



**HAL**  
open science

# Décomposition polaire d'une matrice de Lorentz

Alain Guimier

► **To cite this version:**

Alain Guimier. Décomposition polaire d'une matrice de Lorentz : Explicitation de la partie symétrique et de la partie orthogonale. 2022. hal-03752160

**HAL Id: hal-03752160**

**<https://amu.hal.science/hal-03752160>**

Preprint submitted on 16 Aug 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Alain Guimier*

*Décomposition polaire des matrices de Lorentz .  
Explicitation du terme symétrique et du terme orthogonal .*

*Chapitre I : Axiomatique • Matrice de Lorentz .*

*Chapitre II : Explicitation du terme symétrique .*

*Chapitre III : Explicitation du terme orthogonal .*

*Bibliographie .*

*Août 2022*

*Nous prposons une construction hypothético – déductive de la transformation de Lorentz dans le cas général et une explicitation des 2 termes de la forme polaire de cette transformation • Cette nouvelle version est essentiellement une réécriture du chapitre 3.*

# Chapitre I : Axiomatique • Matrices de Lorentz •

On considère notre espace physique assimilé à un espace affine réel à 3 dimensions  $E$  dans lequel peuvent se mouvoir librement par rapport à  $E$  et entre eux des points appelés "observateurs". On considère  $\mathcal{P}$  un ensemble de ces points  $O$  auxquels on associe un repère orthormé  $R_O(\vec{O}, \vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O)$  et une horloge  $H_O$ .

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées sur  $\mathcal{P}$  :

**(Hypothèse 1) :** Pour tout point  $O \in \mathcal{P}$ , on suppose que pour tout point  $Q$  défini à partir de  $R_O$  on peut lui associer une horloge synchronisée avec celle de  $O$ .

**Conséquence :** La synchronisation des horloges dans chaque repère permet d'associer à chaque observateur  $O$  un repère  $\mathcal{R}_O$  quadridimensionnel d'origine  $\mathcal{O} : O$  au temps  $t_0 = 0$

puisque la variable temporelle  $t$  est indépendante des variables spatiales.

On définit ainsi une famille de repères quadridimensionnels  $(\mathcal{R}_O)$  :

$$\mathcal{R}_O = \mathcal{R}_O(\vec{O}_{t_0=0}, e_1 = c \cdot \tau, e_2 = I, e_3 = J, e_4 = K) \text{ avec } c \text{ la vitesse de la lumière,}$$

$\tau$  vecteur temporel unitaire porté par la droite d'univers associées à  $O$ ,

et  $I, J, K$  sont  $\vec{i}_O, \vec{j}_O, \vec{k}_O$  au temps  $t_0 = 0$ .

On définit aussi sur  $\mathcal{R}_O$  la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\varphi(e_i, e_j) = 0 \text{ pour } i \neq j, \varphi(e_1, e_1) = 1, \varphi(e_i, e_i) = -1 \text{ pour } i = 2, 3, 4.$$

**(Hypothèse 2) :** Si une ligne d'univers est une droite affine pour  $\mathcal{R}_O$ ,

elle est aussi une droite affine pour tout autre  $\mathcal{R}_{O'}$ .

**(Hypothèse 3) :**

On suppose que les espaces  $E_O$  défini par  $(R_O, H_O)$  sont munis des mêmes lois physiques qui permettent de définir les mêmes unités de mesure d'espace et de temps pour chaque  $E_O$ .

On choisit un point arbitraire  $O_0$  de  $\mathcal{P}$  et le temps  $t_{O_0} = 0$  indiqué par  $H_{O_0}$ .

Pour tout point  $O$  de  $\mathcal{P}$ , par translation spatiale prenons comme nouvelle origine spatiale de  $E_O$  le point  $O'$  de  $R_{O_0}$  qui coïncide avec  $O_0$  au temps  $t_{O_0} = 0$ .

Prenons comme nouvelle origine temporelle de  $E_O$ , l'instant où  $O'$  et  $O_0$  coïncident.

Par la suite, on supposera que tout les repères spatiaux  $R_O$  auront leur origines confondues au temps  $t = 0$  de leur horloge respective.

Et par conséquent la famille de repères quadridimensionnels  $(\mathcal{R}_O)$  aura la même origine spatio-temporelle.

**(Hypothèse 4) :** On suppose que la lumière a un mouvement rectiligne uniforme dans tout  $E_O$  et que sa vitesse numérique  $c$  est constante et indépendante de la source d'émission et de l'espace  $E_O$  considéré.

**Conséquence :** Si  $X = (ct, x, y, z)$  est le vecteur représentant la position d'un photon issu de l'observateur  $O$  au temps  $t = 0$  pour le repère  $\mathcal{R}_O$

et si  $X' = (ct', x', y', z')$  est le vecteur représentant

la position de ce même photon issu de l'observateur  $O'$  au temps  $t'=0$

$$\text{on a } c^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t'^2} \text{ pour } t > 0 \text{ et } t' > 0.$$

Donc les coordonnées du photon vérifieront simultanément :

$$c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ et } c^2 t'^2 - x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \text{ dans } \mathcal{R}_O \text{ et } \mathcal{R}_{O'}.$$

Si on considère la forme quadratique associée à  $\Phi$  :

$$\Phi(X) = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0.$$

(Hypothèse 5) : Isotropie de l'espace .

