



**HAL**  
open science

# Dual algebras and commutative pairs of contractions

Frédéric Jaeck

► **To cite this version:**

Frédéric Jaeck. Dual algebras and commutative pairs of contractions. Mathematics [math]. Université Bordeaux 1, 1997. English. NNT: . tel-04668568

**HAL Id: tel-04668568**

**<https://amu.hal.science/tel-04668568v1>**

Submitted on 6 Aug 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE MATHÉMATIQUES PURES

**ALGÈBRES DUALES  
ET  
PAIRES COMMUTATIVES DE CONTRACTIONS**

SOUTENUE EN JANVIER 1997 À L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

Frédéric Jaëck

DEVANT UN JURY COMPOSÉ DE :

DIR. B. CHEVREAU

J. ESTERLE (PRÉS.)

J. ESCHMEIER

S. KISLIAKOV

N. NIKOLSKII

F. VASILESCU

# Table des matières

<b>On the contractions in the classes <math>\mathbb{A}_{n,m}</math></b>	<b>2</b>
<b>Paires commutatives de contractions</b>	<b>35</b>

# Première partie

## On the contractions in the classes $\mathbb{A}_{n,m}$

## ON THE CONTRACTIONS IN THE CLASSES $\mathbb{A}_{n,m}$

ISABELLE CHALENDAR and FRÉDÉRIC JAECK

*Communicated by Florian-Horia Vasilescu*

ABSTRACT. Let  $T$  be a contraction in the class  $\mathbb{A}$  acting on a Hilbert space. Sufficient conditions in terms of the multiplicity of certain natural unitary operators associated with the  $C_0$ ,  $C_{-0}$ ,  $C_1$  or  $C_{-1}$  part of  $T$  are given to ensure that  $T$  belongs to the class  $\mathbb{A}_{n,m}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Along the way we obtain new relations between the boundary sets involved in arbitrary triangulations of  $T$ .

KEYWORDS: *Hilbert space, absolutely continuous contraction, dual operator algebra, minimal coisometric extension, minimal isometric dilation.*

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: Primary 47D27; Secondary 47A20, 47A15.

### 1. INTRODUCTION

Let  $\mathcal{H}$  be a separable, infinite-dimensional complex Hilbert space. We denote by  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  the algebra of all bounded linear operators acting on  $\mathcal{H}$ . Let  $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$  be the Banach space of trace class operators on  $\mathcal{H}$  equipped with the trace norm. If  $\mathcal{A}$  is a dual algebra on  $\mathcal{H}$ , that is, a weak\*-closed unital subalgebra of  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , then it is well-known (cf. for example [2]) that  $\mathcal{A}$  can be identified with the dual space of  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} := \mathcal{C}^1(\mathcal{H}) / {}^\perp \mathcal{A}$  where  ${}^\perp \mathcal{A}$  is the preannihilator of  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ , under the pairing:

$$\langle T, [L]_{\mathcal{A}} \rangle = \text{trace}(TL), \quad T \in \mathcal{A}, [L]_{\mathcal{A}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}.$$

The Banach space  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$  is called the predual of  $\mathcal{A}$ . We write  $[L]$  for  $[L]_{\mathcal{A}}$  whenever there is no possibility of confusion. For  $x$  and  $y$  in  $\mathcal{H}$ , we define  $x \otimes y$  by  $x \otimes y(u) = (u, y)x$  for all  $u$  in  $\mathcal{H}$ . The cosets  $[x \otimes y]_{\mathcal{A}}$  have been essential in dual algebra theory. Suppose  $m$  and  $n$  are cardinal numbers such that  $1 \leq m, n \leq \aleph_0$ .

A dual algebra  $\mathcal{A}$  will be said to have property  $(\mathbb{A}_{m,n})$  if every  $m \times n$  system of simultaneous equations of the form:

$$[x_i \otimes y_j] = [L_{i,j}], \quad 0 \leq i < m, \quad 0 \leq j < n,$$

where  $\{[L_{i,j}], 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\}$  is an arbitrary array from  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ , has a solution  $\{x_i, 0 \leq i < m\}, \{y_j, 0 \leq j < n\}$  consisting of a pair of sequences of vectors from  $\mathcal{H}$ . We write  $\mathbb{D}$  for the open unit disc in the complex plane  $\mathbb{C}$ , and  $\mathbb{T}$  for the boundary of  $\mathbb{D}$ . The spaces  $L^p = L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  are the usual Lebesgue function spaces relative to normalized Lebesgue measure  $m$  on  $\mathbb{T}$ . The spaces  $H^p = H^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  are the usual Hardy spaces. It is well-known (cf. [9]) that the space  $H^\infty$  is the dual space of  $L^1/H_0^1$  where  $H_0^1 = \left\{ f \in L^1 : \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{int} dt = 0, n = 0, 1, \dots \right\}$  and the duality is given by the pairing:

$$\langle f, [g] \rangle = \int_{\mathbb{T}} fg dm, \quad f \in H^\infty, [g] \in L^1/H_0^1.$$

We denote by  $\mathcal{A}_T$  the dual algebra generated by  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  and by  $\mathcal{Q}_T$  the predual space  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}_T}$  of  $\mathcal{A}_T$ . A contraction  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  is absolutely continuous if in the canonical decomposition  $T = T_1 \oplus T_2$ , where  $T_1$  is a unitary operator and  $T_2$  is a completely non unitary contraction,  $T_1$  is either absolutely continuous or acts on the space  $(0)$ . The following is essentially Theorem 4.1 in [2]:

**THEOREM 1.1.** *Let  $T$  be an absolutely continuous contraction in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Then there exists a functional calculus  $\Phi_T : H^\infty \rightarrow \mathcal{A}_T$  defined by  $\Phi_T(f) = f(T)$  for every  $f \in H^\infty$ . The mapping  $\Phi_T$  is a norm-decreasing weak\*-continuous algebra homomorphism, and the range of  $\Phi_T$  is weak\*-dense in  $\mathcal{A}_T$ . Furthermore there exists a bounded, linear, one-to-one map  $\varphi_T$  of  $\mathcal{Q}_T$  into  $L^1/H_0^1$  such that  $\Phi_T = \varphi_T^*$ .*

In particular the coset  $[x \otimes y]$  is mapped to an element of  $L^1/H_0^1$  which we denote  $x \square y$ . Very often we will use the sesquilinear map “ $\square$ ” for different absolutely continuous contractions (a.c.c.). If necessary we will write  $\square^T$  to avoid ambiguity. Thus we write  $x \square y$  either when there is only one a.c.c. for which  $x \square y$  is defined or when for all a.c.c. for which  $x \square y$  is defined the same value is assigned. We denote by  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathcal{H})$  the class of all absolutely continuous contractions  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  for which the Sz.-Nagy–Foiás functional calculus  $\Phi_T : H^\infty \rightarrow \mathcal{A}_T$  is an isometry. Furthermore, if  $m$  and  $n$  are any cardinal numbers such that  $1 \leq m, n \leq \aleph_0$ , we set  $\mathbb{A}_{m,n} = \mathbb{A}_{m,n}(\mathcal{H})$  to be the set of all  $T$  in  $\mathbb{A}(\mathcal{H})$  such that the singly generated dual algebra  $\mathcal{A}_T$  has property  $(\mathbb{A}_{m,n})$ . We write  $\mathbb{A}_n$  for  $\mathbb{A}_{n,n}$ .

In this paper, we continue the study of sufficient conditions for membership in the class  $\mathbb{A}_{n,m}$ , using improvements of techniques introduced in [8], [6], [4], [1], [12]. A lot of work has been done in this direction. For example, in [10], the authors discuss contraction operators  $T$  in the class  $C_0 \cap \mathbb{A}$  with defect index  $d_T < \infty$  ( $d_T = \dim\{(\text{Id} - T^*T)^{1/2}\mathcal{H}\}^-$ ). They show that these are particularly nice representatives of the class  $\mathbb{A}_{n,\aleph_0}$ . Indeed, their membership is completely determined by the multiplicity of either the shift piece of their Jordan model or the unitary piece of their minimal coisometric extension.

Our results are based upon the interplay between boundary sets, multiplicity theory and approximation techniques. In particular, we generalize the results obtained by [12] for membership in the class  $\mathbb{A}_n$  by localizing the multiplicity conditions. Though this localization will not surprise the specialist, it is largely responsible for a lot of new technicalities.

In Section 2 we introduce the notation and terminology used herein. Then, in Section 3, we shall develop some functional lemmas which lead to approximation results involving multiplicity (established in Section 4). Along the way, we give some new results for some triangulation of absolutely continuous contractions (Section 4). As a sequel to this study we shall deduce some sufficient conditions for membership in the class  $\mathbb{A}_{1,n}$ ,  $\mathbb{A}_{k,1}$  and  $\mathbb{A}_{k,n}$  where  $k$  and  $n$  are some positive integers.

## 2. PRELIMINARIES

The notation and terminology employed herein agree with those in [5] and [13]. If we suppose that  $T$  is an a.c.c. in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , then its minimal unitary dilation  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  ( $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ ) is also absolutely continuous.

The minimal isometric dilation  $U_+$  of  $T$  is the restriction of  $U$  to the subspace  $\mathcal{U}_+ = \text{span}\{U^n\mathcal{H}, n \geq 0\}$ , which is invariant for  $U$ . The operator  $U_+$  has the Wold decomposition  $U_+ = S_* \oplus R$  corresponding to the decomposition of  $\mathcal{U}_+$  as  $\mathcal{S}_* \oplus \mathcal{R}$ , where  $S_*$  is a unilateral shift of some multiplicity in  $\mathcal{L}(\mathcal{S}_*)$  if  $\mathcal{S}_* \neq (0)$ ,  $S_*$  is the zero operator if  $\mathcal{S}_* = (0)$ ,  $R$  is an absolutely continuous unitary operator in  $\mathcal{L}(\mathcal{R})$  if  $\mathcal{R} \neq (0)$  and  $R$  is the zero operator if  $\mathcal{R} = (0)$ .

The minimal coisometric extension  $B$  of  $T$  is the compression of  $U$  to the subspace  $\mathcal{B} = \text{span}\{U^n\mathcal{H}, n \leq 0\} = \text{span}\{U^{*n}\mathcal{H}, n \geq 0\}$ , invariant for  $U^*$  (hence semi-invariant for  $U$ ). The operator  $B$  has the Wold decomposition  $B = S^* \oplus R_*$  corresponding to the decomposition of  $\mathcal{B}$  as  $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R}_*$ , where  $S$  is a unilateral shift of some multiplicity in  $\mathcal{L}(\mathcal{S})$  if  $\mathcal{S} \neq (0)$ ,  $S$  is the zero operator if  $\mathcal{S} = (0)$ ,  $R_*$  is an

absolutely continuous unitary operator in  $\mathcal{L}(\mathcal{R}_*)$  if  $\mathcal{R}_* \neq (0)$  and  $R_*$  is the zero operator if  $\mathcal{R}_* = (0)$ .

Throughout the paper, expressions such as maximality, uniqueness, and equality of Borel subsets of  $\mathbb{T}$  are to be interpreted as being satisfied up to Borel subsets of Lebesgue measure zero.

We write  $\Sigma = \Sigma_T$  (resp.  $\Sigma_* = \Sigma_{*,T}$ ) for the Borel subset of  $\mathbb{T}$  such that  $m_{|\Sigma}$  (resp.  $m_{|\Sigma_*}$ ) is a spectral measure for  $R$  (resp.  $R_*$ ). By Proposition 3.1 in [5], there exists a unique maximal Borel subset  $X_T$  of  $\mathbb{T}$  such that, for any  $f \in L^1(X_T)$ ,  $\|f\|_1 \leq 1$ , there exist two sequences  $(x_n)_n$  and  $(y_n)_n$  in the unit ball of  $\mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|[f]_{L^1/H_0^1} - x_n \square y_n\| = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n \square w\| = 0, & w \in \mathcal{H}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|w \square y_n\| = 0, & w \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

In fact,  $T$  belongs to the class  $\mathbb{A}_{\aleph_0}$  if and only if  $X_T = \mathbb{T}$  (cf. [2], with a different formulation).

We denote by  $E_T^r$  (resp.  $E_T^l$ ) the Borel subset of  $\mathbb{T}$  equal to  $X_T \cup \Sigma_{*,T}$  (resp.  $X_T \cup \Sigma_T$ ). It follows from Proposition 4.8 in [5] that  $E_T^r$  (resp.  $E_T^l$ ) is the maximal Borel subset of  $\mathbb{T}$  such that for any  $f \in L^1(E_T^r)$  (resp.  $f \in L^1(E_T^l)$ ),  $\|f\|_1 \leq 1$ , there exist two sequences  $(x_n)_n$  and  $(y_n)_n$  in the unit ball of  $\mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|[f]_{L^1/H_0^1} - x_n \square y_n\| = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n \square w\| = 0 \text{ (resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|w \square y_n\| = 0), & w \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

The operator  $T$  belongs to the class  $\mathbb{A}_{1, \aleph_0}$  (resp.  $\mathbb{A}_{\aleph_0, 1}$ ) if and only if  $E_T^r = \mathbb{T}$  (resp.  $E_T^l = \mathbb{T}$ ) (cf. [4]).

By Theorem 4.3 in [5], an a.c.c.  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  belongs to the class  $\mathbb{A}$  if and only if  $\mathbb{T} = X_T \cup \Sigma_{*,T} \cup \Sigma_T$ .

If  $\mathcal{M}$  is a semi-invariant subspace for  $T$ , we denote by  $R^\mathcal{M}$  (resp.  $R_*^\mathcal{M}$ ) the unitary part of the minimal isometric dilation (resp. minimal coisometric extension) of the compression  $T_\mathcal{M}$ .

