0},$$

$$\text{et leur produit } M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}') = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma} \vec{\beta}) \Omega \\ \vec{\gamma} \vec{\beta} & C \Omega \end{bmatrix},$$

$$\text{avec } C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')}, C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')} \text{ et } C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma} \vec{\beta}] [{}^t \vec{\gamma} \vec{\beta}]}{(1 + \gamma)}$$

alors

$$M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \begin{bmatrix} \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1) & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' + \gamma' \vec{\beta}' C'' \\ \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' + \gamma'' C' \vec{\beta}'' & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma} \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)} \text{ et } \Omega = \left( Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C''),$$

$$\text{avec } Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} = \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right)^{-1}.$$

S'il y a commutativité, on a aussi :  $\Omega = \left( Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\beta}' + C'' C')$  et donc :

$$\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' = \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\beta}' + C'' C'.$$

$$\begin{aligned}
C' \cdot C'' &= \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} \right) \cdot \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')} \right) \\
&= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} \cdot \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')} \\
&= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')} + \frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left( \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \right) \vec{\beta}' \vec{\beta}''}{(1+\gamma')(1+\gamma'')} .
\end{aligned}$$

Et donc

$$\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')} + \left( \frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left( \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')} + \gamma' \gamma'' \right) \left( \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \right)$$

De même si on calcule  $M = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$  :

$$\gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' \vec{\beta}' + C'' C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')} + \left( \frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left( \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')} + \gamma' \gamma'' \right) \left( \vec{\beta}'' \vec{\beta}' \right)$$

puisque  $\vec{\beta}' \vec{\beta}'' = \vec{\beta}'' \vec{\beta}'$ .

Or

$$\left( \frac{\gamma'^2 \gamma''^2 \left( \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')} + \gamma' \gamma'' \right) = \gamma' \gamma'' \left( 1 + \frac{\gamma' \gamma'' \left( \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')} \right) > 0$$

puisque  $\gamma' \geq 1$ ,  $\gamma'' \geq 1$  et  $\left| \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \right| < 1$ .

Donc  $\vec{\beta}' \vec{\beta}'' = \vec{\beta}'' \vec{\beta}' \Rightarrow \vec{\beta}' \vec{\beta}'' \cdot \vec{e}_i = \vec{\beta}'' \vec{\beta}' \cdot \vec{e}_i = \vec{\beta}' \vec{\beta}''_i = \vec{\beta}'' \cdot \vec{\beta}'_i$  pour  $\vec{e}_i = \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Comme  $\vec{\beta}'' \neq \vec{0}$  il existe  $i$  tel que  $\vec{\beta}''_i \neq 0$  et donc  $\vec{\beta}' = \left( \frac{\vec{\beta}'_i}{\vec{\beta}''_i} \right) \vec{\beta}''$ .

Comme  $\vec{\beta}'$  et  $\vec{\beta}''$  sont colinéaires, en appliquant la première partie du théorème le produit :

$M = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$  est une matrice symétrique donc sans rotation.

**Théorème 2 :**

Si la partie symétrique et la partie orthogonale commutent alors  $\vec{\beta}$  est colinéaire à l'axe de rotation de la partie orthogonale.

Démonstration :

Si  $\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Omega = \Omega \cdot \Lambda(\vec{\beta})$  comme  $\Omega \cdot \Lambda(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\Omega\beta}) \cdot \Omega$  par unicité de la décomposition on a

$${}^t \vec{\Omega} \vec{\beta} = \vec{\beta}.$$

**Remarques :**

(1) Considérons le cas où les observateurs  $O, O', O''$

' sont alignés et que les 3 bases associées sont "parallèles"

et telles que le premier axe de chacune d'elles soit aligné avec  $\vec{\beta}$  :

On a pour les matrices de changement de base les relations :

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma' \cdot \beta' & 0 & 0 \\ \gamma' \cdot \beta' & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma'' \cdot \beta'' & 0 & 0 \\ \gamma'' \cdot \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \gamma \cdot \gamma'' (1 + \beta' \cdot \beta'') & \gamma \cdot \gamma'' (\beta'' + \beta') & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \gamma'' (\beta'' + \beta') & \gamma \cdot \gamma'' (1 + \beta' \cdot \beta'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma'' \cdot \beta'' & 0 & 0 \\ \gamma'' \cdot \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \gamma' \cdot \beta' & 0 & 0 \\ \gamma' \cdot \beta' & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On voit directement qu'il y a commutativité dans la composition des mouvements .