Nous énoncerons cette hypothèse au chapitre III.

( Voir aussi C. Semay , B. Silvestre – Brac : relativité restreinte p.105)

### Le problème à résoudre :

On cherche une transformation  $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  inversible qui donne les coordonnées spatio-temporelles

du point  $P$  pour l'observateur  $O$  en fonction de celles de l'observateur  $O'$ ,

telle que sous les hypothèses 1, 2, 3, 4 ci-dessus possède les invariants suivant :

(1)  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ,

(2)  $T$  transforme les droites affines en droites affines ,

(3) si  $X = T(X') : \Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = 0$  c'est à dire que  $T$  laisse invariant le cône d'isotropie de  $\Phi$ .

Remarques :

L'inversibilité permet d'avoir un groupe de transformation .

La première condition vient de l'origine commune des 2 repères et que dès que  $T$  est affine , elle est linéaire .

Les 2 autres conditions traduisent les 2 invariances admises par les hypothèses 2 et 4 .

Le seul paramètre qui lie  $O$  et  $O'$  est la vitesse relative  $\vec{V}$  de  $O'$  par rapport à  $O$  et donc  $T = T(\vec{V})$ .

Pour cela on va utiliser les 2 théorèmes suivants donnés dans toute leur généralité :

**Théorème 1 :** ( P • Boyer . "Algèbre et Géométries " . C&M 2015 p.51).

Soit  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une bijection d'un espace affine  $\mathcal{E}$  de dimension  $\geq 2$  sur un corps  $\mathbb{K}$

possédant au moins 3 éléments, telle que pour tout  $a, b, c$  alignés alors  $f(a), f(b), f(c)$  sont alignés, alors  $f$  est semi-affine .

Si  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$   $f$  est affine .

(Ce théorème est appelé théorème fondamental de la géométrie affine • Abouabdillah Driss a proposé une version améliorée de ce théorème : (<https://ssrn.com/abstract=3181422>) en remplaçant l'hypothèse  $f$  bijective par  $f$  surjective ).

Conséquence : Dans un espace affine réel les bijections qui conservent les droites affines sont les applications affines bijectives .

On note  $\mathcal{C}(\Phi) = \{x / \Phi(x, x) = 0\}$  le cône d'isotropie de  $\Phi$  une forme bilinéaire symétrique et  $\text{Rad } \Phi = \{x / \forall y \Phi(x, y) = 0\}$ .

Remarque : Si  $\Phi$  est la forme bilinéaire symétrique associée à  $\Phi = c^2 t^2 - x^2 + y^2 + z^2 : \text{Rad } \Phi = \{0\}$ .

**Théorème 2 :** ( R. Goblot . "Algèbre linéaire " Masson 1995 p.254)

Soit  $\Phi: E \times E \rightarrow \mathbf{K}$ ,  $E$  espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ , une forme bilinéaire symétrique telle que  $\text{Rad } \Phi \neq \mathcal{C}(\Phi)$

Pour qu'une forme bilinéaire  $\Phi'$  soit proportionnelle à  $\Phi$  il faut et il suffit que  $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$ .

( Comparer ce théorème associé aux formes linéaires ayant un noyau commun . )  
 Les conditions (1) et (2) imposées à  $T$  implique que  $T$  est linéaire (Théorème 1) .  
 Soit  $M$  est la matrice qui représente  $T$  dans les bases associées aux repères  $\mathcal{R}_O$  et  $\mathcal{R}_{O'}$ .

Si on note  $X' = MX$ , on a  $\Phi(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X') = \Phi(MX) = 0$

alors (Théorème 2) :  $\exists \lambda \neq 0, \forall X \Phi(MX) = \lambda \cdot \Phi(X)$

en notant  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  on a :

$${}^t(MX)G(MX) = {}^tX {}^tMGMX = \lambda \cdot {}^tXGX \Leftrightarrow {}^tMGM = \lambda \cdot G$$

la dernière équivalence est conséquence de la symétrie des matrices  ${}^tMGM$  et  $G$ .  
 (J-M. Monier."Algèbre 1 et 2". Dunod 1997.)

### Evaluation de $\lambda$ :

Montrons d'abord que si la vitesse de  $O'$  mesurée par l'observateur  $O$  est  $\vec{V}$ ,  
 la vitesse de  $O$  mesurée par l'observateur  $O'$  est  $-\vec{V}$  :

(Pour le moment on ne dispose que des hypothèses ci – dessus )

( cf C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". Dunod 2010 p108 note 5 )

On se place d'abord du point de vue de l'observateur  $O$ .