We denote by  $Q, Q_*, A, A_*$  the orthogonal projections of  $\mathcal{U}$  onto  $\mathcal{S}, \mathcal{S}_*, \mathcal{R}, \mathcal{R}_*$  and we denote by  $Q^\mathcal{M}, Q_*^\mathcal{M}, A^\mathcal{M}, A_*^\mathcal{M}$  the orthogonal projections of  $\mathcal{U}^\mathcal{M}$ , the space of the minimal unitary dilation of  $T_\mathcal{M}$ , onto  $\mathcal{S}^\mathcal{M}, \mathcal{S}_*^\mathcal{M}, \mathcal{R}^\mathcal{M}, \mathcal{R}_*^\mathcal{M}$  the spaces associated in an obvious way to the minimal isometric dilation and the minimal coisometric extension of  $T_\mathcal{M}$ .



If  $\Gamma$  is any Borel subset of  $\mathbb{T}$  (satisfying  $0 \leq m(\Gamma) \leq 1$ ), we denote by  $M_\Gamma$  the absolutely continuous unitary operator on  $L^2(\Gamma)$  defined by:

$$(M_\Gamma x)(e^{it}) = e^{it}x(e^{it}), \quad x \in L^2(\Gamma), \quad e^{it} \in \Gamma.$$

As to the multiplicity of an absolutely continuous unitary operator on a Borel subset of  $\mathbb{T}$ , the following (standard) formulation will be convenient for our purposes:

DEFINITION 2.1. Let  $R \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$  be an absolutely continuous unitary operator and let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ . We say that the multiplicity of  $R$  is greater than or equal to  $n, n \geq 1$  on  $\sigma$  if there exists a reducing subspace  $\mathcal{R}_0$  for  $R$  such that  $R_0 := R|_{\mathcal{R}_0}$  is unitarily equivalent to  $(M_\sigma)^{(n)}$  on  $(L^2(\sigma))^{(n)}$ , the  $n$ -fold ampliation.

We recall that if  $T$  is an arbitrary a.c.c. in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  and if  $\sigma$  is a Borel subset of  $\mathbb{T}$ , then  $\sigma$  is said to be essential for  $T$  and we write  $\sigma \subset \text{ess}(T)$  (cf. Definition 3.1 in [6]) if:

$$\|f(T)\| \geq \|f|_\sigma\|_\infty, \quad f \in H^\infty(\mathbb{T}).$$

We also recall that a  $C_0$ . (resp.  $C_{.0}$ ) contraction is a contraction such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n h\| = 0$  (resp.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n} h\| = 0$ )  $h \in \mathcal{H}$ . This is equivalent to  $\Sigma_{*,T} = \emptyset$  (resp.  $\Sigma_T = \emptyset$ ). On the other hand a  $C_1$ . (resp.  $C_{.1}$ ) contraction is a contraction such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n h\| = 0 \Rightarrow h = 0$  (resp.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n} h\| = 0 \Rightarrow h = 0$ ).

We will use the very useful decomposition of a contraction  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  introduced in [13], p. 73, namely:

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$$

relative to the orthogonal decomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ , where  $\mathcal{H}_0$  is defined by  $\mathcal{H}_0 := \{x \in \mathcal{H} \text{ such that } \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\| = 0\}$ . By construction we have  $T_0 \in C_0$ . and  $T_1 \in C_1$ .. We denote by  $E_0$  the maximal essential Borel set for  $T_0$  (unique up to Borel sets of Lebesgue measure equal zero). Since  $T_0 \in C_0$ . we get that  $E_0 = E_{T_0}^l$  (cf. Proposition 4.5 in [5]) and if we define  $E_1$  by  $E_1 = \mathbb{T} \setminus E_0$  we have  $E_1 \subset \text{ess}(T_1) \subset E_{T_1}^r$  whenever  $T \in \mathbb{A}$  (cf. Proposition 1.3 in [6] and Proposition 4.5. in [5]).

We now state some elementary observations important in the sequel.

- If  $\mathcal{M}$  is an invariant subspace for  $T$  and  $T' = T|_{\mathcal{M}}$  then  $x \overset{T}{\square} y = x \overset{T'}{\square} y'$  for all  $x \in \mathcal{M}$  and  $y \in \mathcal{H}$  with  $y' = P_{\mathcal{M}}y$ .

- If  $\mathcal{J}$  is a semi-invariant subspace for  $T$  and  $Y$  denotes the compression of  $T$  to  $\mathcal{J}$ , then  $x \overset{T}{\square} y = x \overset{Y}{\square} y$  for all  $x, y \in \mathcal{J}$ .

– With the above notation, for all  $x \in \mathcal{H}$  and all  $v \in \mathcal{B}$ , we have the following equalities:  $x \overset{U}{\square} v = x \overset{B}{\square} v = x \overset{B}{\square} P_{\mathcal{H}}v = x \overset{T}{\square} P_{\mathcal{H}}v$ .

– For all  $u \in \mathcal{U}_+$  and all  $y \in \mathcal{H}$ ,  $u \overset{U}{\square} y = u \overset{U_+}{\square} y = P_{\mathcal{H}}u \overset{U_+}{\square} y = P_{\mathcal{H}}u \overset{T}{\square} y$ .

– For all  $x, v \in \mathcal{B}$ ,  $x \overset{B}{\square} v = Qx \overset{S^*}{\square} Qv + A_*x \overset{R_*}{\square} A_*v$ .

– For all  $u, y \in \mathcal{U}_+$ ,  $u \overset{U}{\square} y = Q_*u \overset{S_*}{\square} Q_*y + Au \overset{R}{\square} Ay$ .

The following technical lemmas are very useful.

LEMMA 2.2. *Let  $T$  be an a.c.c. on  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Then for any  $w \in \mathcal{H}$  and any sequence  $(u_k)_k$  (resp.  $(v_k)_k$ ) in  $\mathcal{H}$  such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k \square w\| = 0$  (resp.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w \square v_k\| = 0$ ) we have:*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|Qu_k \square w\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_*u_k \square w\| = 0 \\ (\text{resp. } \lim_{k \rightarrow \infty} \|w \square Q_*v_k\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|w \square Av_k\| = 0). \end{aligned}$$

LEMMA 2.3. *Let  $T$  be an a.c.c. on  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Then for any  $w \in \mathcal{H}$  and any sequence  $(u_k)_k$  in  $\mathcal{H}$  which tends weakly to 0, we have:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w \square Qu_k\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_*u_k \square w\| = 0.$$

LEMMA 2.4. *Let  $T$  be an a.c.c. on  $\mathcal{H}$ . Then for any  $h \in \mathcal{H}$ , we have:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|QT^n h\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_*T^{*n} h\| = 0.$$

LEMMA 2.5. *For any  $x$  in  $\mathcal{H}$  and any function  $f$  in  $H^\infty$ , we have:*

$$\begin{cases} f(S^*)Qx = Q(f(T)x); \\ f(R_*)A_*x = A_*(f(T)x); \\ f(S_*)Q_*x = Q_*(f(T^*)x); \\ f(R^*)Ax = A(f(T^*)x). \end{cases}$$

Besides the sesquilinear map  $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow x \square y \in L^1/H_0^1$  there is also a fundamental functional sesquilinear map associated to an a.c.c.  $T$ . It is convenient to define it first for its minimal unitary dilation,  $U$ . Since  $U$  is absolutely continuous, the family  $\{\mu_{x,y}, x, y \in \mathcal{U}\}$  of elementary spectral measures attached to  $U$  (defined by  $\int_{\mathbb{T}} f d\mu_{x,y} = (f(U)x, y)$  for  $f$  continuous on  $\mathbb{T}$ ) provides a sesquilinear

map  $(x, y) \rightarrow x \cdot y = \frac{d\mu_{x,y}}{dm}$  from  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$  into  $L^1(\mathbb{T})$ . If  $U$  is  $M_\alpha$  (the operator of multiplication by the position function) acting on some vector-valued Lebesgue Hilbert space  $L^2(\mathbb{T}, E)$  then  $x \cdot y(\xi) = \langle x(\xi), y(\xi) \rangle_E, \xi \in \mathbb{T}$ . In particular if  $E = \mathbb{C}$  then  $x \cdot y = x\bar{y}$ . Note also an immediate consequence of the definitions:

$$[x \cdot y] = x \square y \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{H}.$$

If  $T$  is an arbitrary a.c.c. on  $\mathcal{H}$  we define  $x \cdot y$  for  $x, y \in \mathcal{H}$  by  $x \cdot y = x \overset{T}{\square} y = x \overset{U}{\square} y$ .

3. PRELIMINARY RESULTS

First, we give lemmas which are important steps in the proof of the next propositions.

LEMMA 3.1. *Suppose  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  is an a.c.c. acting on  $\mathcal{H}$ . Then for any  $h \in \mathcal{H}$  we have:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n h \square w\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|w \square T^{*n} h\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}.$$

*Proof.* We will just give the proof of the first assertion. The second one can be deduced from similar arguments. Indeed we have:

$$\|A_* T^n h \square w\| = (g_n(R_*) A_* T^n h, w), \quad w \in \mathcal{H}$$

for some  $g_n$  of norm 1 in  $H^\infty(\mathbb{T})$ ; thus (recall that  $A_* T^n h = R_*^n A_* h$ )

$$\|A_* T^n h \square w\| = (g_n(R_*) R_*^n A_* h, w) = \langle g_n \alpha^n, A_* h \square w \rangle, \quad w \in \mathcal{H}.$$

Since the sequence  $(g_n \alpha^n)_n$  converges weak\* to 0 in  $H^\infty(\mathbb{T})$ , we obtain:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_* T^n h \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}.$$

This combined with the fact that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|QT^n h\| = 0$  (see Lemma 2.4) easily leads to the above lemma. ■

Now we present two lemmas of factorization which will be important steps in the proof of the lemmas of approximation.

LEMMA 3.2. *Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ , let  $l$  be in  $L^1(\sigma)$  and  $f, g$  be some elements of  $L^2(\sigma)$ ,  $0 < \rho \leq 1/2$ . Then there exist  $u \in H^2$  and  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\sigma)$  such that:*

$$\begin{cases} l + f \cdot g = (f + \alpha^n u) \cdot c_n, & n \in \mathbb{N}; \\ \|c_n\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} (\|l\|_1^{1/2} + \|g\|_2), & n \in \mathbb{N}; \\ \|u\|_2 \leq 2\|l\|_1^{1/2}. \end{cases}$$

*Similarly there exist also  $v \in H^2$  and  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\sigma)$  such that:*

$$\begin{cases} l + f \cdot g = d_n \cdot (g + \alpha^n v), & n \in \mathbb{N}; \\ \|d_n\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} (\|l\|_1^{1/2} + \|f\|_2), & n \in \mathbb{N}; \\ \|v\|_2 \leq 2\|l\|_1^{1/2}. \end{cases}$$

*Proof.* We will just give the proof of the first assertion. The second one can be deduced from similar arguments. Let  $0 < \rho \leq 1/2$ ,  $\varepsilon > 0$  such that  $\varepsilon \leq \frac{\rho}{2-\rho}$ . Since  $|l| + \nu$  is log-integrable for any  $\nu > 0$ , there exists a function  $l'$  in  $H^2$  such that  $|l| + \nu = |l'|^2$  (cf. [11], p. 53). Moreover, we can choose  $\nu > 0$  in order to have  $\|l'\|_2 \leq (1 + \varepsilon)\|l\|_1^{1/2}$ . If we set  $l'' := l/l'$ , it is clear that  $l'' \in L^2(\sigma)$  and that we have  $l = l' \cdot l''$ .

We set  $\Omega := \{e^{it}; |f|(e^{it}) < |l'|(e^{it})\}$  and let  $\theta$  be a function in  $H^\infty$  such that:

$$|\theta| = \begin{cases} 2 - \rho & \text{on } \Omega; \\ \rho & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The existence of such a function is granted by [11], p. 53. We obtain that:

$$|f + \theta \alpha^n l'| \geq (1 - \rho) \max\{|f|, |l'|\}.$$

We set  $Z := \{e^{it} \in \sigma; f(e^{it}) = -(\theta \alpha^n l')(e^{it})\}$  and we define the function  $c_n$  by:

$$\bar{c}_n(e^{it}) = \begin{cases} \frac{l + f \cdot g}{f + \theta \alpha^n l'}(e^{it}) & \text{if } e^{it} \in \sigma \setminus Z; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We easily get:  $|c_n| \leq \frac{1}{1-\rho}(|l''| + |g|)$ , which proves that  $c_n \in L^2(\sigma)$  and moreover  $\|c_n\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho}(\|l\|_1^{1/2} + \|g\|_2)$ . We obtain that:

$$l + f \cdot g = (f + \alpha^n u) \cdot c_n \quad \text{where } u \in H^2, u = \theta l'.$$

So we get  $\|u\|_2 \leq \|\theta\|_\infty \|l'\|_2 \leq 2\|l\|_1^{1/2}$  and the proof is complete. ■

The proof of the next lemma of factorization is left to the reader since it uses similar arguments. The starting point is the fact that any function  $l \in L^1(\sigma)$  can be written  $l = l' \cdot l''$  where  $l'$  and  $l''$  are some elements of  $L^2(\sigma)$ .

