



**HAL**  
open science

# Explicitation du produit de 2 matrices de Lorentz générales .

Alain Guimier

► **To cite this version:**

| Alain Guimier. Explicitation du produit de 2 matrices de Lorentz générales .. 2022. hal-03640170

**HAL Id: hal-03640170**

**<https://amu.hal.science/hal-03640170>**

Preprint submitted on 13 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## *Expression du produit de 2 matrices de Lorentz dans le cas général .*

*A • Guimier*

### *Résumé :*

*Soit 2 matrices de Lorentz donnée sous leur forme polaire*

*$M' = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \Omega'$  et  $M'' = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \Omega''$ , on donne l'expression algébrique du produit  $M = M' \cdot M''$  en fonction de  $\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \Omega', \Omega''$ .*

*Un exemple numérique est traité pour illustrer la formule démontrée .*

**Expression du produit de 2 matrices de Lorentz dans le cas général :**

**Résumé :**

Soit 2 matrices de Lorentz  $M' = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \hat{\Omega}'$  et  $M'' = \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \hat{\Omega}''$  on donne l'expression algébrique du produit  $M = M' \cdot M''$  en fonction de  $\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \hat{\Omega}', \hat{\Omega}''$ .

Un exemple numérique est traité pour illustrer la formule démontrée.

On rappelle maintenant qu'une matrice de Lorentz  $M$  peut s'écrire comme un produit d'une matrice symétrique  $\Lambda$

et d'une matrice orthogonale  $\Omega$  et cela d'une manière unique :

$$M = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\beta}][{}^t\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}]\Omega \\ [\gamma\vec{\beta}] & \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\beta}][{}^t\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \right) \Omega \end{bmatrix}$$

avec  ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$ .

Commençons par étudier le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation :

Si  $M = M' \cdot M''$  est le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation avec :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\beta})\Omega \\ \vec{\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\beta}') \\ \vec{\beta}' & C' \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\beta}'') \\ \vec{\beta}'' & C'' \end{bmatrix}$$

$$\text{alors } M = \begin{bmatrix} \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1) & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' + \gamma' \vec{\beta}' C'' \\ \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' + \gamma'' C' \vec{\beta}'' & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\gamma' \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \text{ et } \Omega = C^{-1} (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'').$$

En notant que  $\begin{pmatrix} \vec{\beta} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \vec{\beta} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{\beta} = \vec{\beta} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix}^2$  et que  $\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta} = \gamma^2 - 1$  :

$$\left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\beta}][{}^t\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \right) \cdot \left( Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= Id_{\mathbf{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} - \gamma^3 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)^2} \\
&= Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)^2} (-\gamma(1+\gamma) + \gamma^2(1+\gamma) - \gamma(\gamma^2 - 1)) = Id_{\mathbf{R}^3}.
\end{aligned}$$

Donc  $C^{-1} = \left( Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \right)^{-1} = Id_{\mathbf{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)}$ , ce qui permet d'écrire  $\Omega$  en fonction de  $\vec{\beta}'$ ,  $\vec{\beta}''$  :

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left( Id_{\mathbf{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1+\gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'') \text{ avec :} \\
\vec{\beta} &= \frac{\vec{\gamma\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, C' = Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} \text{ et } C'' = Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')}, \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1).
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le produit  $M$  de 2 matrices de Lorentz quelconques  $M'$  et  $M''$  avec

$$M = M' M'' = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{\Omega}, M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma\beta})\Omega \\ \vec{\gamma\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma'\beta}')\Omega' \\ \vec{\gamma'\beta}' & C'\Omega' \end{bmatrix},$$

$$M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma''\beta}'')\Omega'' \\ \vec{\gamma''\beta}'' & C''\Omega'' \end{bmatrix} \text{ avec } C = Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)},$$

$$C' = Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1+\gamma')} \text{ et } C'' = Id_{\mathbf{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1+\gamma'')}.$$

En faisant le produit on voit immédiatement que  $\gamma = \gamma' \gamma'' \cdot ({}^t\vec{\beta}' \cdot \Omega' \cdot \vec{\beta}'' + 1)$  et que

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma\beta}' + C'\Omega' \vec{\beta}''}{\gamma' ({}^t\vec{\beta}' \cdot \Omega' \cdot \vec{\beta}'' + 1)} \text{ ce qui donne la partie symétrique de } M : \Lambda(\vec{\beta}).$$

Nous allons calculer  $\Omega$  • Pour cela remarquons que :

Si  $A$  est une matrice orthogonale et  $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix}$ , une matrice orthogonale de Lorentz et

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ & [\gamma\vec{\beta}] & & \\ & & Id_{\mathbb{R}^3} & + \frac{[\gamma\vec{\beta}][\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \\ & & & \end{bmatrix}, \text{ on a :}$$

${}^t(\hat{A}) \cdot \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{A} = \Lambda({}^t\vec{A}\vec{\beta})$  : il suffit de faire le produit matriciel .