Considérons le cas où  $O'$  s'éloignant de  $O$ .

Plaçons nous du point de vue de l'observateur  $O$ .

Un rayon lumineux part de  $O$  vers  $O'$  au temps  $t_0$ , atteint  $O'$  au temps  $t_1$  au point  $P_1$ ,

et revient immédiatement vers  $O$ , qui est atteint au temps  $t_2$  puis repart immédiatement  
 vers  $O'$  qui est atteint au temps  $t_3$  au point  $P_2$ ,

puis retourne immédiatement vers  $O$  qui est atteint au temps  $t_4$ .

Il y a donc un double aller – retour.

La vitesse numérique  $c$  du rayon lumineux étant la même dans les 2 sens on a :

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2} \text{ et } t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2} .$$

Lorsque le rayon lumineux atteint , au temps  $t_1$ , le point  $P_1$ ,

$O'$  continue à s'éloigner de  $O$  alors que le rayon retourne vers  $O$ .

$t_3 - t_1 = \frac{t_4 - t_0}{2}$  est la durée entre les 2 contacts du rayon lumineux et  $O'$ .

Si on suppose que  $O'$  a une vitesse uniforme  $\vec{V}$  de module  $V$  on a  $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = V \cdot \frac{t_4 - t_0}{2}$ .

On peut remarquer que  $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$  est aussi égal à la la différence

$$\|\overrightarrow{OP_2}\| - \|\overrightarrow{OP_1}\| = c \left( \frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } V &= c \left( \frac{\frac{t_4 - t_2}{2} - \frac{t_2 - t_0}{2}}{\frac{t_4 - t_0}{2}} \right) = c \left( \frac{t_4 - 2t_2 + t_0}{t_4 - t_0} \right) \\ &= c \left( \frac{(t_4 - t_0) - 2(t_2 - t_0)}{t_4 - t_0} \right) = c \left( 1 - 2 \left( \frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right). \end{aligned}$$

Soit  $M = (m_{i,j})$  la matrice de transformation telle que  $X' = MX$ ,  
 $X$  les coordonnées d'un point  $P$  dans la base de  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ ,  
 $X'$  les coordonnées d'un même point  $P$  dans la base de  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$ .

Plaçons nous maintenant du point de vue de l'observateur  $\mathcal{O}'$  qui veut évaluer  $V'$  !  
 Considérons les coordonnées de l'observateur  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$  :

$\mathcal{O}$  a pour coordonnée  $(ct, 0, 0, 0)$  dans la base associée à  $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ ,  
 et  $\mathcal{O}$  aura pour coordonnées :

$$(ct', x', y', z') = (m_{1,1} \cdot ct, m_{2,1} \cdot ct, m_{3,1} \cdot ct, m_{4,1} \cdot ct) \text{ pour la base associée à } \mathcal{R}_{\mathcal{O}'}$$

Donc  $ct' = m_{1,1} \cdot ct$  : on peut donc écrire qu'en  $\mathcal{O}'$   $t = \alpha \cdot t'$  avec nécessairement  $\alpha > 0$ .

Si l'observateur  $\mathcal{O}'$  évalue  $V'$  en observant l'horloge sur l'observateur  $\mathcal{O}$ ,  
 il obtiendra la même valeur que l'observateur  $\mathcal{O}$  puisque en faisant le même calcul il obtient :

$$V' = c \left( 1 - 2 \left( \frac{\alpha \cdot t_2 - \alpha \cdot t_0}{\alpha \cdot t_4 - \alpha \cdot t_0} \right) \right) = c \left( 1 - 2 \left( \frac{t_2 - t_0}{t_4 - t_0} \right) \right) = V.$$

La vitesse dans les 2 cas est collinéaire à  $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$  et le sens de  $\vec{V}$  est celle de  $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$  pour  $\mathcal{O}$   
 et  $\overrightarrow{\mathcal{O}'\mathcal{O}}$  pour  $\mathcal{O}'$ .

On peut maintenant évaluer  $\lambda$  :

(N.M.J. Woodhouse. " Special Relativity " • Springer 2002 p.80)

D'après l'axiome 2 les lois de la physique étant les mêmes pour les espaces associés  
 à  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  la dilatation des durée sera la même que ce soit l'observateur  $\mathcal{O}$  observant  $\mathcal{O}'$   
 ou bien que ce soit l'observateur  $\mathcal{O}'$  observant  $\mathcal{O}$  puisque les situations physiques sont les mêmes,  
 le modules des vitesses étant identique.

Les coordonnées spatio-temporelle de  $\mathcal{O}'$  sont représentée par le vecteur  $X = {}^t(ct, x, y, z)$   
 pour l'observateur  $\mathcal{O}$ , et par  $X' = {}^t(ct', 0, 0, 0)$  pour l'observateur  $\mathcal{O}'$ .