LEMMA 3.3. *Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ , let  $l$  be in  $L^1(\sigma)$  and let  $f, g$  be some elements of  $L^2(\sigma)$ . Then there exist  $u \in L^2(\sigma)$  and  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\sigma)$  such that:*

$$\begin{cases} l + f \cdot g = (f + \alpha^n u) \cdot c_n, & n \in \mathbb{N}; \\ \|c_n\|_2 \leq \|l\|_1^{1/2} + \|g\|_2, & n \in \mathbb{N}; \\ \|u\|_2 \leq 2\|l\|_1^{1/2}. \end{cases}$$

*There exist also  $v \in L^2(\sigma), (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\sigma)$  such that:*

$$\begin{cases} l + f \cdot g = d_n \cdot (g + \alpha^n v), & n \in \mathbb{N}; \\ \|d_n\|_2 \leq \|l\|_1^{1/2} + \|f\|_2, & n \in \mathbb{N}; \\ \|v\|_2 \leq 2\|l\|_1^{1/2}. \end{cases}$$

NOTATION. From now on, if  $\mathcal{R}_*^1$  (resp.  $\mathcal{R}^1$ ) is a reducing subspace for  $R_*$  (resp.  $R$ ), we shall denote by  $A_{*1}$  (resp.  $A_1$ ) the orthogonal projection onto  $\mathcal{R}_*^1$  (resp.  $\mathcal{R}^1$ ) and  $A_{*2}$  (resp.  $A_2$ ) the orthogonal projection onto  $\mathcal{R}_* \ominus \mathcal{R}_*^1$  (resp.  $\mathcal{R} \ominus \mathcal{R}^1$ ).

If a unitary operator  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  is of multiplicity greater than or equal to  $n$  on a Borel set  $\sigma$ , we write:  $\text{mult}(U) \geq n$  on  $\sigma$ .

Now we give the first lemma of approximation, which can be seen as a localization (in terms of the Borel set) and generalization (in terms of the form of the vectors obtained) of Theorem 3.11 in [8].

LEMMA 3.4. *Let  $T$  be an a.c.c.,  $B$  its minimal coisometric extension,  $B = S^* \oplus R_*$ . Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ . We suppose that there exists a reducing subspace  $\mathcal{R}'_*$  for  $R_*$  such that:*

$$\begin{cases} \text{mult}(R'_*) \geq 1 \text{ on } \sigma \text{ where } R'_* := R_*|_{\mathcal{R}'_*}; \\ \text{span} \{R_*^n(\mathcal{R}'_* \cap (A_*\mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}'_*. \end{cases}$$

Let  $a \in \mathcal{H}, b \in \mathcal{R}_*, F \in L^1(\sigma), \varepsilon > 0, 0 < \rho \leq 1/2$ . Then there exist  $h \in \mathcal{H}, c_n \in \mathcal{R}_*^1$  ( $\mathcal{R}_*^1$  is a reducing subspace for  $R_*$  included in  $\mathcal{R}'_*$  such that  $R_*|_{\mathcal{R}_*^1}$  is unitarily equivalent to  $M_\sigma$ ) such that, for any  $n \geq 0$ , we have:

$$\begin{cases} \|F + A_*a \cdot b - A_*(a + T^n h) \cdot (c_n + b_2)\| < \varepsilon \text{ where } b_2 = b - A_{*1}b; \\ \|c_n\| \leq \frac{1}{1-\rho}(\|A_{*1}b\| + \|F\|_1^{1/2}). \end{cases}$$

Moreover, we may assume  $\|T^n h\| \leq 2\|F\|_1^{1/2}$  for all  $n \geq 1$ .

*Proof.* We consider the isometry  $W$  defined by  $W := R_*|_{(A_*\mathcal{H})^-}$ . If  $W|_{(A_*\mathcal{H})^- \cap \mathcal{R}'_*}$  is unitary, we get  $\mathcal{R}'_* = \mathcal{R}'_* \cap (A_*\mathcal{H})^-$ , which implies that  $\mathcal{R}'_* \subset (A_*\mathcal{H})^-$ . Since  $\text{mult}(R'_*) \geq 1$  on  $\sigma$ , there exists a reducing subspace  $\mathcal{R}_*^1$  for  $R_*$  such that  $\mathcal{R}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-$  and such that  $R_*|_{\mathcal{R}_*^1}$  is unitarily equivalent to  $M_\sigma$ .

If  $W|_{(A_*\mathcal{H})^- \cap \mathcal{R}'_*}$  is not unitary, using the Wold decomposition, we know there exists a reducing subspace  $\mathcal{W}_*^1$  for  $W$  such that  $W|_{\mathcal{W}_*^1} (= R_*|_{\mathcal{W}_*^1})$  is unitarily equivalent to  $S$ , the standard unilateral shift acting on  $H^2$ . Moreover we have  $\mathcal{W}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-$ . We recall that in this case there also exists a reducing subspace  $\mathcal{R}_*^1$  for  $R_*$  such that  $R_*|_{\mathcal{R}_*^1}$  is unitarily equivalent to  $M_\sigma$ .

We write:  $F + A_*a \cdot b = F + A_{*1}a \cdot A_{*1}b + A_{*2}a \cdot A_{*2}b$ . First we modify  $F + A_{*1}a \cdot A_{*1}b$ . In the particular case where  $\mathcal{R}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-$ , using Lemma 3.3

and the vector-function identification  $\mathcal{R}_*^1 = L^2(\sigma)$ , there exist  $u \in \mathcal{R}_*^1, (c_n)_n$  in  $\mathcal{R}_*^1$  such that:

$$\begin{cases} F + A_{*1}a \cdot A_{*1}b = (A_{*1}a + R_*^n u) \cdot c_n; \\ \|c_n\| \leq \|F\|_1^{1/2} + \|A_{*1}b\|; \\ \|u\| \leq 2\|F\|_1^{1/2}. \end{cases}$$

If  $\mathcal{R}_*^1 \not\subset (A_*\mathcal{H})^-$ , using Lemma 3.2 and the natural vector-function identifications  $\mathcal{R}_*^1 = L^2(\sigma), \mathcal{W}_*^1 = H^2$ , there exist  $u' \in \mathcal{W}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-, (c'_n)_n$  in  $\mathcal{R}_*^1$  such that:

$$\begin{cases} F + A_{*1}a \cdot A_{*1}b = (A_{*1}a + R_*^n u') \cdot c'_n; \\ \|c'_n\| \leq \frac{1}{1-\rho}(\|F\|_1^{1/2} + \|A_{*1}b\|); \\ \|u'\| \leq 2\|F\|_1^{1/2}. \end{cases}$$

Since  $\mathcal{R}_*^1$  is a reducing subspace for  $R_*$ , we get:

$$F + A_*a \cdot A_*b = (A_*a + R_*^n u) \cdot (c_n + A_{*2}b) \quad c_n, u \in \mathcal{R}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-$$

or

$$F + A_*a \cdot A_*b = (A_*a + R_*^n u') \cdot (c'_n + A_{*2}b) \quad c'_n \in \mathcal{R}_*^1, u' \in \mathcal{W}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-.$$

We assume  $\|c_n + A_{*2}b\| \neq 0$  and  $\|c'_n + A_{*2}b\| \neq 0$  otherwise the proof is immediate taking  $h = 0, c_n = A_{*1}b$ . Now, according to the inclusion  $\mathcal{R}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-$  or  $\mathcal{W}_*^1 \subset (A_*\mathcal{H})^-$ , we are able to find  $h \in \mathcal{H}, h' \in \mathcal{H}$  so that:

$$\begin{cases} \|u - A_*h\| < \frac{\varepsilon}{2\|c_n + A_{*2}b\|}; \\ \|A_{*2}h\| < \frac{\varepsilon}{2\|c_n + A_{*2}b\|}; \\ \|A_*h\| < \|u\|; \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \|u' - A_*h'\| < \frac{\varepsilon}{2\|c'_n + A_{*2}b\|}; \\ \|A_{*2}h'\| < \frac{\varepsilon}{2\|c'_n + A_{*2}b\|}; \\ \|A_*h'\| < \|u'\|. \end{cases}$$

Since  $R_*$  is an isometry and considering the equality  $R_*^n A_{*1}h = A_{*1}T^n h$ , we get:

$$\|R_*^n u - A_{*1}T^n h\| < \frac{\varepsilon}{\|c_n + A_{*2}b\|}$$

and

$$\|R_*^n u' - A_{*1}T^n h'\| < \frac{\varepsilon}{\|c'_n + A_{*2}b\|},$$

which easily leads to the desired inequality. Since  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n h\| = \|A_*h\|$  and since  $\|A_*h\| < \|u\|$ , if  $n$  is large enough, we can get  $\|T^n h\| \leq 2\|F\|_1^{1/2}$ . Thus, replacing  $h$  by  $T^{n_0}h$  where  $n_0$  is a sufficiently large integer, we may assume  $\|T^n h\| \leq 2\|F\|_1^{1/2}$  for all  $n \geq 1$ . ■

Now we state the dual version of the previous lemma, whose proof is left to the reader since it can be deduced from similar arguments.

LEMMA 3.5. *Let  $T$  be an a.c.c.,  $U_+$  its minimal isometric dilation,  $U_+ = S_* \oplus R$ . Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ . We suppose that there exists a reducing subspace  $\mathcal{R}'$  for  $R$  such that:*

$$\begin{cases} \text{mult}(R') \geq 1 \text{ on } \sigma \text{ where } R' := R|_{\mathcal{R}'}; \\ \text{span} \{R^n(\mathcal{R}' \cap (A\mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}'. \end{cases}$$

Let  $a \in \mathcal{R}, b \in \mathcal{H}, F \in L^1(\sigma), \varepsilon > 0, 0 < \rho \leq 1/2$ . Then there exist  $h \in \mathcal{H}, d_n \in \mathcal{R}_1$  ( $\mathcal{R}_1$  is a reducing subspace for  $R$  included in  $\mathcal{R}'$  such that  $R|_{\mathcal{R}_1}$  is unitarily equivalent to  $M_\sigma$ ) such that, for any  $n \geq 0$ , we have:

$$\begin{cases} \|F + a \cdot Ab - (d_n + a_2) \cdot A(b + T^{*n}h)\| < \varepsilon \text{ where } a_2 = a - A_1a; \\ \|d_n\| \leq \frac{1}{1-\rho}(\|A_1a\| + \|F\|_1^{1/2}). \end{cases}$$

Moreover, we may assume  $\|T^{*n}h\| \leq 2\|F\|_1^{1/2}$  for all  $n \geq 1$ .

For an  $\mathbb{A}_{1,\aleph_0}$  version of Lemma 3.4 and an  $\mathbb{A}_{\aleph_0,1}$  version of Lemma 3.5, we need the following lemma.

LEMMA 3.6. *Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ . Let  $(F_k)_{k \geq 1}$  be a norm summable sequence of functions in  $L^1(\sigma)$ , let  $f, (g_k)_{k \geq 1}$  be in  $L^1(\sigma), 0 < \rho \leq 1/2$ . Then for every  $k \geq 1$ , there exist  $u$  in  $H^2, (c_{k,n})_n$  in  $L^2(\sigma)$  such that:*

$$\begin{cases} F_k + f \cdot g_k = (f + \alpha^n u) \cdot c_{k,n}; \\ \|u\|_2 \leq 2 \left( \sum_{k \geq 1} \|F_k\|_1 \right)^{1/2}; \\ \|c_{k,n}\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} (\|F_k\|_1^{1/2} + \|g_k\|_2) \text{ for any } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

There also exist  $v$  in  $H^2, (d_{k,n})_n$  in  $L^2(\sigma)$  such that:

$$\begin{cases} F_k + f_k \cdot g = d_{k,n} \cdot (g + \alpha^n v); \\ \|v\|_2 \leq 2 \left( \sum_{k \geq 1} \|F_k\|_1 \right)^{1/2}; \\ \|d_{k,n}\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho} (\|F_k\|_1^{1/2} + \|f_k\|_2) \text{ for any } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

*Proof.* We just give the proof of the first assertion. The second one can be deduced from similar arguments. Let  $F = \sum_{k \geq 1} |F_k|$  and let  $0 < \rho \leq 1/2, \varepsilon > 0$  be some positive reals such that  $\varepsilon \leq \frac{\rho}{2-\rho}$ . Since  $F + \nu$  is log-integrable for any

$\nu > 0$ , there exists a function  $h \in H^2$  such that  $F + \nu = |h|^2$ . Moreover we can choose  $\nu > 0$  in order to have  $\|h\|_2 \leq (1 + \varepsilon)\|F\|_1^{1/2}$ . We consider the Borel set  $\Omega = \{e^{it}; |f|(e^{it}) < |h|(e^{it})\}$  and we define a function  $\theta \in H^\infty$  such that:

$$|\theta| = \begin{cases} 2 - \rho & \text{on } \Omega; \\ \rho & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The existence of the functions  $h$  and  $\theta$  are granted by [11], p. 53. Then, for a given  $n$ , define the measurable function  $c_{k,n}$  by:

$$c_{k,n} = \begin{cases} \frac{F_k + f \cdot g_k}{f + \theta \alpha^n h} & \text{on } \sigma \setminus \{f + \theta \alpha^n h = 0\}; \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

As in Lemma 3.2, we easily get  $c_{k,n} \in L^2(\sigma)$  and  $\|c_{k,n}\|_2 \leq \frac{1}{1-\rho}(\|F_k\|_1^{1/2} + \|g_k\|_2)$ . Now we set  $u = \theta h \in L^2(\sigma)$ . So we get  $\|u\|_2 \leq 2\left(\sum_{k \geq 1} \|F_k\|_1\right)^{1/2}$  and  $F_k + f \cdot g_k = (f + \alpha^n u) \cdot c_{k,n}$ , which ends the proof of the lemma. ■

Using the previous lemma, we can state the following propositions:

**PROPOSITION 3.7.** *Let  $T$  be an a.c.c.,  $B = S^* \oplus R_*$  its minimal coisometric extension. Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ . We suppose that there exists a reducing subspace  $\mathcal{R}'_*$  for  $R_*$  such that:*

$$\begin{cases} \text{mult}(R'_*) \geq 1 \text{ on } \sigma \text{ where } R'_* := R_*|_{\mathcal{R}'_*}; \\ \text{span} \{R_*^n(\mathcal{R}'_* \cap (A_*\mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}'_*. \end{cases}$$

Let  $a \in \mathcal{H}$ ,  $(b_k)_k \in \mathcal{R}_*$ ,  $(F_k)_k$  a norm summable sequence of functions in  $L^1(\sigma)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \rho \leq 1/2$ . Then there exist  $h \in \mathcal{H}$  and  $(c_{n,k})_n \in \mathcal{R}_*^1$  ( $\mathcal{R}_*^1$  is some reducing subspace for  $R_*$  included in  $\mathcal{R}'_*$  such that  $R_*|_{\mathcal{R}_*^1}$  is unitarily equivalent to  $M_\sigma$ ) such that, for any  $n, k \geq 0$ , we have:

$$\begin{cases} \|F_k + A_* a \cdot b_k - A_*(a + T^n h) \cdot (c_{n,k} + b_{2,k})\| < \varepsilon \text{ where } b_{2,k} = b_k - A_{*1} b_k; \\ \|c_{n,k}\| \leq \frac{1}{1-\rho}(\|A_{*1} b_k\| + \|F_k\|_1^{1/2}). \end{cases}$$

Moreover, we may assume  $\|T^n h\| \leq 2\left(\sum_{k \geq 1} \|F_k\|_1\right)^{1/2}$ .