On remarque en particulier si on note  $\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$  :

$$\Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{\Omega} = \hat{\Omega} ({}^t\hat{\Omega} \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{\Omega}) = \hat{\Omega} \Lambda({}^t\vec{\Omega}\vec{\beta}) .$$

Maintenant revenons au produit  $M$  :

$$M = M' \cdot M'' = \Lambda(\vec{\beta}') \cdot \hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \hat{\Omega}'' = \hat{\Omega}' \cdot \Lambda({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') \cdot \hat{\Omega}''$$

or on sait faire le produit des 2 matrices symétriques de Lorentz  $\Lambda({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}')$  et  $\Lambda(\vec{\beta}'')$

en reprenant les formules antérieures, en remplaçant  $\vec{\beta}'$  par  ${}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}'$ ,

$\vec{\beta}''$  par  $\vec{\beta}'''$  et  $\Omega''$  par  $\Omega'''$  :

$$\Lambda({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}''' \text{ avec :}$$

$$\vec{\beta}''' = \frac{\gamma' ({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') + C' \vec{\beta}''}{\gamma' ({}^t({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') \vec{\beta}'' + 1)}$$

$$\Omega''' = \left( Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma''' \frac{\vec{\beta}''' \vec{\beta}''}{(1 + \gamma''')} \right) (\gamma' \gamma'' {}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'')$$

$$C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 ({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') ({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}')}{(1 + \gamma')}, \quad C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')}, \quad \gamma''' = \gamma' \gamma'' ({}^t({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') \vec{\beta}'' + 1)$$

puisque  $\gamma(\vec{\beta}') = \gamma({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}')$  .

On écrit donc  $\Lambda({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'')$  sous la forme  $\Lambda({}^t\vec{\Omega}'\vec{\beta}') \cdot \Lambda(\vec{\beta}'') = \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}'''$  .

D'où :

$$M = \hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' = \hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot ({}^t\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}') \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' = (\hat{\Omega}' \cdot \Lambda(\vec{\beta}''') \cdot {}^t\hat{\Omega}') \cdot \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}''$$

=  $\Lambda(\vec{\Omega}'\vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}''$  et par unicité de la décomposition d'une matrice

inversible en un produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale on a :

$$M = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \hat{\Omega} = \Lambda(\vec{\Omega}'\vec{\beta}''') \cdot \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' \quad \text{on a } \hat{\Omega} = \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}''' \cdot \hat{\Omega}'' \text{ et par ailleurs que } \vec{\beta} = \vec{\Omega}'\vec{\beta}''' .$$

Donnons maintenant une vérification numérique des formules démontrées :

**#Programme de vérification**

**#On donne un exemple illustrant la formule démontrée .**

**#Au préalable on donne des programmes qui nous seront utile par la suite  
restart :**

$$Id := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{unprotect}(\gamma) :$$

$f := \text{proc}(m)$

$$\text{return} \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} :$$

**end proc:**

$h := \text{proc}(m)$

$$\text{return} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} :$$

**end proc :**

$g := \text{proc}(\beta)$

**local  $\gamma$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  :**

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{\%T} \cdot \beta}} : \beta_x := \beta[1] : \beta_y := \beta[2] : \beta_z := \beta[3] :$$

$$\text{return} \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \cdot \gamma & \beta_y \cdot \gamma & \beta_z \cdot \gamma \\ \beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ \beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ \beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z^2 \end{bmatrix} :$$

**end proc:**

*#Un proramme qui génère de façon aléatoires des matrices de Lorentz :*

*#Cas général :*

*#On génère aléatoirement le vecteur  $\vec{\beta}$  ce qui permet de construire la partie symétrique de la matrice .*

*#On génère aléatoirement trois vecteurs  $\vec{\omega 1}$ ,  $\vec{\omega 2}$  et  $\vec{\omega 3}$  et par la méthode de Gram – Schmidt*

*#on obtient un système ortonormal de 3 vecteurs ce qui permet d'avoir la partie orthonormale  
#de la matrice .*

*#En retour on aura la matrice générale , vérification qu'elle est bien de Lorentz , la partie symétrique ,*