Comme  $X = MX'$  on en déduit que le temps  $t$  mesuré par un observateur situé en  $\mathcal{O}$  d'une horloge  
 située en  $\mathcal{O}'$  et qui indique le temps  $t'$  à un observateur situé en  $\mathcal{O}'$  vérifie  $t = m_{1,1} t'$

avec  $m_{1,1} > 0$  si on suppose qu'il n'y a pas de retournement du temps car :

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ \beta_x ct \\ \beta_y ct \\ \beta_z ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} ct' \\ m_{2,1} ct' \\ m_{3,1} ct' \\ m_{4,1} ct' \end{bmatrix}.$$

Considérons la situation symétrique où un observateur situé en  $O'$  observe une horloge située en  $O$  qui indique un temps  $t$  pour l'observateur situé en  $O$ . L'observateur situé en  $O'$  mesure alors un temps  $t'$ . Comme  $X' = M^{-1}X$  et si on pose  $N = M^{-1}$  on aura  $t' = n_{1,1}t$  et  $n_{1,1} > 0$  comme précédemment.

Comme nous sommes dans la même situation physique que précédemment  $n_{1,1} = m_{1,1}$ .

De  ${}^tMGM = \lambda \cdot G$ ,  $\lambda \neq 0$ , on en déduit que  ${}^tM = \lambda \cdot G \cdot M^{-1}G^{-1}$ .

D'où  $M^{-1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G) \Rightarrow m_{1,1} = n_{1,1} = (M^{-1})_{1,1} = \lambda^{-1} (G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1}$ .

Or  $(G \cdot {}^tM \cdot G)_{1,1} = m_{1,1}$  donc  $\lambda = 1$ .

Les matrices  $M$  qui vérifient  ${}^tMGM = G$  sont appelées matrices de Lorentz et forment un sous-groupe  $L$  du groupe  $GL_n(\mathbf{R})$ . En particulier  $M^{-1} = G \cdot {}^tM \cdot G$  et  $\det^2(M) = 1$ .

Pour expliciter  $M$  dans le cas qui nous intéresse on va utiliser les 2 théorèmes suivants :

**Théorème 3** : (J-M. Souriau. "Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.378, voir Annexe → )

Toute matrice  $M$  de Lorentz peut se mettre sous la forme :

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que : } {}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbf{R}^3}.$$

$$\text{De plus } \exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) {}^tX \\ sh(\alpha) X & (Id_{\mathbf{R}^3-1} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) \end{bmatrix}$$

**Théorème 4** :

(R. Mneimé, F. Testard. "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques".

Hermann Paris 1986 • Voir annexe → )

Soit  $M$  une matrice inversible à coefficients réels alors il existe un couple unique de matrice  $S'$  symétrique définie positive et  $O$  orthogonale telles que  $M = OS'$ .

Conséquences :

On en déduit en posant  $S = OS'{}^tO \Leftrightarrow S' = {}^tOSO$  que  $M$  peut se décomposer de manière unique en  $M = OS' = O({}^tOSO) = SO$ .

Cela entraîne que décomposition du théorème 3 est unique :

il suffit de vérifier que  $\exp(\alpha N)$  est définie positive.

$\alpha N$  est symétrique réelle, il existe donc une matrice  $U$  orthogonale réelle et une matrice diagonale réelle  $D = (d_{i,i})$  telle que  $\alpha N = {}^tUDU$ .

Comme  $\exp(\alpha N) = {}^tU \exp(D) U$  et  $\exp(D) = (\exp(d_{i,i}))$  les valeurs propres de  $\exp(\alpha N)$  sont strictement positive et  $\exp(\alpha N)$  est définie positive.

De la formule  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$  on en déduit que  $\det(\exp(\alpha N)) = 1$

et que  $\det(M) = \varepsilon \cdot \det(\Omega) = \pm 1$ .

## Chapitre II : Expression de la partie symétrique .

On considère maintenant un point  $O'$  qui s'éloigne d'un point  $O$  à la vitesse constante  $\vec{V}$ .

On pose  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière .

On considère les 2 repères  $\mathcal{R}_O$  et  $\mathcal{R}_{O'}$ , définis plus haut .

$X$  étant les coordonnées d'un point  $P$  dans la base associée à  $\mathcal{R}_O$ ,

$X'$  étant les coordonnées de ce même point  $P$  dans la base associée à  $\mathcal{R}_{O'}$ ,

$M$  la matrice définie par  $X = M \cdot X'$  la matrice de passage de  $\mathcal{R}_{O'}$  à  $\mathcal{R}_O$ ,

$M$  est donc une matrice de Lorentz et s'écrit donc sous la forme

$$M = \exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}, \varepsilon = \pm 1, N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & 0 \end{bmatrix},$$

avec  $X \in \mathbf{R}^3$  tel que :  ${}^tXX = 1, {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbf{R}^3}$  . (voir théorème 3).

On va exprimer dans un premier temps  $\exp(\alpha N)$  en fonction de  $\vec{\beta}$ .