As usual this lemma has a dual version whose statement is left to the reader.



PROPOSITION 3.8. *Let  $T$  be an a.c.c.,  $U_+$  its minimal isometric dilation,  $U_+ = S_* \oplus R$ . Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$ . We suppose that there exists a reducing subspace  $\mathcal{R}'$  for  $R$  such that:*

$$\begin{cases} \text{mult}(R') \geq 1 \text{ on } \sigma \text{ where } R' := R|_{\mathcal{R}'}; \\ \text{span} \{R^n(\mathcal{R}' \cap (A\mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}'. \end{cases}$$

Let  $(a_k)_k \in \mathcal{R}, b \in \mathcal{H}, (F_k)_k$  a norm summable sequence of functions in  $L^1(\sigma)$ ,  $\varepsilon > 0, 0 < \rho \leq 1/2$ . Then there exist  $h \in \mathcal{H}, (d_{n,k})_n \in \mathcal{R}_1$  ( $\mathcal{R}_1$  is some reducing subspace for  $R$  included in  $\mathcal{R}'$  such that  $R|_{\mathcal{R}_1}$  is unitarily equivalent to  $M_\sigma$ ) such that, for any  $n \geq 0$ , we have:

$$\begin{cases} \|F_k + a_k \cdot Ab - (d_{n,k} + a_{2,k}) \cdot A(b + T^{*n}h)\| < \varepsilon \text{ where } a_{2,k} = a_k - A_1 a_k; \\ \|d_{n,k}\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|A_1 a_k\| + \|F_k\|_1^{1/2}). \end{cases}$$

Moreover, we may assume  $\|T^{*n}h\| \leq 2 \left( \sum_{k \geq 1} \|F_k\|_1 \right)^{1/2}$ .

Using matricial tools (see for example Part I, Section 1.4 in [7]) which are helpful in making certain arguments more transparent, we easily state the following proposition:

PROPOSITION 3.9. *Let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  be an a.c.c. and let  $\{f^{i,j}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$  (where  $k$  and  $n$  are some positive integers) be a collection of functions in the unit ball of  $L^1(X_T)$ . Then there exist sequences of  $\mathcal{H}, (x_m^i)_m$  and  $(y_m^j)_m$  such that:*

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f^{i,j}] - x_m^i \square y_m^j\| = 0; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|w \square y_m^j\| = 0, & w \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m^i \square w\| = 0, & w \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq k; \\ \|x_m^i\| \leq n, & m \geq 1, 1 \leq i \leq k; \\ \|y_m^j\| \leq k, & m \geq 1, 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

The next propositions (Propositions 3.10, 3.11, and 3.12) are very important tools in the proof of the main results. They show we can get some results of approximation where we can choose the sequences of approximation in the space  $\mathcal{H}_1$  or  $\mathcal{H}_0$  (it depends on the choice of the elements of the predual of  $H^\infty$ ) with a “vanishing condition” extended to the whole space (recall that the subspaces  $\mathcal{H}_1$  and  $\mathcal{H}_0$  are those involved in the canonical  $C_0 - C_1$  triangulation introduced in Section 2). The following proposition slightly generalizes Proposition 2.2, Part V in [7]. The main improvement is the fact we achieve the approximation for a collection of functions.

PROPOSITION 3.10. *Suppose  $T$  is an a.c.c.. Let  $(f^j)_{1 \leq j \leq n}$  be a finite sequence of elements of  $L^1(\Sigma_{*,1})$  such that  $\|f^j\|_1 \leq 1$  (the integer  $n$  is arbitrarily large) and let  $a, b^j$  be some elements in  $\mathcal{H}_1$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Let  $\rho$  be a positive real such that  $\rho < 1/2$ . Then there exist sequences  $(x_m)_m$  and  $(y_m^j)_m$  in  $\mathcal{H}_1$  ( $1 \leq j \leq n$ ) such that:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f^j] + a \square b^j - x_m \square y_m^j\| = 0, \quad 1 \leq j \leq n; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|(x_m - a) \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}; \\ \|a - x_m\| \leq 2 \left( \sum_{j=1}^n \|f^j\|_1 \right)^{1/2}, \quad m \geq 1; \\ \|y_m^j\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|b^j\| + \|f^j\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq j \leq n, m \geq 1. \end{array} \right.$$

The following proposition is the dual version of Proposition 3.10.

PROPOSITION 3.11. *Suppose  $T$  is an a.c.c. and let  $(f^i)_{1 \leq i \leq k}$  be a finite sequence of elements of  $L^1(\Sigma_1)$  (the integer  $k$  is arbitrarily large) and  $a^i, b, 1 \leq i \leq k$  in  $\mathcal{H}_1$ . Then there exist sequences  $(x_n^i)_n$  and  $(y_n)_n$  in  $\mathcal{H}_1$  ( $1 \leq i \leq k$ ) such that:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \|[f^i] + a^i \square b - x_n^i \square y_n\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|w \square (y_n - b)\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}; \\ \|y_n - b\| \leq 2 \left( \sum_{i=1}^k \|f^i\|_1 \right)^{1/2}, \quad n \geq 1; \\ \|x_n^i\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|a^i\| + \|f^i\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq i \leq k, n \geq 1. \end{array} \right.$$

The next proposition states precisely the approximation for a collection of functions in  $L^1(E_0)$ .

PROPOSITION 3.12. *Suppose  $T$  is an a.c.c. and let  $(f^i)_{1 \leq i \leq k}$  be a finite sequence of elements of  $L^1(E_0)$  (the integer  $k$  is arbitrarily large) and  $a^i, b, 1 \leq i \leq k$  in  $\mathcal{H}_0$ . Then there exist sequences  $(x_n^i)_n$  and  $(y_n)_n$  in  $\mathcal{H}_0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) such that:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \|[f^i] + a^i \square b - x_n^i \square y_n\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|w \square (y_n - b)\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}; \\ \|y_n - b\| \leq 2 \left( \sum_{i=1}^k \|f^i\|_1 \right)^{1/2}, \quad n \geq 1; \\ \|x_n^i\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|a^i\| + \|f^i\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq i \leq k, n \geq 1. \end{array} \right.$$

## 4. TECHNIQUES OF APPROXIMATION INVOLVING MULTIPLICITY

Let  $W \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$  be an absolutely continuous isometry and let  $\widetilde{W} \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{W}})$  be its minimal unitary extension. We define the multiplicity of the isometry  $W$  as the multiplicity of  $\widetilde{W}$ .

LEMMA 4.1. *Let  $W \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$  be an absolutely continuous isometry. Let  $\mathcal{M}$  be a subset of  $\mathcal{W}$  and let  $\mathcal{M}_r$  be the reducing subspace for  $W$  generated by  $\mathcal{M}$  and  $\widetilde{\mathcal{M}}$  the reducing subspace for  $\widetilde{W}$  generated by  $\mathcal{M}$ . Then we have:*

(i)  $\widetilde{\mathcal{M}}_r = \widetilde{\mathcal{M}}$ , that is to say, the reducing subspace for  $\widetilde{W}$  generated by  $\mathcal{M}_r$  is equal to  $\widetilde{\mathcal{M}}$ , and

(ii)  $\widetilde{W}^n(\mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r) \perp \widetilde{\mathcal{M}}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  and consequently, the minimal unitary extension of  $W|_{\mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r}$  is  $\widetilde{W}|_{\widetilde{\mathcal{M}}^\perp}$ .

*Proof.* By definition we have  $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_r$  where  $\widetilde{\mathcal{M}}_r$  is a reducing subspace for  $\widetilde{W}$ . Hence we get  $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_r$ . If we suppose that the inclusion is a strict one we get a contradiction by minimality of the unitary extension  $\widetilde{W}$ .

Now, for any  $y \in \mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r$  we get:

$$(\widetilde{W}^k y, \widetilde{W}^n \mathcal{M}) = (W^k y, W^n \mathcal{M}) \quad \text{for any } k, n \geq 0.$$

Thus we have  $\widetilde{W}^n(\mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r) \perp \widetilde{\mathcal{M}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , which implies that the minimal unitary extension of  $W|_{\mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r}$  lives on  $\widetilde{\mathcal{M}}^\perp$ . In fact we have:

$$W = W|_{\mathcal{M}_r} \oplus W|_{\mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r} \quad \text{and} \quad \widetilde{W} = \widetilde{W}|_{\widetilde{\mathcal{M}}} \oplus \widetilde{W}|_{\widetilde{\mathcal{M}}^\perp}$$

where  $\widetilde{W}|_{\widetilde{\mathcal{M}}}$  is the minimal unitary extension of  $W|_{\mathcal{M}_r}$ . By minimality of  $\widetilde{W}$  and since the minimal unitary extension of  $W|_{\mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r}$  is defined on  $\widetilde{\mathcal{M}}^\perp$ , we get that the minimal unitary extension of  $W|_{\mathcal{W} \ominus \mathcal{M}_r}$  is  $\widetilde{W}|_{\widetilde{\mathcal{M}}^\perp}$ , which ends the proof of the lemma. ■

NOTATION. If  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$  is a unitary operator and if  $a_1, \dots, a_k$  are some elements of  $\mathcal{U}$ , we denote by  $\text{red}_U(a_1, \dots, a_k)$  the reducing subspace for  $U$  generated by  $a_1, \dots, a_k$ .

Now, we are able to prove the following lemma which is essential to our understanding of multiplicity.

LEMMA 4.2. *Let  $\sigma$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}$  and let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  be an a.c.c. Suppose that  $\text{mult}(R_*) \geq n$  (resp.  $\text{mult}(R) \geq n$ ) on  $\sigma$  and let  $x_1, \dots, x_{n-1}$  be some elements of  $\mathcal{H}$ . Then there exists a reducing subspace  $\mathcal{R}'_*$  (resp.  $\mathcal{R}'$ ) for  $R_*$  (resp.  $R$ ) such that:*

- (i)  $\mathcal{R}'_* \perp \text{red}_{R_*}(A_*x_1, \dots, A_*x_{n-1})$  (resp.  $\mathcal{R}' \perp \text{red}_R(Ax_1, \dots, Ax_{n-1})$ );
- (ii)  $\text{mult}(R_*|_{\mathcal{R}'_*}) \geq 1$  (resp.  $\text{mult}(R|_{\mathcal{R}'}) \geq 1$ ) on  $\sigma$ ;
- (iii)  $\text{span}\{R_*^n(\mathcal{R}'_* \cap (A_*\mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}'_*$  (resp.  $\text{span}\{R^n(\mathcal{R}' \cap (A\mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}'$ ).