(2) Même cas mais sans alignement du premier axe sur  $\vec{\beta}$  :

Les matrices de changement de base sont 2 matrices de Lorentz sans rotation  $\Lambda(\vec{\beta}')$  et  $\Lambda(\vec{\beta}'')$ .

Puisque les 3 bases sont "parallèles" on peut écrire :

$$\Lambda(\vec{\beta}').\Lambda(\vec{\beta}'') = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') {}^t P \cdot P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') \cdot {}^t P \text{ où :}$$

$$\Lambda_0(\vec{\beta}') = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma' \cdot \beta' & 0 & 0 \\ \gamma' \cdot \beta' & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda_0(\vec{\beta}'') \\ = \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma'' \cdot \beta'' & 0 & 0 \\ \gamma'' \cdot \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P \text{ une matrice orthogonale .}$$

Alors :

$$\Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') \cdot {}^tP = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') \cdot {}^tP \\ = P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}'') \cdot {}^tP \cdot P \cdot \Lambda_0(\vec{\beta}') \cdot {}^tP = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Lambda(\vec{\beta}')$$

Il y a donc commutativité dans la composition des mouvements .

## **Bibliographie :**

Annequin et Boutigny . "Mécanique relativiste ,Exercices " .Vuibert 1978.

R.G. Bartle . " Modern theory of integration " .AMS 2001.

Berkeley(Cours de Physique vol 1) . "Mécanique" .Armand Colin 1972.

P • Boyer . "Algèbre et Géométries " . C&M 2015 .

P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968 .

J. Dieudonné . "Eléments d'analyse " . Gauthier – villars 1969 .

F • R • Gantmacher . "Théorie des matrices " • Edition J • Gabay 1990.

R.Goblot . "Algèbre linéaire " Masson 1995 .

E.Gourgoulhon . "Relativité restreinte" • EDP Sciences 2010 .

J. Grifone . "Algèbre Linéaire" • Cepadues éditions 2002 .

J – B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec . "Exercices Algèbre linéaire" .Cepadues éditions 1988 .

D.Langlois . "Introduction à la relativité" • Vuibert 2011.

J • M Lévy – Leblond • One more derivation of the Lorentz transformation.

American Journal of Physics, vol 44, n °3, March 1976 p271 – 277

J.R. Lucas , P.E. Hodgson "Spacetime and electromagnetism " .Clarenton Press 1990 .

R. Mneimé , F. Testard . "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " . Hermann Paris 1986

J-M. Monier . "Algèbre 1 et 2" . Dunod 1997 .

J.Ph.Pérez . " Relativité et invariance "Dunod 2011.

W.Rudin . "Analyse réelle et complexe " .Masson 1978 .

C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte" . Dunod 2010.

J-M. Souriau . "Calcul Linéaire " .PUF 1964 .

N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " .Springer 2002 .

Travaux préparatoires :

[https://archive.org/details/version-1\\_a\\_202006/mode/2-up](https://archive.org/details/version-1_a_202006/mode/2-up)

<https://archive.org/details/matricesdelorentz>

[https://archive.org/details/p\\_20220209\\_202202/mode/2-up](https://archive.org/details/p_20220209_202202/mode/2-up)

<https://archive.org/details/une-nouvelle-approche-axiomatique-de-la-theorie-de-la-relativite-restreinte-docu/mode/2-up>

<https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02965773/document>