**Théorème 5 :**

En reprenant les notations du théorème 3 on a , si  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  :

$$\exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} \gamma & & & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ & [\gamma\vec{\beta}] & & \\ & & Id_{\mathbf{R}^3} + & \\ & & & \frac{[\gamma\vec{\beta}][{}^t\gamma\vec{\beta}]}{(1 + \gamma)} \end{bmatrix} \text{ avec } [{}^t\gamma\vec{\beta}] \text{ les coordonnées de } \vec{\gamma\beta} \text{ dans } \mathcal{R}_O.$$

**Démonstration :** On peut donc écrire que les coordonnées de  $O'$  dans la base associée à  $\mathcal{B}_O$  sont :

$${}^tW = {}^t(ct, {}^tV_1, {}^tV_2, {}^tV_3) = ct {}^t(1, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \text{ avec } \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$$

et dans  $\mathcal{B}'_O$  :  ${}^tW' = {}^t(ct', 0, 0, 0) = ct' {}^t(1, 0, 0, 0)$  avec  $W = M \cdot W'$ .

On remarque d'abord que  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} W' = W'$  donc  $W = \exp(\alpha N) W'$ .

On est ramené à :

$$\begin{bmatrix} ch(\alpha) & & & sh(\alpha) {}^tX \\ & & & \\ sh(\alpha) X & & (Id_{\mathbf{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X {}^tX) & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} {}^{t'} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} t,$$



cela entraine que  $t \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = t' \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix}$  et donc  $t = ch(\alpha)t'$  d'où :

$$ch(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\alpha) \\ sh(\alpha)X_1 \\ sh(\alpha)X_2 \\ sh(\alpha)X_3 \end{bmatrix} \text{ pour } t' \neq 0 \Rightarrow ch(\alpha)\vec{\beta} = sh(\alpha)\vec{X},$$

donc  $\vec{\beta} = th(\alpha)\vec{X} \Rightarrow \vec{\beta}^2 = th^2(\alpha)$  puisque  $\vec{X}^2 = 1$ .

**Remarque :**

Comme  $|th(\alpha)| < 1 \forall \alpha \in \mathbf{R}$ , nécessairement  $\|\vec{\beta}\| = \left\| \frac{\vec{V}}{c} \right\| < 1 \Leftrightarrow \|\vec{V}\| < c$   
ce qui exclut toute vitesse supraluminique entre observateurs.

On pose  $\beta = \sqrt{\vec{\beta}^2}$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

Comme  $1 - th^2(\alpha) = \frac{1}{ch^2(\alpha)} \Rightarrow ch^2(\alpha) = \frac{1}{1 - th^2(\alpha)} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$ ,

comme  $ch(\alpha) \geq 1$   $\gamma = ch(\alpha)$ ; comme  $sh^2(\alpha) = ch^2(\alpha) - 1 = \gamma^2 - 1$   
 $= \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \beta^2$ .

En résumé on a  $\gamma = ch(\alpha)$ ,  $\gamma^2 \beta^2 = sh^2(\alpha)$ ,  $\beta^2 = th^2(\alpha)$ .

D'autre part :

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma + 1)(\gamma - 1) \Rightarrow \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} = (\gamma - 1) = ch(\alpha) - 1$$

et  $X_i X_j = \frac{(\beta_i \beta_j)}{th^2(\alpha)} = \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2}$  donc

$$(ch(\alpha) - 1)X_i X_j = \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1 + \gamma)} \frac{(\beta_i \beta_j)}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)} \beta_i \beta_j, \text{ ce qui permet d'écrire que :}$$

$$Id_{\mathbf{R}^3} + (ch(\alpha) - 1)X^t X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)}.$$

Comme  $sh(\alpha)X_i = \frac{sh(\alpha)\beta_i}{th(\alpha)} = ch(\alpha)\beta_i = \gamma\beta_i$  d'où le résultat.

En résumé :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}] \\ [\vec{\gamma\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \right) \Omega \end{bmatrix}$$

avec  ${}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}$ .

$$\text{Par la suite si on note } C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\vec{\gamma\beta}]\Omega \\ [\vec{\gamma\beta}] & C\Omega \end{bmatrix}.$$

Remarques :

$$(1) C[\vec{\beta}] = \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\vec{\gamma\beta}]^t [\vec{\gamma\beta}]}{(1+\gamma)} \right) \vec{\beta} = \vec{\beta} + \gamma^2 \frac{[\vec{\beta}]^t [\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} = [\vec{\beta}] \left( 1 + \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)} \right)$$

$$= [\vec{\beta}] \left( 1 + \frac{\gamma^2 - 1}{(1+\gamma)} \right) = \gamma [\vec{\beta}].$$

