

A • GUIMIER

***Comparaison de 2 méthodes de démonstrations
pour l'explicitation d'une matrice de Lorentz***

09 | 2022

Si on considère 2 observateurs \mathbf{O} et \mathbf{O}' , \mathbf{O}' en translation uniforme par rapport à \mathbf{O} de vitesse \vec{v} . On pose $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ avec c la vitesse de la lumière.

Revenons sur les résultats qui permettent de passer de la définition d'une matrice de Lorentz ($\mathbf{G} = {}^t\mathbf{MGM}$)

à l'explicitation de ses coefficients : $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}$ avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = 1, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\Omega} \text{ matrice orthogonale } 3 \times 3.$$

Nous avons vu une démonstration de cette formule précédemment.

Reprenons une autre démonstration décrite dans J. Parizet :

La géométrie de la relativité restreinte (Ellipses) p.89.

Si $\mathbf{G} = {}^t\mathbf{MGM}$ alors $\mathbf{GM}^{-1} = {}^t\mathbf{MG}$ et donc $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{G}^t\mathbf{MG}$.

Si on écrit \mathbf{M} sous la forme $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t\mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ où $\gamma \in \mathbf{R}$, \mathbf{U} et \mathbf{V} 2 vecteurs de \mathbf{R}^3 et \mathbf{A} une matrice 3×3 .

D'après ce qui précède : $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -{}^t\mathbf{V} \\ -\mathbf{U} & {}^t\mathbf{A} \end{bmatrix}$ et donc :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^2 - {}^t\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} & \gamma \cdot {}^t\mathbf{U} - {}^t\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \\ -\gamma \mathbf{U} + {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} & {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{U} \cdot {}^t\mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Id}_3 \end{bmatrix} \text{ d'où les égalités :}$$

$$\gamma^2 - {}^t\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = 1, -\gamma \mathbf{U} + {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \gamma \cdot {}^t\mathbf{U} - {}^t\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = 0, {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{U} \cdot {}^t\mathbf{U} = \text{Id}_3.$$

On remarque que $\gamma^2 \geq 1$ puisque $\gamma^2 - 1 = {}^t\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \geq 0$, ${}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \gamma \mathbf{U}$ et ${}^t\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \gamma \cdot {}^t\mathbf{U}$.

On a $\mathbf{V} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \gamma^2 = 1$, $\mathbf{V} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{0}$, $\mathbf{V} = \mathbf{0} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \text{Id}_3$.

Donc si $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \pm 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ avec ${}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \text{Id}_3$.

Considérons le cas $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ et donc $\gamma^2 > 1$.

On peut alors considérer $\mathbf{\Omega} = A - \frac{V \cdot {}^t U}{1 + \gamma}$.

$$\begin{aligned} \text{Calculons } {}^t \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega} &= \left({}^t A - \frac{U \cdot {}^t V}{1 + \gamma} \right) \left(A - \frac{V \cdot {}^t U}{1 + \gamma} \right) \\ &= {}^t A \cdot A - \frac{{}^t A V \cdot {}^t U}{1 + \gamma} - \frac{U \cdot {}^t V A}{1 + \gamma} + \frac{U \cdot {}^t V V \cdot {}^t U}{(1 + \gamma)^2}, \\ &= Id_3 + U \cdot {}^t U - \frac{2 \cdot \gamma U \cdot {}^t U}{1 + \gamma} + \frac{(\gamma^2 - 1) U \cdot {}^t U}{(\gamma^2 - 1)} \\ &= Id_3 + U \cdot {}^t U \left(1 - \frac{2 \cdot \gamma}{1 + \gamma} + \frac{(\gamma^2 - 1)}{(1 + \gamma)^2} \right) \\ &= Id_3 + U \cdot {}^t U (1 + \gamma - 2 \cdot \gamma + \gamma - 1) = Id_3. \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{\Omega}$ est une matrice orthogonale.

D'autre part calculons

$${}^t V \cdot \mathbf{\Omega} = {}^t V \cdot \left(A - \frac{V \cdot {}^t U}{1 + \gamma} \right) = {}^t V \cdot A - \frac{{}^t V \cdot V \cdot {}^t U}{1 + \gamma} = \gamma \cdot {}^t U - \frac{(\gamma^2 - 1) \cdot {}^t U}{1 + \gamma} = {}^t U.$$

Donc $\mathbf{\Omega} \cdot U = \mathbf{\Omega}^t \mathbf{\Omega} \cdot V = V$. D'où comme $\mathbf{\Omega} = A - \frac{V \cdot {}^t U}{1 + \gamma}$

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t U \\ V & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t U \\ V & \mathbf{\Omega} + \frac{V \cdot {}^t U}{1 + \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t U \cdot \mathbf{0} \\ V & Id + \frac{V \cdot {}^t U \cdot {}^t \mathbf{\Omega}}{1 + \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \text{ et donc :}$$

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t V \\ V & Id + \frac{V \cdot {}^t V}{1 + \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}.$$

Si on considère les 2 observateurs \mathbf{O} et \mathbf{O}' , \mathbf{O}' en translation uniforme par rapport à \mathbf{O}

de vitesse \vec{V} : \mathbf{O}' aura pour coordonnées $\begin{bmatrix} c \cdot t' \\ 0_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix}$ dans la base associée à \mathbf{O}' et $\begin{bmatrix} c \cdot t \\ \vec{V} \cdot t \end{bmatrix}$

$$\text{dans la base associée à } \mathbf{O} \cdot \text{Donc : } \begin{bmatrix} c \cdot t \\ \vec{V} \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t V \\ V & Id + \frac{V \cdot {}^t V}{1 + \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \cdot t' \\ 0_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix}.$$

On en déduit que $t = \gamma \cdot t'$ et $\vec{V} \cdot t = c \cdot t' \cdot V$ d'où $V = \frac{\gamma \vec{V}}{c} = \gamma \vec{\beta}$ et finalement :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \vec{\beta} \\ \gamma \vec{\beta} & Id + \frac{\gamma^2 \beta^t \beta}{1 + \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}.$$

On peut toujours écrire $M = \begin{bmatrix} -\gamma & -\vec{\gamma}\vec{\beta} \\ -\vec{\gamma}\vec{\beta} & -\left(\text{Id} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}^t \vec{\beta}}{1 + \gamma}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\Omega \end{bmatrix}$ et donc d'une manière

générale M peut s'écrire :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \vec{\gamma}\vec{\beta} \\ \vec{\gamma}\vec{\beta} & \text{Id} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta}^t \vec{\beta}}{1 + \gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1, \gamma \geq 1, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^t \vec{\beta}}}$$

et Ω matrice orthogonale .

Cette démonstration , contrairement à la précédente , ne donne aucune indication sur le signe des valeurs propres de la partie symétrique de M et donc l'unicité reste à démontrer .

Bibliographie :

J • Parizet : La géométrie de la relativité restreinte (Ellipses) p.89 •

J • M Souriau Calcul Linéaire PUF • p.378