*In particular we have  $\mathcal{R}'_* \cap (A_*\mathcal{H})^- \neq (0)$  (resp.  $\mathcal{R}' \cap (A\mathcal{H})^- \neq (0)$ ).*

*Proof.* We establish this lemma in the case  $\text{mult}(R_*) \geq n$  on  $\sigma$ . The assertion of this lemma in the case  $\text{mult}(R) \geq n$  on  $\sigma$  can be proved using similar arguments. We set  $\mathcal{R}''_* := \text{red}_{R_*}(A_*x_1, \dots, A_*x_{n-1})$ . Remark that  $\mathcal{R}''_*$  is a closed subspace of  $(A_*\mathcal{H})^-$  satisfying  $\text{mult}(R_*|_{\mathcal{R}''_*}) \leq n-1$  on  $\sigma$ . Let us set  $W := R_*|_{(A_*\mathcal{H})^-}$  and consider  $\mathcal{M}_r := \text{red}_W\{A_*x_1, \dots, A_*x_{n-1}\}$ . Using Lemma 4.1, we have:

$$\text{red}_{R_*}\{\mathcal{M}_r\} = \text{red}_{R_*}\{A_*x_1, \dots, A_*x_{n-1}\} = \mathcal{R}''_*.$$

If  $\mathcal{R}''_* = (A_*\mathcal{H})^-$ , since  $R_*$  is the minimal unitary extension of  $W = R_*|_{(A_*\mathcal{H})^-}$ , we get that  $\mathcal{R}''_* = \mathcal{R}_*$ , which contradicts the hypothesis  $\text{mult}(R_*) \geq n$  on  $\sigma$ . Hence we consider the non-trivial invariant subspace  $\mathcal{W}'_*$  defined by  $\mathcal{W}'_* := (A_*\mathcal{H})^- \ominus \mathcal{R}''_*$ . Using Lemma 4.1, if we set  $\mathcal{R}'_* := \text{span}\{R_*^n\mathcal{W}'_*, n \in \mathbb{Z}\}$ , we get:

$$\mathcal{R}'_* \perp \mathcal{R}''_* \quad \text{and} \quad R_* = R_*|_{\mathcal{R}'_*} \oplus R_*|_{\mathcal{R}''_*}.$$

In particular we have  $\text{mult}(R_*|_{\mathcal{R}'_*}) \geq 1$  on  $\sigma$  and since  $\mathcal{W}'_* \subset \mathcal{R}'_* \cap (A_*\mathcal{H})^-$ , we get  $\text{span}\{R_*^n(\mathcal{R}'_* \cap (A_*\mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}'_*$ . ■

Now we can state the following propositions which are essential steps in the proof of the main results, that is to say, sufficient conditions for being in the class  $\mathbb{A}_{n,m}$ .

PROPOSITION 4.3. *Suppose  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  is an a.c.c. and let  $\sigma$  be a Borel set of  $\Sigma_*$ . We also suppose that  $\text{mult}(R_*) \geq k$  on  $\sigma$ . Let  $\{f^{i,j}, 1 \leq i \leq k, j \geq 1\}$  be a collection of functions in  $L^1(\sigma)$  be such that:*

$$\sum_{j \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 < \infty \quad \text{for any } i \in \{1, \dots, k\}$$

and let  $a^i \in \mathcal{H}, b^j \in \mathcal{R}_*, 1 \leq i \leq k, j \geq 1$ . Then there exist sequences  $(a_n^i)_n$  in  $\mathcal{H}, (b_n^j)_n$  in  $\mathcal{R}_*$  such that:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^{i,j} + A_* a^i \cdot b^j - A_* a_n^i \cdot b_n^j\| = 0, & 1 \leq i \leq k, j \geq 1; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q(a_n^i - a^i)\| = 0, & 1 \leq i \leq k; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a_n^i - a^i) \square w\| = 0, & w \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

*Proof.* First we show how to construct  $a_n^i, b_n^j$  for  $1 \leq i \leq k$  and  $j \geq 1$ . Let  $t_1, \dots, t_q$  a finite sequence of elements of  $\mathcal{H}, \varepsilon_1 > 0, \nu_1 > 0$  be given. We will proceed via  $k$  steps in order to construct those elements. If  $\mathcal{R}_*^{1(i)}$  is a reducing subspace for  $R_*, i \in \mathbb{N}$ , we shall denote by  $A_{*1}^{(i)}$  the orthogonal projection onto  $\mathcal{R}_*^{1(i)}$  and by  $A_{*2}^{(i)}$  the orthogonal projection onto  $\mathcal{R}_* \ominus \mathcal{R}_*^{1(i)}$ .

First, we approximate  $(f^{1,j})_{j \geq 1}$  using Proposition 3.7 and Lemma 4.2. Let  $\mathcal{R}_*^{1(1)}$  be a reducing subspace for  $R_*$  orthogonal to the reducing subspace generated by  $\{A_* a_i, 2 \leq i \leq k\}$ , such that  $\text{mult}(R_*|_{\mathcal{R}_*^{1(1)}}) \geq 1$  on  $\sigma$  and such that  $\text{span}\{R_*^n(\mathcal{R}_*^{1(1)} \cap (A_* \mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_*^{1(1)}$ . Let  $\rho$  be a real number satisfying  $0 < \rho \leq 1/2$ : By Proposition 3.7, there exist  $(c_{n,j}^{(1)})_{n \geq 1}$  in  $\mathcal{R}_*^{1(1)}$  and  $h^1$  in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \|f^{1,j} + A_* a^1 \cdot A_* b^j - A_*(a^1 + T^n h^1) \cdot (c_{n,j}^{(1)} + A_{*2}^{(1)} b^j)\| < \varepsilon_1, & n \geq 1; \\ \|c_{n,j}^{(1)}\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|A_{*1}^{(1)} b^j\| + \|f^{1,j}\|_1^{1/2}), & n \geq 1. \end{cases}$$

By Lemma 2.4 and Lemma 3.1, there exists  $n_1 \in \mathbb{N}$  such that, for any  $n \geq n_1$  we have:

$$\begin{cases} \|QT^n h^1\| < \nu_1; \\ \|T^n h^1 \square t_p\| < \nu_1, & 1 \leq p \leq q. \end{cases}$$

Now we set  $\underline{a}^1 = a^1 + T^{n_1} h^1, \underline{b}_1^j = c_{n_1,j}^{(1)} + A_{*2}^{(1)} b^j$ . For any  $i \in \{2, \dots, k\}$ , by the choice of  $\mathcal{R}_*^{1(1)}$ , we get:

$$A_* a^i \cdot A_* b^j = A_* a^i \cdot \underline{b}_1^j, j \geq 1.$$

Next, we approximate  $(f^{2,j})_{j \geq 1}$ . Let  $\mathcal{R}_*^{1(2)}$  be a reducing subspace for  $R_*$  orthogonal to the reducing subspace generated by  $\{A_* \underline{a}^1, A_* a_i, 3 \leq i \leq k\}$  such that  $\text{mult}(R_*|_{\mathcal{R}_*^{1(2)}}) \geq 1$  on  $\sigma$  and such that  $\text{span}\{R_*^n(\mathcal{R}_*^{1(2)} \cap (A_* \mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_*^{1(2)}$ .

By Proposition 3.7, there exist  $(c_{n,j}^{(2)})_{n \geq 1}$  in  $\mathcal{R}_*^{1(2)}$  and  $h^2$  in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \|f^{2,j} + A_* a^2 \cdot \underline{b}_1^j - A_*(a^2 + T^n h^2) \cdot (c_{n,j}^{(2)} + A_{*2}^{(2)} \underline{b}_1^j)\| < \varepsilon_1, & n \geq 1; \\ \|c_{n,j}^{(2)}\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|A_{*1}^{(2)} \underline{b}_1^j\| + \|f^{2,j}\|_1^{1/2}), & n \geq 1. \end{cases}$$

By Lemma 2.4 and Lemma 3.1, there exists  $n_2 \in \mathbb{N}$  such that, for any  $n \geq n_2$  we have:

$$\begin{cases} \|QT^n h^2\| < \nu_1; \\ \|T^n h^2 \square t_p\| < \nu_1, \quad 1 \leq p \leq q. \end{cases}$$

Now we set  $\underline{a}^2 = a^2 + T^{n_2} h^2$ ,  $\underline{b}_2^j = c_{n_2, j}^2 + A_{*2}^{(2)} \underline{b}_1^j$ . By the choice of  $\mathcal{R}_*^{1(2)}$ , we get:

$$\begin{cases} A_* a^i \cdot A_* \underline{b}_1^j = A_* a^i \cdot \underline{b}_2^j, & j \geq 1, 3 \leq i \leq k; \\ A_* \underline{a}^1 \cdot A_* \underline{b}_1^j = A_* \underline{a}^1 \cdot A_* \underline{b}_2^j, & j \geq 1. \end{cases}$$

Then we proceed by a finite induction. The last step consists in the approximation of  $(f^{k, j})_{j \geq 1}$ .

We suppose that  $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^{k-1}$  and  $\underline{b}_1^j, \dots, \underline{b}_{k-1}^j$  are constructed. Let  $\mathcal{R}_*^{1(k)}$  be a reducing subspace for  $R_*$  orthogonal to the reducing subspace generated by  $\{A_* \underline{a}^i, 1 \leq i \leq k-1\}$ , such that  $\text{mult}(R_*|_{\mathcal{R}_*^{1(k)}}) \geq 1$  on  $\sigma$  and such that we have  $\text{span}\{R_*^n(\mathcal{R}_*^{1(k)} \cap (A_* \mathcal{H})^-), n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{R}_*^{1(k)}$ . By Proposition 3.7, there exist  $(c_{n, j}^k)_{n \geq 1}$  in  $\mathcal{R}_*^{1(k)}$  and  $h^k$  in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \|f^{k, j} + A_* a^k \cdot \underline{b}_{k-1}^j - A_*(a^k + T^n h^k) \cdot (c_{n, j}^k + A_{*2}^{(k)} \underline{b}_{k-1}^j)\| < \varepsilon_1, & n \geq 1; \\ \|c_{n, j}^k\| \leq \frac{1}{1-\rho} (\|A_{*1}^{(k)} \underline{b}_{k-1}^j\| + \|f^{k, j}\|_1^{1/2}), & n \geq 1. \end{cases}$$

By Lemma 2.4 and Lemma 3.1, there exists  $n_k \in \mathbb{N}$  such that, for any  $n \geq n_k$  we have:

$$\begin{cases} \|QT^n h^k\| < \nu_1; \\ \|T^n h^k \square t_p\| < \nu_1, \quad 1 \leq p \leq q. \end{cases}$$

We set  $\underline{a}^k = a^k + T^{n_k} h^k$  and  $\underline{b}_k^j = c_{n_k, j}^k + A_{*2}^{(k)} \underline{b}_{k-1}^j, j \geq 1$ . By the choice of  $\mathcal{R}_*^{1(k)}$  we get:

$$A_* \underline{a}^i \cdot A_* \underline{b}_{k-1}^j = A_* \underline{a}^i \cdot A_* \underline{b}_k^j, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Then we can easily verify that, setting  $a_1^i := \underline{a}^i, 1 \leq i \leq k$  and  $b_1^j := \underline{b}_k^j, j \geq 1$  we obtain:

$$f^{i, j} + A_* a^i \cdot b^j - A_* a_1^i \cdot b_1^j = f^{i, j} + A_* a^i \cdot \underline{b}_{i-1}^j - A_* \underline{a}^i \cdot \underline{b}_i^j,$$

which implies that:  $\|f^{i, j} + A_* a^i \cdot b^j - A_* a_1^i \cdot b_1^j\| \leq \varepsilon_1$ .

Moreover, by construction, we have:

$$\|Q(a_1^i - a^i)\| < \nu_1, \|(a_1^i - a^i) \square t_p\| < \nu_1, \quad 1 \leq p \leq q.$$

The proof of this proposition results from iterations of the previous process, taking  $(t_i)_i$  a sequence dense in  $\mathcal{H}$  and  $(\varepsilon_n)_n, (\nu_n)_n$  some sequences of positive reals decreasing to 0. ■

REMARK 4.4. By construction, and by Proposition 3.7, we have:

$$\begin{cases} \|a_n^i - a^i\| \leq 2 \left( \sum_{j \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 \right)^{1/2}, & 1 \leq i \leq k; \\ \|b_n^j\| \leq \frac{1}{1-\rho} \left( \|b^j\| + \sum_{i=1}^k \|f^{i,j}\|_1^{1/2} \right), & j \geq 1. \end{cases}$$

PROPOSITION 4.5. Let  $T$  be an a.c.c.,  $\sigma \in \Sigma_{*,T}$ . Suppose that  $\text{mult}(R_*) \geq k$  on  $\sigma$ . If  $\{f^{i,j}, 1 \leq i \leq k, j \geq 1\}$  is a collection of functions in  $L^1(\sigma)$  such that  $\sum_{j \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 < \infty$  ( $1 \leq i \leq k$ ), and  $a^1, \dots, a^k, (b_n^j)_n$  are in  $\mathcal{H}$ , then there exist sequences  $(a_m^i)_m, (b_m^j)_m$  ( $1 \leq i \leq k, j \geq 1$ ) in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f^{i,j}] + a^i \square b^j - a_m^i \square b_m^j\| = 0, & 1 \leq i \leq k, j \geq 1; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|(a_m^i - a^i) \square w\| = 0, & w \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq k; \\ \|a_m^i - a^i\| \leq 2 \left( \sum_{j \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 \right)^{1/2}, & 1 \leq i \leq k; \\ \|b_m^j\| \leq 3 \left( \|b^j\| + \sum_{i=1}^k \|f^{i,j}\|_1^{1/2} \right), & j \geq 1; \\ a_m^i - a^i \rightarrow 0, & 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Proof. We can write:

$$[f^{i,j}] + a^i \square b^j = [f^{i,j}] + A_* a^i \square A_* b^j + Q a^i \square Q b^j.$$

Using multiplicity on  $\sigma$  and Proposition 4.3, we can find sequences  $(a_m^i)_m$  ( $1 \leq i \leq k$ ) in  $\mathcal{H}$  and  $(b_m^j)_m$  ( $j \geq 1$ ) in  $\mathcal{R}_*$  such that:

$$\begin{cases} (1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f^{i,j}] + A_* a^i \square A_* b^j - (A_* a_m^i \square A_* b_m^j)\| = 0, & 1 \leq i \leq k, j \geq 1; \\ (2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|(a_m^i - a^i) \square w\| = 0, & w \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq k; \\ (3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|Q(a_m^i - a^i)\| = 0, & 1 \leq i \leq k; \\ (4) \quad \|a_m^i - a^i\| \leq 2 \left( \sum_{j \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 \right)^{1/2}, & 1 \leq i \leq k; \\ (5) \quad \|A_* b_m^j\| \leq 2 \left( \|b^j\| + \sum_{i=1}^k \|f^{i,j}\|_1^{1/2} \right), & j \geq 1. \end{cases}$$

Moreover, for  $1 \leq i \leq k, j \geq 1$ , we have:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (A_* a_m^i \square A_* b_m^j) + Q a^i \square Q b^j = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m^i \square (Q b^j + A_* b_m^j) - Q a_m^i \square Q b^j + Q a^i \square Q b^j.$$

But, we can work on the two last items as follows ( $1 \leq i \leq k, j \geq 1$ ):

$$Qa^i \square Qb^j - Qa_m^i \square Qb^j = Q(a^i - a_m^i) \square Qb^j = (a^i - a_m^i) \square Qb^j$$

which tends to 0 when  $m$  becomes large by (2). Finally, the approximation is established with  $b_m^j = Qb^j + A_* b_m^j$ , which gives, via (5),

$$\|b_m^j\| \leq 2\|A_* b^j\| + \|Qb^j\| + 2 \sum_{i=1}^k \|f^{i,j}\|_1^{1/2},$$

that is:

$$\|b_m^j\| \leq 3 \left( \|b^j\| + \sum_{i=1}^k \|f^{i,j}\|_1^{1/2} \right), \quad j \geq 1, m \geq 1. \quad \blacksquare$$

Now we give (without proof) a dual version of the Proposition 4.3.