(2) Si  $M = M' \cdot M''$  est le produit de 2 matrices de Lorentz sans rotation avec :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t(\vec{\gamma\beta})\Omega \\ \vec{\gamma\beta} & C\Omega \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} \gamma' & {}^t(\vec{\gamma'\beta'}) \\ \vec{\gamma'\beta'} & C' \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} \gamma'' & {}^t(\vec{\gamma''\beta''}) \\ \vec{\gamma''\beta''} & C'' \end{bmatrix}$$

$$\text{alors } M = \begin{bmatrix} \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1) & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}'' + \gamma' \vec{\beta}' C'' \\ \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' + \gamma' C' \vec{\beta}'' & \gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1),$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma} \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, \quad C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \text{ et } \Omega = C^{-1} (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'').$$

En notant que  $\begin{pmatrix} \vec{\beta} & \vec{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\beta} & \vec{\beta} \end{pmatrix} = \vec{\beta} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{\beta} = \vec{\beta} \begin{pmatrix} \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{\beta}$  et que  $\gamma^2 \vec{\beta} \vec{\beta} = \gamma^2 - 1$  :

$$\begin{aligned} & \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\begin{bmatrix} \vec{\gamma} \vec{\beta} & \vec{\gamma} \vec{\beta} \end{bmatrix}}{(1 + \gamma)} \right) \cdot \left( Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) \\ &= Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} + \gamma^2 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} - \gamma^3 \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)^2} \\ &= Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)^2} (-\gamma(1 + \gamma) + \gamma^2(1 + \gamma) - \gamma(\gamma^2 - 1)) = Id_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } C^{-1} = \left( Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\begin{bmatrix} \vec{\gamma} \vec{\beta} & \vec{\gamma} \vec{\beta} \end{bmatrix}}{(1 + \gamma)} \right)^{-1} = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}, \text{ ce qui permet d'écrire } \Omega$$

en fonction de  $\vec{\beta}', \vec{\beta}''$  :

$$\Omega = \left( Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)} \right) (\gamma' \gamma'' \vec{\beta}' \vec{\beta}'' + C' C'') \text{ avec :}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\gamma} \vec{\beta}' + C' \vec{\beta}''}{\gamma' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1)}, \quad C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma'^2 \vec{\beta}' \vec{\beta}'}{(1 + \gamma')} \text{ et } C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\gamma''^2 \vec{\beta}'' \vec{\beta}''}{(1 + \gamma'')}, \quad \gamma = \gamma' \gamma'' (\vec{\beta}' \vec{\beta}'' + 1).$$

(3) La connaissance de  $C^{-1} = Id_{\mathbb{R}^3} - \gamma \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(1 + \gamma)}$  permet d'évaluer  $\Omega$  en fonction de  $M$  :

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix} \cdot \text{Considérons le bloc } \mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{3,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{bmatrix}$$

qui représente les composantes spatiales des vecteurs spatiaux de la base associée à  $\mathbf{O}'$  exprimées

dans la base associée à  $\mathbf{O}$ .

On aura  $\Omega = C^{-1} \mathbf{M}$ . (4) Si  $\vec{\beta} // \vec{i}$  alors les termes non diagonaux de  $C$  sont nuls,

$$\text{et un seul terme diagonal de } C \text{ est différent de } 1 : 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta^2 = \frac{(1+\gamma) + \gamma^2 \beta^2}{(1+\gamma)}$$

$$= \frac{1+\gamma+\gamma^2-1}{(1+\gamma)} = \gamma \text{ car } \gamma^2 - 1 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \gamma \beta^2.$$

(5) Comme  $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$  on peut remplacer, en notant  $\delta_j^i$  le symbole de Kronecker,

$$\delta_j^i + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_i \beta_j \text{ par } \delta_j^i + (\gamma-1) \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} \text{ dans l'évaluation de } Id_{\mathbb{R}^3} + (ch(\alpha) - 1) X^t X$$

$$\text{car } \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} = \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}.$$

(6)  $\gamma(1+\beta) = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$  car :

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \Leftrightarrow \gamma \beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

$$\text{Donc } \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = \ln \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right);$$

et on retrouve que  $argth(\beta) = argcosh(\gamma) = \alpha$  car  $\gamma = ch(\alpha)$  et  $\beta = th(\alpha)$ .

(7) Sachant que  $[exp(\alpha N)]^{-1} = exp(-\alpha N)$ ,  $\gamma = ch(\alpha)$  et  $\vec{\beta} = th(\alpha) \vec{X}$  il vient :

$$\left[ \begin{array}{cc} \gamma & {}^t[\vec{\gamma}\vec{\beta}] \\ [{}^t\vec{\gamma}\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma}\vec{\beta}][\vec{\gamma}\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} \gamma & -{}^t[\vec{\gamma}\vec{\beta}] \\ -[{}^t\vec{\gamma}\vec{\beta}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[{}^t\vec{\gamma}\vec{\beta}][\vec{\gamma}\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{array} \right].$$

# Chapitre III : Expression de la partie orthogonale .

Maintenant évaluons  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$

## (1) Evaluation de $\boldsymbol{\varepsilon} = \pm 1$ :

Comme

$$W = MW' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} & {}^t[\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta}] \\ [\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta}] & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\varepsilon} & {}^t[\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta}]\boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta}] & C\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} W'$$

avec  ${}^tW = (ct, {}^tV_1, {}^tV_2, {}^tV_3)$  ,  ${}^tW' = (ct', 0, 0, 0)$  . On en déduit que  $t = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot t'$  .