*#la partie orthogonale et la vérification que cette dernière est bien orthogonale et finalement  $\beta$*

*#On se limite à 10 chiffres significatifs .*

*with(RandomTools) : with(LinearAlgebra) :*

*randomize( ) :*

*p1 :=proc( )*

*local G, co,  $\beta$ ,  $\gamma$  M,  $\Lambda$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_z$ ,  $\Omega$ , GS,  $\omega 1$ ,  $\omega 2$ ,  $\omega 3$  :*

*unprotect( $\gamma$ ) :*

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} :$$

*co := evalf( $\sqrt{3}$ ) :*

$$\beta := \begin{bmatrix} \frac{\text{Generate(float(range=-1..1, digits=10))}}{co} \\ \frac{\text{Generate(float(range=-1..1, digits=10))}}{co} \\ \frac{\text{Generate(float(range=-1..1, digits=10))}}{co} \end{bmatrix} :$$

*$\beta_x := \beta[1]$  :  $\beta_y := \beta[2]$  :  $\beta_z := \beta[3]$  :*

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2)}} :$$

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \cdot \gamma & \beta_y \cdot \gamma & \beta_z \cdot \gamma \\ \beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ \beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ \beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \cdot \beta_z^2 \end{bmatrix} :$$

$$\omega_1 := \begin{bmatrix} \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \end{bmatrix} ;$$

$$\omega_2 := \begin{bmatrix} \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \end{bmatrix} ;$$

$$\omega_3 := \begin{bmatrix} \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \\ \text{Generate}(\text{float}(\text{range}=-10..10, \text{digits}=10)) \end{bmatrix} ;$$

$$GS := \text{GramSchmidt}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \text{normalized});$$

$$\Omega := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GS[1][1] & GS[2][1] & GS[3][1] \\ 0 & GS[1][2] & GS[2][2] & GS[3][2] \\ 0 & GS[1][3] & GS[2][3] & GS[3][3] \end{bmatrix} ;$$

$$M := \Lambda \cdot \Omega ;$$

$$\text{return } M, M^{\%T} \cdot G \cdot M, \Lambda, \Omega, \Omega \cdot \Omega^{\%T}, \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} ;$$

*end proc;*

*#Un programme qui donne les parties symétriques et orthogonale d'une matrice de Lorentz*

$$\text{\#par la formule : } C^{-1} \cdot M = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{\%T} \right) \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix}$$

*# En entrée on a la matrice de Lorentz considérée.*

*#En retour on a la partie orthogonale  $\Omega$  de la matrice  $M$ , la vérification que*



# $\Omega$  est bien orthogonale et que  $M = \Lambda \cdot \Omega$ .

p4 := proc(M)

local  $\beta$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_z$ ,  $\gamma$  Cinv, N,  $\Lambda$ ,  $\Omega$ :

unprotect( $\gamma$ ):

$\gamma := M[1, 1]$ :

$$\beta := \begin{bmatrix} \frac{M[2, 1]}{\gamma} \\ \frac{M[3, 1]}{\gamma} \\ \frac{M[4, 1]}{\gamma} \end{bmatrix} :$$

$$Cinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{%T} :$$

$$N := \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \beta \cdot \beta^{%T} \right) \cdot \begin{bmatrix} M[2][2] & M[2][3] & M[2][4] \\ M[3][2] & M[3][3] & M[3][4] \\ M[4][2] & M[4][3] & M[4][4] \end{bmatrix} :$$

$$\Omega := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N[1, 1] & N[1, 2] & N[1, 3] \\ 0 & N[2, 1] & N[2, 2] & N[2, 3] \\ 0 & N[3, 1] & N[3, 2] & N[3, 3] \end{bmatrix} :$$

$\beta_x := \beta[1]$  :  $\beta_y := \beta[2]$  :  $\beta_z := \beta[3]$  :

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma & \beta_x \cdot \gamma & \beta_y \cdot \gamma & \beta_z \cdot \gamma \\ \beta_x \cdot \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_x \cdot \beta_z \\ \beta_y \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y^2 & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_y \cdot \beta_z \\ \beta_z \cdot \gamma & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z \cdot \beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot \beta_z^2 \end{bmatrix} ;$$

return "M=", M,  $\beta$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega \Omega^{%T}$ ,  $\Lambda$ :

end proc:

#Donnée de M1 et M2 et  $M = M1 \cdot M2$

$$a := p1() : M1 := a[1]; \beta1 := a[6]; \Omega1 := a[4]; \gamma1 := M1[1][1];$$

$$a := p1() : M2 := a[1]; \beta2 := a[6]; \Omega2 := a[4]; \gamma2 := M2[1][1];$$

$$M := M1 \cdot M2;$$

#Calcul des paramètres de M selon 2 manières :

$$\gamma := \gamma1 \cdot \gamma2 \cdot (\beta1^{ \%T} \cdot f(\Omega1) \cdot \beta2 + 1); \gamma v := M[1, 1];$$

$$C1 := Id + \frac{\gamma1^2}{1 + \gamma1} \cdot \beta1 \cdot \beta1^{ \%T};$$

$$C2 := Id + \frac{\gamma2^2}{1 + \gamma2} \cdot \beta2 \cdot \beta2^{ \%T};$$

$$\beta := \frac{\gamma1 \cdot \beta1 + C1 \cdot f(\Omega1) \cdot \beta2}{(\beta1^{ \%T} \cdot f(\Omega1) \cdot \beta2 + 1) \cdot \gamma1}; \beta v := \begin{bmatrix} \frac{M[2, 1]}{M[1, 1]} \\ \frac{M[3, 1]}{M[1, 1]} \\ \frac{M[4, 1]}{M[1, 1]} \end{bmatrix};$$

# Calcul du produit intermédiaire

$$C1 := \left( Id + \frac{\gamma1^2 \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1)^{ \%T}}{1 + \gamma1} \right); C2 := Id + \frac{\gamma2^2}{1 + \gamma2} \cdot \beta2 \cdot \beta2^{ \%T};$$

$$\beta3 := \frac{\gamma1 \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) + C1 \cdot \beta2}{\gamma1 \cdot \left( (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot \beta2 + 1 \right)};$$

$$\gamma3 := \gamma1 \cdot \gamma2 \cdot \left( (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot \beta2 + 1 \right); \gamma3 v := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta3^{ \%T} \cdot \beta3}};$$

$$\Omega3 := \left( Id - \frac{\gamma3 \cdot (\beta3 \cdot \beta3^{ \%T})}{1 + \gamma3} \right) \cdot (\gamma1 \cdot \gamma2 \cdot (f(\Omega1)^{ \%T} \cdot \beta1) \cdot \beta2^{ \%T} + C1 \cdot C2);$$

#Calcul de  $\Omega$

$$\Omega := f(\Omega1) \cdot \Omega3 \cdot f(\Omega2);$$

#Vérification de l'orthogonalité de  $\Omega$ :

$$\Omega \cdot \Omega^{ \%T};$$

#Vérification avec un autre programme :

$$\Omega v := f(p4(M)[4]);$$

#Calcul de  $\Lambda$

$$\Lambda := g(f(\Omega I) \cdot \beta 3);$$

#Vérification avec un autre programme :

$$\Lambda v := p4(M) [6];$$

#Vérification ultime :

$$\Lambda := g(f(\Omega I) \cdot \beta 3); Mf := \Lambda \cdot h(\Omega); Mv := M;$$

$$M1 = \begin{bmatrix} 1.67468551100000 & -0.786693928656870 & 0.152452215757818 & -1.07816628862018 \\ 0.847421806900000 & -0.262286367684665 & 0.788973259660187 & -1.01333645718720 \\ 0.543319685500000 & 0.0222809515380425 & -0.627838230770929 & -0.948956793240696 \\ -0.889523221600000 & 1.24482800374528 & 0.0811297070426241 & 0.484843041413859 \end{bmatrix}$$
$$M2 = \begin{bmatrix} 1.17560683700000 & 0.429704069249763 & 0.368763942601609 & -0.247828572708692 \\ -0.109397508100000 & 0.0281109462715493 & -0.795176919184823 & -0.615525188553972 \\ 0.159600840600000 & -0.453459541284826 & 0.557939415794519 & -0.713127256086562 \\ 0.587035937400000 & 0.989055006419444 & 0.438616143292397 & -0.417129788916830 \end{bmatrix}$$
$$M = \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & -0.437992209308167 & 0.855282447038959 & 0.410212454925417 \\ 0.555984223454041 & -1.00324546777367 & 0.516796223221964 & -0.188516984260923 \\ -0.0209823936898763 & -0.419778212709573 & -0.583884053574633 & 0.695202072552982 \\ -0.884342003856170 & 0.0955089428148110 & -1.05995714088802 & -0.805872002215380 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = 1.44624323570801$$

$$\gamma v = 1.44624323586195$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0.384433413161911 \\ -0.0145082053021837 \\ -0.611475291378323 \end{bmatrix}$$