**PROPOSITION 4.6.** *Suppose  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  is an a.c.c. and let  $\sigma$  be a Borel set of  $\Sigma$ . We also suppose that  $\text{mult}(R) \geq n$  on  $\sigma$ . Let  $\{f^{i,j}, i \geq 1, 1 \leq j \leq n\}$  be a collection of functions in  $L^1(\sigma)$  be such that:*

$$\sum_{i \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 < \infty \quad \text{for any } j \in \{1, \dots, n\}$$

and let  $a^i \in \mathcal{R}, b^j \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n, i \geq 1$ . Then there exist sequences  $(a_m^i)_m$  in  $\mathcal{R}$ ,  $(b_m^j)_m$  in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f^{i,j} + a^i \cdot Ab^j - a_m^i \cdot Ab_m^j\| = 0, & 1 \leq j \leq n, i \geq 1; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|Q_*(b_m^j - b^j)\| = 0, & 1 \leq j \leq n; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|w \square (b_m^j - b^j)\| = 0, & w \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

**REMARK 4.7.** Moreover, if  $\rho$  is a real satisfying  $0 < \rho \leq 1/2$ . we have:

$$\begin{cases} \|b_m^j - b^j\| \leq 2 \left( \sum_{i \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 \right)^{1/2}, & 1 \leq j \leq n; \\ \|a_m^i\| \leq \frac{1}{1-\rho} \left( \|a^i\| + \sum_{j=1}^n \|f^{i,j}\|_1^{1/2} \right), & i \geq 1. \end{cases}$$



We now give a dual version of the Proposition 4.5:

PROPOSITION 4.8. *Let  $T$  be an a.c.c.,  $\sigma \subset \Sigma_T$ . Suppose that  $\text{mult}(R) \geq n$  on  $\sigma$ . If  $\{f^{i,j}, 1 \leq j \leq n, i \geq 1\}$  is a collection of functions in  $L^1(\sigma)$  such that  $\sum_{i \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 < \infty$ , and  $b^1, \dots, b^n, a^i, i \geq 1$  are in  $\mathcal{H}$ , then there exist sequences  $(b_m^j)_m (1 \leq j \leq n), (a_m^i)_m (j \geq 1)$  in  $\mathcal{H}$  such that:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f^{i,j}] + a^i \square b^j - a_m^i \square b_m^j\| = 0, & i \geq 1, 1 \leq j \leq n; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \|w \square (b_m^j - b^j)\| = 0, & w \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n; \\ \|(b_m^j - b^j)\| \leq 2 \left( \sum_{i \geq 1} \|f^{i,j}\|_1 \right)^{1/2}, & 1 \leq j \leq n; \\ \|a_m^i\| \leq 3 \left( \|a^i\| + \sum_{j=1}^n \|f^{i,j}\|_1^{1/2} \right), & i \geq 1; \\ b_m^j - b^j \rightarrow 0, & 1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

Now we give a new result for a certain triangulation of an absolutely continuous contraction.

THEOREM 4.9. *Let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  be an a.c.c. such that:  $T = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$  relative to some orthogonal decomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Then we have:*

$$E_T^r = E_{T_1}^r \cup E_{T_2}^r \quad \text{and} \quad E_T^l = E_{T_1}^l \cup E_{T_2}^l.$$

*Proof.* What we have to do is to show that for any  $F \in L^1(\mathbb{T} \setminus E_{T_2}^r), \|F\|_1 \leq 1$ , the class  $[F]$  is such that there exist two sequences  $(u_n)_n, (v_n)_n$  in  $\mathcal{H}_1$  with

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \|[F] - u_n \square v_n\| = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}_1. \end{array} \right.$$

For this, it is sufficient to prove that given  $\varepsilon > 0, w_1, \dots, w_p \in \mathcal{H}_1$ , there exist  $u, v \in \mathcal{H}_1$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|[F] - u \square v\| < \varepsilon; \\ \|u \square w_q\| < \varepsilon, \quad q = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

Suppose  $\mathbb{T} = E_T^r$  up to a Borel set of Lebesgue measure 0. For any  $\lambda \in \mathbb{D}$ , there exists a sequence  $(x_{n,\lambda})_n$  in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \|E_\lambda - x_{n,\lambda} \square x_{n,\lambda}\| = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,\lambda} \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

We set  $x_{n,\lambda}^1 = P_{\mathcal{H}_1}x_{n,\lambda}$  and  $x_{n,\lambda}^2 = P_{\mathcal{H}_2}x_{n,\lambda}$ . Since  $\|E_\lambda\| = 1$ , without loss of generality we may assume that  $\|x_{n,\lambda}\| = 1$  (all  $n$ , all  $\lambda$ ) and also (removing for each  $\lambda$  a suitable subsequence) that the sequence  $(\|x_{n,\lambda}^2\|)_n$  is convergent. Let  $\gamma_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,\lambda}^2\|$ . Relative to the choice of the sequences  $(x_{n,\lambda})_n$  we define, for  $0 < \gamma < 1$ , the sets:

$$\mathcal{D}_\gamma := \{\lambda \in \mathbb{D}; \gamma_\lambda < \gamma\}.$$

Note that if  $\lambda \notin \mathcal{D}_\gamma$  then:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|E_\lambda - x_{n,\lambda}^2 \square x_{n,\lambda}^2\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,\lambda} \square x_{n,\lambda}^1\| \leq (1 - \gamma)^{1/2}.$$

Moreover, we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,\lambda}^2 \square w\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,\lambda} \square w\|, \quad w \in \mathcal{H}_2.$$

Thus we obtain that  $\text{NTL}(\mathbb{D} \setminus \mathcal{D}_\gamma) \subset E_{T_2}^r$  (where  $\text{NTL}(E)$  denotes the set of all nontangential limits of points in  $E$ ), that is,  $\mathbb{T} \setminus E_{T_2}^r \subset \text{NTL}(\mathcal{D}_\gamma)$  for any  $\gamma \in ]0, 1[$ . Let  $\gamma$  be a positive real satisfying  $\gamma < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{10}, \frac{\varepsilon}{4 \max\{\|w_q\|, 1 \leq q \leq p\}} \right\}$ . Since  $\mathcal{D}_\gamma$  is dominating for  $\mathbb{T} \setminus E_{T_2}^r$ , there exist  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  in  $\mathbb{D}$  such that  $\gamma_{\lambda_j} < \gamma, j = 1, \dots, n$ , and  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{D}$  such that  $\sum_{j=1}^n |\alpha_j| < 1$  satisfying  $\left\| [F] - \sum_{j=1}^n \alpha_j E_{\lambda_j} \right\| < \frac{\varepsilon}{10}$ . For each  $j = 1, \dots, n$  we may assume (throwing away if necessary a finite number of terms in each of the  $n$  sequences  $(x_{i,\lambda_j})_i$ ) that  $\|x_{i,\lambda_j}^2\| < \gamma'$  (where  $\gamma'$  has been chosen such that  $\gamma_j < \gamma' < \gamma, 1 \leq j \leq n$ ) and

$$\begin{cases} \|E_{\lambda_j} - x_{i,\lambda_j} \square x_{i,\lambda_j}\| < \frac{\varepsilon}{10}, & i \geq 1, 1 \leq j \leq n; \\ \|x_{i,\lambda_j} \square w_q\| < \frac{\varepsilon}{4n}, & 1 \leq q \leq p, 1 \leq j \leq n, i \geq 1. \end{cases}$$

We set  $x_{\nu_j} := x_{\nu_j,\lambda_j}, x_{\nu_j}^1 := P_{\mathcal{H}_1}x_{\nu_j}, x_{\nu_j}^2 := P_{\mathcal{H}_2}x_{\nu_j}$ , and if  $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n)$ , we set  $x_\nu := \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} x_{\nu_j}, \bar{x}_\nu = \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} \bar{x}_{\nu_j}, x_\nu^1 = P_{\mathcal{H}_1}x_\nu, x_\nu^2 = P_{\mathcal{H}_2}x_\nu, \bar{x}_\nu^1 = P_{\mathcal{H}_1}\bar{x}_\nu, \bar{x}_\nu^2 = P_{\mathcal{H}_2}\bar{x}_\nu$ .

We get:

$$\begin{cases} \left\| [F] - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{\nu_j} \square x_{\nu_j} \right\| < \frac{3\varepsilon}{10}; \\ \|x_\nu \square w_q\| < \frac{\varepsilon}{4}, & q = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Since  $\|x_\nu^2\| < \gamma$  by construction, we get:

$$\|x_\nu^1 \square w_q\| < \frac{\varepsilon}{4} + \gamma \max\{\|w_q\|, q = 1, \dots, p\} < \frac{\varepsilon}{2}, q = 1, \dots, p.$$

Since  $A_*^{\mathcal{H}_1} h = A_* h$  for any  $h \in \mathcal{H}_1$ , and since  $\|x_{\nu_j} - x_{\nu_j}^1\| = \|x_{\nu_j}^2\| < \gamma < \frac{\varepsilon}{10}$  we can easily conclude that:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j A_* x_{\nu_j} \square A_* x_{\nu_j} - \sum_{j=1}^n \alpha_j A_*^{\mathcal{H}_1} x_{\nu_j}^1 \square A_*^{\mathcal{H}_1} x_{\nu_j}^1 \right\| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Using the vanishing condition satisfied by the sequence  $(x_{i,\lambda_j})_i$  we can find  $\nu$  such that:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j Q x_{\nu_j} \square Q x_{\nu_j} - Q x_{\nu} \square Q \bar{x}_{\nu} \right\| < \frac{\varepsilon}{10}$$

(see for example Proposition 1.3, Part III in [6]). For such a  $\nu$ , we transform  $\sum_{j=1}^n \alpha_j A_*^{\mathcal{H}_1} x_{\nu_j}^1 \square A_*^{\mathcal{H}_1} x_{\nu_j}^1$  in  $A^{\mathcal{H}_1}(x_{\nu}^1 + \tau) \cdot b$  where  $\tau \in \mathcal{H}_1, b \in \mathcal{R}_*^{\mathcal{H}_1}$ , with the following inequalities:  $\|\tau \square w_q\| < \frac{\varepsilon}{2}, 1 \leq q \leq p$  and  $\|Q^{\mathcal{H}_1} \tau \square \bar{x}_{\nu}^1\| < \frac{\varepsilon}{10}$ . In fact we get:

$$\begin{aligned} \|[F] - (x_{\nu}^1 + \tau) \square P_{\mathcal{H}_1}(Q^{\mathcal{H}_1} \bar{x}_{\nu}^1 + b)\| &< \varepsilon \\ \|(x_{\nu}^1 + \tau) \square w_q\| &< \varepsilon \quad 1 \leq q \leq p. \end{aligned}$$

If  $\mathbb{T} \neq E_T^r$  (up to a Borel set of Lebesgue measure 0) we set  $\tilde{T} = M_{\sigma} \oplus T$ , where  $\sigma = \mathbb{T} \setminus E_T^r$ . Relative to the decomposition  $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(\sigma) \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ , we have the following representation of the operator  $\tilde{T}$ :

$$\begin{pmatrix} M_{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & * \\ 0 & 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

By construction  $E_{\tilde{T}}^r = \mathbb{T}$  since we have  $E_{\tilde{T}}^r = E_{M_{\sigma}}^r \cup E_T^r = \sigma \cup E_T^r$ . If we set  $\tilde{T}_1 = M_{\sigma} \oplus T_1$ , by what precedes, we get:

$$E_{\tilde{T}}^r = E_{\tilde{T}_1}^r \cup E_{T_2}^r = \sigma \cup E_{T_1}^r \cup E_{T_2}^r = \sigma \cup E_T^r.$$

Thus we get  $E_T^r = E_{T_1}^r \cup E_{T_2}^r$ . Using the equality  $X_{T^*} = \overline{X_T}$  and  $\Sigma_{*,T^*} = \overline{\Sigma_T}$ , (see Proposition 3.5 in [5]) and the equality  $E_{T^*}^r = E_{T_1^*}^r \cup E_{T_2^*}^r$ , we easily get:

$$E_T^l = E_{T_1}^l \cup E_{T_2}^l \text{ for any triangulation of } T. \quad \blacksquare$$

We can add that for any triangulation of an a.c.c.  $T$  such that  $T = \begin{pmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$  relative to some orthogonal decomposition  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ , we have:

$$\Sigma_{*,T} = \Sigma_{*,T_1} \cup \Sigma_{*,T_2} \quad \text{and} \quad \Sigma_T = \Sigma_{T_1} \cup \Sigma_{T_2}.$$

The above equalities are trivial consequences of Lemma 1.4 in [3]. The flavour of these results is that the boundary sets  $E_T^r$  and  $E_T^l$  behave well with respect to (arbitrary) triangulations. With regard to the sets  $X_T$ , this behaviour is not completely settled. The inclusion  $X_{T_1} \cup X_{T_2} \subset X_T$  is always valid, with equality if  $T_1$  or  $T_2$  is  $C_0$ . (cf. Proposition 3.5 and Corollary 6.4 in [5]), but the question whether the equality holds in general is still open.