Donc si  $\boldsymbol{\varepsilon} = -1$  , il y aurait un renversement du temps difficile à justifier physiquement .

Par la suite on suppose que  $\boldsymbol{\varepsilon} = +1$  .

Reste à évaluer  $\boldsymbol{\Omega}$  . On posera  $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}$  .

Remarquons tout d'abord que  $M$  est symétrique  $\Leftrightarrow \boldsymbol{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^3}$

car  $M = S \boldsymbol{\Omega} = M Id_{\mathbb{R}^3}$  avec  $S$  symétrique définie positive , par unicité de la décomposition  $\boldsymbol{\Omega} = Id_{\mathbb{R}^3}$

Introduisons maintenant la notion de bases standards :

On dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont 2 bases standards si la matrice de passage  $M$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  vérifie :

$$M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

## (2) Construction de bases standards :

Soit 2 observateurs  $O$  et  $O'$  en translation uniforme par rapport à  $O$

de vitesse  $\vec{V}$  . On pose  $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\vec{V}}{c}$  avec  $c$  la vitesse de la lumière .

On munit  $O$  et  $O'$  de 2 bases spatiales orthonormées  $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et

$B'(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  associée aux bases spatio-temporelles  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  .

On note  $M$  la matrice de Lorentz de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  :

$M = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') : X = MX'$  avec  $X$  les coordonnées d'un vecteur dans la base  $\mathcal{B}$  ,  $X'$  dans la base  $\mathcal{B}'$  .

Considérons le cas où  $\vec{\boldsymbol{\beta}} // \vec{i} // \vec{i}'$  et de même sens ,  $M$  s'écrira :

$$M = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \omega_{1,3} \\ 0 & \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} \\ 0 & \omega_{3,1} & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta\omega_{1,1} & \gamma\beta\omega_{1,2} & \gamma\beta\omega_{1,3} \\ \gamma\beta & \gamma\omega_{1,1} & \gamma\omega_{1,2} & \gamma\omega_{1,3} \\ 0 & \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} \\ 0 & \omega_{3,1} & \omega_{3,2} & \omega_{3,3} \end{bmatrix},$$

car dans le cas général  $M = \begin{bmatrix} \gamma & \begin{matrix} t \\ \vec{\beta} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vec{\beta} \\ \end{matrix} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$  avec

$$C = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1^2 & -\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_2 & -\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_1\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2^2 & -\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_2\beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_1 & -\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)}\beta_3^2 \end{bmatrix} \text{ et } \Omega \text{ orthogonale.}$$

Remarque complémentaire :

Comme  $\vec{\beta} // \vec{i} // \vec{i}'$  on peut se restreindre à un problème à une dimension

spatiale et résoudre exactement ce problème classique de solution  $\begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix}$ .

Ce qui implique que  $\omega_{1,1} = 1$  et  $\omega_{2,1} = \omega_{3,1} = \omega_{1,2} = \omega_{1,3} = 0$ .

$\Omega$  est donc une rotation d'axe  $\vec{\beta}$ .

On peut maintenant construire une paire de bases standards.

L'observateur  $O'$  fait un changement de base de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}''$

avec  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$  comme matrice de passage en faisant un changement de base spatial

et en conservant la même horloge.

On a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \cdot \mathcal{P}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}''$  sont 2 bases standards associées à  $O$  et  $O'$ .

**(3) Application des bases standards à l'évaluation de la partie orthogonale d'une décomposition polaire d'une matrice de Lorentz :**

Comme précédemment on considère 2 observateurs  $O$  et  $O'$  en translation

uniforme par rapport à  $O$  de vitesse  $\vec{V}$ . On pose  $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$  avec  $c$  la vitesse de la lumière.

On munit  $O$  et  $O'$  de 2 bases spatiales orthonormées  $B$  et  $B'$  associée aux bases spatio-temporelles  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . On note  $M$  la matrice de

Lorentz de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  :  $M = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') : X = MX'$  avec  $X$  les coordonnées d'un vecteur dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $X'$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

On peut aussi construire 2 bases standards  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}'_0$  associée à  $O$  et  $O'$ .

$$\text{Soit } A = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0) \text{ et } D = \mathcal{P}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'_0), N = \mathcal{P}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$M = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0) \mathcal{P}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0) \mathcal{P}(\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}') = AN^tD = (ANA) (A^tD).$$

Par unicité de la décomposition  $ANA$  est égal à la partie symétrique de  $M$  et  $A^tD$  est égal à la partie orthogonale de  $M$ .