$$\beta v = \begin{bmatrix} 0.384433413182174 \\ -0.0145082052379460 \\ -0.611475291242492 \end{bmatrix}$$

$$C1 = \begin{bmatrix} 1.23138695552407 & -0.0448401249527581 & 0.317116487093209 \\ -0.0448401249527581 & 1.00868949937660 & -0.0614535200293941 \\ 0.317116487093209 & -0.0614535200293941 & 1.43460905632545 \end{bmatrix}$$

$$C2 = \begin{bmatrix} 1.00550090878963 & -0.00802531686643268 & -0.0295183245490957 \\ -0.00802531686643268 & 1.01170819464013 & 0.0430645038723615 \\ -0.0295183245490957 & 0.0430645038723615 & 1.15839773344865 \end{bmatrix}$$

$$\beta = 1.44624323570801$$

$$\beta v = 1.446243236$$

$$\Omega 3 = \begin{bmatrix} 0.975554098856391 & -0.0298585577336796 & -0.217721534445259 \\ 0.0511654485505307 & 0.994360729876032 & 0.0928915267173489 \\ 0.213720136800983 & -0.101760529573219 & 0.971580412367140 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -0.903698229747633 & 0.322406907778476 & -0.281750416398464 \\ -0.423535045291322 & -0.576547958669593 & 0.698720626762929 \\ -0.0628297304816074 & -0.750763769356264 & -0.657575994735920 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1.00000000177299 & -1.41145609960312 \cdot 10^{-9} & 1.19196244275352 \cdot 10^{-9} \\ -1.41145609960312 \cdot 10^{-9} & 0.999999997499976 & 2.24473740573059 \cdot 10^{-10} \\ 1.19196244275352 \cdot 10^{-9} & 2.24473685061907 \cdot 10^{-10} & 1.00000000126335 \end{bmatrix} \\
\Omega &= \begin{bmatrix} -0.903698229395731 & 0.322406908116973 & -0.281750416658580 \\ -0.423535044753133 & -0.576547958472331 & 0.698720626679344 \\ -0.0628297303917543 & -0.750763769572174 & -0.657575994964109 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1.446243236 & 0.555984223336941 & -0.0209823939197258 & -0.884342004369736 \\ 0.555984223336941 & 1.12636456265454 & -0.00476889616615003 & -0.200993995744189 \\ -0.0209823939197258 & -0.00476889616615003 & 1.00017997427574 & 0.00758535047791896 \\ -0.884342004369736 & -0.200993995744189 & 0.00758535047791896 & 1.31969869935496 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_v &= \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & 0.555984223454041 & -0.0209823936898763 & -0.884342003856171 \\ 0.555984223454041 & 1.12636456268866 & -0.00476889611419295 & -0.200993995639406 \\ -0.0209823936898763 & -0.00476889611419295 & 1.00017997427177 & 0.00758535038927398 \\ -0.884342003856171 & -0.200993995639406 & 0.00758535038927398 & 1.31969869893530 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1.446243236 & 0.555984223336941 & -0.0209823939197258 & -0.884342004369736 \\ 0.555984223336941 & 1.12636456265454 & -0.00476889616615003 & -0.200993995744189 \\ -0.0209823939197258 & -0.00476889616615003 & 1.00017997427574 & 0.00758535047791896 \\ -0.884342004369736 & -0.200993995744189 & 0.00758535047791896 & 1.31969869935496 \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_f &= \begin{bmatrix} 1.44624323600000 & -0.437992209449980 & 0.855282447202797 & 0.410212455343449 \\ 0.555984223336941 & -1.00324546808663 & 0.516796222889292 & -0.188516983975137 \\ -0.0209823939197258 & -0.419778213207286 & -0.583884053854022 & 0.695202072596314 \\ -0.884342004369736 & 0.0955089427883110 & -1.05995714092605 & -0.805872002145374 \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_v &= \begin{bmatrix} 1.44624323586195 & -0.437992209308167 & 0.855282447038959 & 0.410212454925417 \\ 0.555984223454041 & -1.00324546777367 & 0.516796223221964 & -0.188516984260923 \\ -0.0209823936898763 & -0.419778212709573 & -0.583884053574633 & 0.695202072552982 \\ -0.884342003856170 & 0.0955089428148110 & -1.05995714088802 & -0.805872002215380 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

## ***Bibliographie :***

*E. Gourgoulhon . "Relativité restreinte" • EDP Sciences 2010 .*

*C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". Dunod 2010.*

*J - M. Souriau. "Calcul Linéaire ". PUF 1964 .*

*N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " • Springer 2002 .*