5. MAIN RESULTS

Recall that  $T$  is in the class  $\mathbb{A}_{1, \mathbb{N}_0}$  if and only if  $\mathbb{T} = E_T^r$  (see Theorem 4.6 in [5]). The following result shows how much the multiplicity of  $R^{\mathcal{H}_0}$  on  $\mathbb{T} \setminus E_T^r$  (equal to the multiplicity of  $R$  on  $\mathbb{T} \setminus E_T^r$ ) “pushes” the operator into the class  $\mathbb{A}_{1, n}$ .

**THEOREM 5.1.** *Let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  be in the class  $\mathbb{A}$  such that  $\text{mult}(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$  on  $\mathbb{T} \setminus E_T^r$ . Then  $T$  belongs to the class  $\mathbb{A}_{1, n}$ .*

*Proof.* Of course if  $\mathbb{T} = E_T^r$  the conclusion holds since  $T$  is in the class  $\mathbb{A}_{1, \mathbb{N}_0}$ . So we consider the case where the Borel set  $\mathbb{T} \setminus E_T^r$  has positive Lebesgue measure. We first show how to, approximately and simultaneously, transform elements of the type  $[f^j] + a \square b^j$  in the form  $\tilde{a} \square \tilde{b}^j$ . Let  $f^1, \dots, f^n$  be in  $L^1(\mathbb{T})$ ,  $\varepsilon > 0$ , and  $b^1, \dots, b^n, a$  in  $\mathcal{H}$ . We split the  $f^j, 1 \leq j \leq n$  into pieces:  $f^j = f_\sigma^j + f_{X_T}^j + f_{\sigma'}^j$ , where  $\sigma = \mathbb{T} \setminus E_T^r$ , and  $\sigma' = E_T^r \setminus (X_T) (\subset \Sigma_{*, T_1})$ . Then we get for  $1 \leq j \leq n$ :

$$[f^j] + a \square b^j = ([f_\sigma^j] + a_0 \square b_0^j) + ([f_{\sigma'}^j] + a_1 \square b_1^j) + [f_{X_T}^j] + a_1 \square b_0^j$$

where we refer to notation in preliminaries. We first deal with  $[f_\sigma^j] + a_0 \square b_0^j = [f_\sigma^j] + A^{\mathcal{H}_0} a_0 \square A^{\mathcal{H}_0} b_0^j + Q_*^{\mathcal{H}_0} a_0 \square Q_*^{\mathcal{H}_0} b_0^j$ . Using multiplicity on  $\sigma$  and Proposition 4.8, we can find two sequences  $(a_{0, m})_m$  and  $(b_{0, m}^j)_m$  in  $\mathcal{H}_0$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f_\sigma^j] + a_0 \square b_0^j - a_{0, m} \square b_{0, m}^j\| = 0, \quad 1 \leq j \leq n; \\ (2) & \lim_{m \rightarrow \infty} \|w \square (b_{0, m}^j - b_0^j)\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n; \\ (3) & \|b_{0, m}^j - b_0^j\| \leq 2 \|f_\sigma^j\|_1^{1/2}, \quad m \geq 1, 1 \leq j \leq n; \\ (4) & \|a_{0, m}\| \leq 3 \left( \|a_0\| + \sum_{j=1}^n \|f_\sigma^j\|_1^{1/2} \right), \quad m \geq 1. \end{array} \right.$$

In fact, using Proposition 4.8, we get that the vanishing condition (2) is obtained for any  $w \in \mathcal{H}_0$ , but since  $w \square (b_{0, m}^j - b_0^j) = Q w \square Q (b_{0, m}^j - b_0^j)$  where  $(b_{0, m}^j - b_0^j)_j$  tends weakly to 0 and using Lemma 2.2, we get the vanishing condition (2) for any  $w \in \mathcal{H}$ . Next we use the fact that  $\sigma' \subset \Sigma_{*, T_1}$  and Proposition 3.10 to find sequences  $(a_{1, p})_p$  and  $(b_{1, p}^j)_p$  in  $\mathcal{H}_1$ , ( $1 \leq j \leq n$ ) such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (5) & \lim_{p \rightarrow \infty} \|[f_{\sigma'}^j] + a_1 \square b_1^j - (a_{1, p} \square b_{1, p}^j)\| = 0, \quad 1 \leq j \leq n; \\ (6) & \lim_{p \rightarrow \infty} \|(a_{1, p} - a_1) \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}; \\ (7) & \|b_{1, p}^j\| \leq 2 (\|b_1^j\| + \|f_{\sigma'}^j\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq j \leq n; \\ (8) & \|a_1 - a_{1, p}\| \leq 3 \sum_{j=1}^n \|f_{\sigma'}^j\|_1^{1/2}, \quad p \geq 1. \end{array} \right.$$

Finally, we use the property of the set  $X_T$ . Using Proposition 3.9, we can find sequences  $(x_q)_q$  and  $(y_q^j)_q$  in  $\mathcal{H}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} (9) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \|[f_{X_T}^j] - x_q \square y_q^j\| = 0, \quad 1 \leq j \leq n; \\ (10) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \|x_q \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}; \\ (11) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \|w \square y_q^j\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n; \\ (12) \quad \|y_q^j\| \leq \|f_{X_T}^j\|_1^{1/2}, \quad q \geq 1, 1 \leq j \leq n; \\ (13) \quad \|x_q\| \leq \sum_{j=1}^n \|f_{X_T}^j\|_1^{1/2}, \quad q \geq 1. \end{array} \right.$$

We now put the pieces together; from (1), (5), (9) and the initial decomposition of the elements  $[f^j] + a \square b^j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) we easily deduce the existence of integers  $M, P, Q$  such that for any  $m > M, p > P, q > Q$  we have:

$$\|[f^j] + a \square b^j - (a_{0,m} \square b_{0,m}^j + a_{1,p} \square b_{1,p}^j + x_q \square y_q^j + a_1 \square b_0^j)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

We can write, for any  $1 \leq j \leq n$ :

$$\begin{aligned} a_{0,m} \square b_{0,m}^j + a_{1,p} \square b_{1,p}^j + x_q \square y_q^j + a_1 \square b_0^j &= (a_{0,m} + a_{1,p} + x_q) \square (b_{0,m}^j + b_{1,p}^j + y_q^j) \\ &\quad + (-a_{1,p} \square b_{0,m}^j + a_1 \square b_0^j) - (a_{0,m} + a_{1,p}) \square y_q^j - x_q \square (b_{0,m}^j + b_{1,p}^j). \end{aligned}$$

Moreover we have:

$$a_1 \square b_0^j - a_{1,p} \square b_{0,m}^j = (a_1 - a_{1,p}) \square b_0^j + a_{1,p} \square (b_0^j - b_{0,m}^j).$$

Now we use relations (2), (6), (10), (11), and we choose successively,

$$\begin{aligned} p > P &\quad \text{so that} \quad \|(a_1 - a_{1,p}) \square b_0^j\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n, \\ m > M &\quad \text{so that} \quad \|(a_{1,p} \square (b_0^j - b_{0,m}^j))\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n \text{ and} \\ q > Q &\quad \text{so that} \quad \|(a_{0,m} + a_{1,p}) \square y_q^j\| + \|x_q \square (b_{0,m}^j + b_{1,p}^j)\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Thus, upon setting  $\tilde{y}^j = y_q^j, \tilde{x} = x_q$  in  $\mathcal{H}, \tilde{b}_1^j = b_{1,p}^j, \tilde{a}_1 = a_{1,p}$  in  $\mathcal{H}_1, \tilde{b}_0^j = b_{0,m}^j,$

$\tilde{a}_0 = a_{0,m}$  in  $\mathcal{H}_0$  ( $1 \leq j \leq n$ ) we have:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|[f^j] + a \square b^j - (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 + \tilde{x}) \square (\tilde{b}_0^j + \tilde{b}_1^j + \tilde{y}^j)\| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq n; \\ \|b_0^j - \tilde{b}_0^j\| \leq 2\|f^j\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq n; \\ \|\tilde{a}_1 - a_1\| \leq 3 \sum_{j=1}^n \|f^j\|_1^{1/2}; \\ \|\tilde{a}_0\| \leq 3\left(\|a_0\| + \sum_{j=1}^n \|f^j\|_1^{1/2}\right); \\ \|\tilde{b}_1^j\| \leq 2(\|b_1^j\| + \|f^j\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq j \leq n; \\ \|\tilde{y}^j\| \leq \|f^j\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq n; \\ \|\tilde{x}\| \leq \sum_{j=1}^n \|f^j\|_1^{1/2}. \end{array} \right.$$

Now we use this result to start the standard self improving process, which leads to the property  $\mathbb{A}_{1,n}$ . Let us take  $(\varepsilon_m)_m$  a sequence of positive reals decreasing to 0 such that  $\varepsilon_m < 1/2^m, m \geq 1$ . Suppose we have found vectors  $\tilde{a}_{0,m}, \tilde{a}_{1,m}, \tilde{x}_m, \tilde{b}_{0,m}^j, \tilde{b}_{1,m}^j, \tilde{y}_m^j$  such that:  $\|[f^j] - (\tilde{a}_{1,m} + \tilde{a}_{0,m} + \tilde{x}_m) \square (\tilde{b}_{1,m}^j + \tilde{b}_{0,m}^j + \tilde{y}_m^j)\| < \varepsilon_m, 1 \leq j \leq n$ ; then, by the above, we can find vectors  $\tilde{a}_{0,m+1}, \tilde{a}_{1,m+1}, \tilde{x}_{m+1}, \tilde{b}_{0,m+1}^j, \tilde{b}_{1,m+1}^j, \tilde{y}_{m+1}^j$  such that:

$$\begin{aligned} & \|[f^j] - (\tilde{a}_{1,m} + \tilde{a}_{0,m} + \tilde{x}_m) \square (\tilde{b}_{1,m}^j + \tilde{b}_{0,m}^j + \tilde{y}_m^j) \\ & + (\tilde{a}_{1,m} + \tilde{a}_{0,m} + \tilde{x}_m) \square (\tilde{b}_{1,m}^j + \tilde{b}_{0,m}^j + \tilde{y}_m^j) \\ & - (\tilde{a}_{1,m+1} + \tilde{a}_{0,m+1} + \tilde{x}_{m+1}) \square (\tilde{b}_{1,m+1}^j + \tilde{b}_{0,m+1}^j + \tilde{y}_{m+1}^j)\| < \varepsilon_{m+1} \end{aligned}$$

with the following control of the norms:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{b}_{0,m+1}^j - \tilde{b}_{0,m}^j\| < 2\varepsilon_m^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq n; \\ \|\tilde{a}_{1,m+1} - \tilde{a}_{1,m}\| < 3n\varepsilon_m^{1/2}; \\ \|\tilde{a}_{0,m+1}\| < 3(\|\tilde{a}_{0,m}\| + \|\tilde{x}_{0,m}\| + n\varepsilon_m^{1/2}); \\ \|\tilde{b}_{1,m+1}^j\| < 2(\|\tilde{b}_{1,m}^j\| + \|\tilde{y}_{1,m}^j\| + \varepsilon_m^{1/2}), \quad 1 \leq j \leq n; \\ \|\tilde{x}_{m+1}\| < n\varepsilon_m^{1/2}; \\ \|\tilde{y}_{m+1}^j\| < \varepsilon_m^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

Since  $\|\tilde{x}_{0,m}\| \leq \|\tilde{x}_m\| < n\varepsilon_{m-1}^{1/2}$  and since  $\|\tilde{y}_{1,m}^j\| \leq \|\tilde{y}_m^j\| < \varepsilon_{m-1}^{1/2}, 1 \leq j \leq n$ , we obtain:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{a}_{0,m+1}\| < 3(\|\tilde{a}_{0,m}\| + 2n\varepsilon_{m-1}^{1/2}); \\ \|\tilde{b}_{1,m+1}^j\| < 2(\|\tilde{b}_{1,m}^j\| + 2\varepsilon_{m-1}^{1/2}), \quad 1 \leq j \leq n; \end{array} \right.$$

We then get Cauchy sequences  $(\tilde{b}_{0,m}^j)_m$  and  $(\tilde{a}_{1,m})_m$  ( $1 \leq j \leq n$ ), which converge to  $\bar{b}_0^j$  and  $\bar{a}_1$  respectively. The sequences  $(\tilde{x}_m)_m$  and  $(\tilde{y}_m^j)_m$  converge to 0. Moreover  $(\tilde{b}_{1,m}^j)_m, (\tilde{a}_{0,m})_m, (1 \leq j \leq n)$ , have weak cluster point  $\bar{b}_1^j, \bar{a}_0$  respectively. Using mixed continuity of  $(x, y) \rightarrow x \square y$  we can write:

$$[f^j] = (\bar{a}_0 + \bar{a}_1) \square (\bar{b}_0^j + \bar{b}_1^j), \quad 1 \leq j \leq n$$

which ends the proof. ■

Since  $T \in \mathbb{A}_{1,n}$  is equivalent to  $T^* \in \mathbb{A}_{n,1}$ , the following theorem is easily deduced:

**THEOREM 5.2.** *Let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  be in the class  $\mathbb{A}$ . If  $\text{mult}(R^{\mathcal{H}_0^*}) \geq n$  on  $\mathbb{T} \setminus E_{T^*}^r$ , then  $T$  belongs to the class  $\mathbb{A}_{n,1}$ , where  $R^{\mathcal{H}_0^*}$  is the unitary part of the minimal isometric dilation of the  $C_0$  part of  $T^*$ .*

Remark that the condition  $T$  does not belong to the class  $\mathbb{A}_{\mathbb{N}_0,1}$  means that the Borel set  $\mathbb{T} \setminus E_{T^*}^r$  has a positive Lebesgue measure. Indeed,  $T$  in the class  $\mathbb{A}$  belongs to the  $\mathbb{A}_{\mathbb{N}_0,1}$  if and only if  $\mathbb{T} = E_T^l$  and  $E_T^l = \{\bar{\zeta}, \zeta \in E_{T^*}^r\}$ .