Par définition  $A$  et  $D$  sont indépendants de  $\|\vec{\beta}\|$ . Donc la partie orthogonale de  $M$  est indépendante de  $\|\vec{\beta}\|$ .

De plus la partie symétrique de  $M$  tend vers la matrice unité lorsque  $\|\vec{\beta}\| \rightarrow 0$ .

$$\text{Comme } M = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\beta]\Omega \\ [\gamma\beta] & C\Omega \end{bmatrix}, \lim_{\|\vec{\beta}\| \rightarrow 0} (M(\vec{\beta})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

car  $\lim_{\|\vec{\beta}\| \rightarrow 0} (C) = Id$ .

$$\text{Or lorsque } \|\vec{\beta}\| = 0, \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}.$$

$$\text{Donc } \lim_{\|\vec{\beta}\| \rightarrow 0} (M(\vec{\beta})) = M(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}.$$

Si on appelle  $\Lambda(\vec{\beta})$  la partie symétrique de  $M$  :

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\beta] \\ [\gamma\beta] & C \end{bmatrix} \text{ avec } C$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix},$$

On a :

$$M(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Omega = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot M(\vec{0}).$$

En particulier  $M(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\beta}) \Leftrightarrow M(\vec{0}) = Id \Leftrightarrow$  Les vecteurs de base spatiaux sont parallèles pour  $\vec{\beta} = \vec{0}$ .

Remarque :

On aurait pu remplacer  $\begin{bmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  par toute autre matrice de Lorentz symétrique :

On appelle bases parallèles 2 bases associées respectivement à  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{O}'$  telle que la matrice de passage  $N = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$  soit une matrice de Lorentz symétrique,

$$N = \Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma \vec{\beta}] \\ [\gamma \vec{\beta}] & C \end{bmatrix} \text{ avec } C$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_1 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_2 \beta_3 \\ \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_1 & \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3 \beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)} \beta_3^2 \end{bmatrix}.$$

On justifie cette appellation parce qu'il avait été noté précédemment :

$M(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\beta}) \Leftrightarrow M(\vec{0}) = Id \Leftrightarrow$  Les vecteurs de base spatiaux sont parallèles pour  $\vec{\beta} = \vec{0}$ .

En raisonnant comme pour les bases standards on s'assure de l'existence de telles bases.

En faisant le même raisonnement :  $M(\vec{\beta}) = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot \Omega = \Lambda(\vec{\beta}) \cdot M(\vec{0})$ .



## ***Bibliographie :***

- Annequin et Boutigny* ."Mécanique relativiste ,Exercices ". *Vuibert* 1978.  
*R.G. Bartle* ." Modern theory of integration ". *AMS* 2001.  
*Berkeley (Cours de Physique vol 1)* ."Mécanique". *Armand Colin* 1972.  
*P • Boyer* ."Algèbre et Géométries " . *C&M* 2015 .  
*P • Brousse • Mécanique • Armand Colin* 1968 .  
*J. Dieudonné* ."Eléments d'analyse " . *Gauthier – villars* 1969 .  
*F • R • Gantmacher* ."Théorie des matrices " • *Edition J • Gabay* 1990.  
*R.Goblot* ."Algèbre linéaire " *Masson* 1995 .  
*E.Gourgoulhon* ."Relativité restreinte" • *EDP Sciences* 2010 .  
*J. Grifone* ."Algèbre Linéaire" • *Cepadues éditions* 2002 .  
*J – B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec* ."Exercices Algèbre linéaire". *Cepadues éditions* 1988 .  
*D.Langlois* ."Introduction à la relativité" • *Vuibert* 2011.  
*J • M Lévy – Leblond* • *One more derivation of the Lorentz transformation*.  
*American Journal of Physics*, vol 44, n ° 3, March 1976 p271 – 277  
*J.R. Lucas , P.E. Hodgson* "Spacetime and electromagnetism " . *Clarenton Press* 1990 .  
*R. Mneimé , F. Testard* ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques " . *Hermann Paris* 1986 .  
*J-M. Monier* ."Algèbre 1 et 2". *Dunod* 1997 .  
*J.Ph.Pérez* ." Relativité et invariance " *Dunod* 2011.  
*W.Rudin* ."Analyse réelle et complexe " . *Masson* 1978 .  
*C • Semay , B • Silvestre - Brac* • "Relativité restreinte". *Dunod* 2010.  
*J-M. Souriau* ."Calcul Linéaire " . *PUF* 1964 .  
*N.M.J. Woodhouse* . " Special Relativity " . *Springer* 2002 .

### *Travaux préparatoires :*

- <https://archive.org/details/version-1-a-202006/mode/2-up>  
<https://archive.org/details/matricesdelorentz>  
[https://archive.org/details/p\\_20220209\\_202202/mode/2-up](https://archive.org/details/p_20220209_202202/mode/2-up)  
<https://archive.org/details/une-nouvelle-approche-axiomatique-de-la-theorie-de-la-relativite-restreinte-docu/mode/2-up>  
<https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02965773/document>