Now we give another sufficient condition for an operator  $T$  in the class  $\mathbb{A}$  to be in the class  $\mathbb{A}_{k,1}$ . Recall that if  $T$  is  $C_0$ , then  $T \in \mathbb{A}_{\mathbb{N}_0,1}$  (see Proposition 4.5 in [5]).

**THEOREM 5.3.** *Let  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  be in the class  $\mathbb{A}$ . If  $\text{mult}(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$  on  $E_1 \setminus X_T$ , then  $T \in \mathbb{A}_{k,1}$ .*

*Proof.* Of course, if  $E_1 \setminus X_T = \emptyset$  then  $T \in \mathbb{A}_{\mathbb{N}_0,1}$  and the conclusion holds. So we consider the case where  $E_1 \setminus X_T$  has positive Lebesgue measure. Let  $f^1, \dots, f^k$  be in  $L^1(\mathbb{T})$ ,  $\varepsilon > 0$ , and  $a^1, \dots, a^k, b$  in  $\mathcal{H}$ . We split the functions  $f^i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) into pieces:  $f^i = f_\sigma^i + f_{X_T}^i + f_{\sigma'}^i$ , where  $\sigma = E_1 \setminus X_T$ , and  $\sigma' = \mathbb{T} \setminus (\sigma \cup X_T)$ . Then we get for  $1 \leq i \leq k$ ,

$$[f^i] + a^i \square b = ([f_\sigma^i] + a_1^i \square b_1) + ([f_{\sigma'}^i] + a_0^i \square b_0) + [f_{X_T}^i] + a_1^i \square b_0,$$

where we refer to notation from the preliminaries. By Proposition 4.5, we know there exist sequences  $(a_{1,n}^i)_n$  and  $(b_{1,n})_n$  in  $\mathcal{H}_1$ , ( $1 \leq i \leq k$ ) such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \lim_{n \rightarrow \infty} \|[f_\sigma^i] + a_1^i \square b_1 - a_{1,n}^i \square b_{1,n}\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k; \\ (2) & \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a_{1,n}^i - a_1^i) \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq k; \\ (3) & \|a_{1,n}^i - a_1^i\| \leq 2\|f_\sigma^i\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq k, n \geq 1; \\ (4) & \|b_{1,n}\| \leq 3\left(\|b_1\| + \sum_{i=1}^k \|f_\sigma^i\|_1^{1/2}\right), \quad n \geq 1. \end{array} \right.$$

Next we use the fact that  $\sigma' \subset \Sigma_{T_0}$  and Proposition 3.12 to find sequences  $(a_{0,p}^i)_p$  and  $(b_{0,p})_p$  in  $\mathcal{H}_0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (5) & \lim_{p \rightarrow \infty} \|[f_{\sigma'}^i] + a_0^i \square b_0 - a_{0,p}^i \square b_{0,p}\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k; \\ (6) & \lim_{p \rightarrow \infty} \|w \square (b_{0,p} - b_0)\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}; \\ (7) & \|a_{0,p}^i\| \leq 2(\|a_0^i\| + \|f_{\sigma'}^i\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq i \leq k, p \geq 1; \\ (8) & \|b_0 - b_{0,p}\| \leq 3 \sum_{i=1}^k \|f_{\sigma'}^i\|_1^{1/2}. \end{array} \right.$$

Finally, we use the property of the set  $X_T$  and Proposition 3.9 to find sequences  $(x_m^i)_m$  and  $(y_m)_m$  in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (9) & \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f_{X_T}^i] - x_m^i \square y_m\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k; \\ (10) & \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m^i \square w\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k, w \in \mathcal{H}; \\ (11) & \lim_{m \rightarrow \infty} \|w \square y_m\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}; \\ (12) & \|x_m^i\| \leq \|f_{X_T}^i\|_1^{1/2}, \quad m \geq 1, 1 \leq i \leq k; \\ (13) & \|y_m\| \leq \sum_{i=1}^k \|f_{X_T}^i\|_1^{1/2}, \quad m \geq 1. \end{array} \right.$$

We now put the pieces together. Let us take  $N, M, P$  such that, for any  $n > N$ ,  $m > M$ ,  $p > P$ , we get:

$$\|[f^i] + a^i \square b - (a_{1,n}^i \square b_{1,n} + a_{0,p}^i \square b_{0,p} + x_m^i \square y_m + a_1^i \square b_1)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

We can write for any  $1 \leq i \leq k$  that  $a_{1,n}^i \square b_{1,n} + a_{0,p}^i \square b_{0,p} + x_m^i \square y_m + a_1^i \square b_0$  is equal to the following expression:

$$\begin{aligned} & (-a_{1,n}^i \square b_{0,p} + a_1^i \square b_0) - (a_{1,n}^i + a_{0,p}^i) \square y_m - x_m^i \square (b_{1,n} + b_{0,p}) \\ & + (a_{1,n}^i + a_{0,p}^i + x_m^i) \square (b_{1,n} + b_{0,p} + y_m). \end{aligned}$$

Moreover, we have:

$$a_1^i \square b_0 - a_{1,n}^i \square b_{0,p} = (a_1^i - a_{1,n}^i) \square b_0 + a_{1,n}^i \square (b_0 - b_{0,p}).$$

Now we use relations (2), (6), (10), (11), and we choose successively,

$$\begin{aligned} n > N & \quad \text{so that} \quad \|(a_1^i - a_{1,n}^i) \square b_0\| < \frac{\varepsilon}{4}, \\ p > P & \quad \text{so that} \quad \|(a_{1,n}^i \square (b_0 - b_{0,p}))\| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ and} \\ m > M & \quad \text{so that} \quad \|(a_{1,n}^i + a_{0,p}^i) \square y_m\| + \|x_m^i \square (b_{1,n} + b_{0,p})\| < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$



Thus we have found vectors  $\tilde{a}_1^i, \tilde{b}_1$  in  $\mathcal{H}_1, \tilde{b}_0, \tilde{a}_0^i$  in  $\mathcal{H}_0, \tilde{x}^i, \tilde{y}$  in  $\mathcal{H}, (1 \leq i \leq k)$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|[f^i] + a^i \square b - (\tilde{a}_0^i + \tilde{a}_1^i + \tilde{x}^i) \square (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 + \tilde{y})\| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq k; \\ \|\tilde{a}_1^i - a_1^i\| \leq 2\|f^i\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq k, \\ \|b_0 - \tilde{b}_0\| \leq 3 \sum_{i=1}^k \|f^i\|_1^{1/2}; \\ \|\tilde{a}_0^i\| \leq 2(\|a_0^i\| + \|f^i\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq i \leq k; \\ \|\tilde{b}_1\| \leq 3(\|b_1\| + \sum_{i=1}^k \|f^i\|_1^{1/2}); \\ \|\tilde{x}^i\| \leq \|f^i\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq k; \\ \|\tilde{y}\| \leq \sum_{i=1}^k \|f^i\|_1^{1/2}. \end{array} \right.$$

By a standard self improving process, the proof can now be completed as in the proof of Theorem 5.1. ■

The following result generalizes Theorem 5.1 and Theorem 5.3. We give sufficient conditions for an operator  $T$  in the class  $\mathbb{A}$  for being in the class  $\mathbb{A}_{k,n}$ .

**THEOREM 5.4.** *Suppose  $T$  is in the class  $\mathbb{A} \setminus (\mathbb{A}_{\mathbb{N}_0,1} \cup \mathbb{A}_{1,\mathbb{N}_0})$ . If  $\text{mult}(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$  on  $\sigma_0 \subset \Sigma_0 \setminus X_T$  and if  $\text{mult}(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$  on  $\sigma_1 \subset \Sigma_{*1} \setminus X_T$  where  $\sigma_0$  and  $\sigma_1$  are some Borel subsets of  $\mathbb{T}$  such that  $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup X_T = \mathbb{T}$ , then  $T$  belongs to the class  $\mathbb{A}_{k,n}$ .*

**REMARK 5.5.** (i) If  $\text{mult}(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$  on  $\mathbb{T} \setminus E_T^r$  and if  $\text{mult}(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$  on  $\Sigma_{*1} \setminus X_T$ , then  $T \in \mathbb{A}_{k,n}$ .

(ii) If  $\text{mult}(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$  on  $E_0 \setminus X_T$  and if  $\text{mult}(R_*^{\mathcal{H}_1}) \geq k$  on  $E_1 \setminus X_T$ , then  $T \in \mathbb{A}_{k,n}$ .

*Proof of Theorem 5.4.* Let us consider  $\{f^{i,j}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$  a finite sequence of functions in  $L^1(\mathbb{T}), \varepsilon > 0$ , and  $a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^n$  in  $\mathcal{H}$ . We write  $f^{i,j} = f_{\sigma_0}^{i,j} + f_{\sigma_1}^{i,j} + f_{X_T}^{i,j}$ . Once again we have to deal with terms such as

$$[f^{i,j}] + a^i \square b^j = ([f_{\sigma_0}^{i,j}] + a_0^i \square b_0^j) + ([f_{\sigma_1}^{i,j}] + a_1^i \square b_1^j) + [f_{X_T}^{i,j}] + a_1^i \square b_0^j,$$

$1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ . Using Proposition 4.8, we can find sequences  $(a_{0,m}^i)_m$  and

$(b_{0,m}^j)_m$  in  $\mathcal{H}_0$  such that, if  $1 \leq i \leq k$  and if  $1 \leq j \leq n$  we have:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \lim_{m \rightarrow \infty} \|[f_{\sigma_0}^{i,j}] + a_0^i \square b_0^j - (a_{0,m}^i \square b_{0,m}^j)\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n; \\ (2) & \lim_{m \rightarrow \infty} \|w \square (b_{0,m}^j - b_0^j)\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n; \\ (3) & \|b_{0,m}^j - b_0^j\| \leq 2 \left( \sum_{i=1}^k \|f_{\sigma_0}^{i,j}\|_1 \right)^{1/2}, \quad m \geq 1, 1 \leq j \leq n; \\ (4) & \|a_{0,m}^i\| \leq 3(\|a_0^i\| + \sum_{j=1}^n \|f_{\sigma_0}^{i,j}\|_1^{1/2}), \quad m \geq 1, 1 \leq i \leq k. \end{array} \right.$$

Using Proposition 4.5, we can find sequences  $(a_{1,p}^i)_p$  and  $(b_{1,p}^j)_p$  in  $\mathcal{H}_1$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (5) & \lim_{p \rightarrow \infty} \|[f_{\sigma_1}^{i,j}] + a_1^i \square b_1^j - a_{1,p}^i \square b_{1,p}^j\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n; \\ (6) & \lim_{p \rightarrow \infty} \|(a_{1,p}^i - a_1^i) \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq k; \\ (7) & \|a_{1,p}^i - a_1^i\| \leq 2 \sum_{j=1}^n \|f_{\sigma_1}^{i,j}\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq k, p \geq 1; \\ (8) & \|b_{1,p}^j\| \leq 3(\|b_1^j\| + \sum_{i=1}^k \|f_{\sigma_1}^{i,j}\|_1^{1/2}), \quad 1 \leq j \leq n, p \geq 1. \end{array} \right.$$

We now use Proposition 3.9 to find two sequences  $(x_q^i)_q$  and  $(y_q^j)_q$  in  $\mathcal{H}$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (9) & \lim_{q \rightarrow \infty} \|[f_{X_T}^{i,j}] - x_q^i \square y_q^j\| = 0, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n; \\ (10) & \lim_{q \rightarrow \infty} \|x_q^i \square w\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}, 1 \leq i \leq k; \\ (11) & \lim_{q \rightarrow \infty} \|w \square y_q^j\| = 0, \quad w \in \mathcal{H}, 1 \leq j \leq n; \\ (12) & \|x_q^i\| \leq \sum_{j=1}^n \|f_{X_T}^{i,j}\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq k, q \geq 1; \\ (13) & \|y_q^j\| \leq \sum_{i=1}^k \|f_{X_T}^{i,j}\|_1^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq n, q \geq 1. \end{array} \right.$$

We now put the pieces together. Let us take  $M, P, Q$  such that if  $m > M$ ,  $p > P$ ,  $q > Q$ , for any  $1 \leq i \leq k$  and any  $1 \leq j \leq n$  we have:

$$\|[f^{i,j}] + a^i \square b^j - (a_{1,p}^i \square b_{1,p}^j + a_{0,m}^i \square b_{0,m}^j + x_q^i \square y_q^j + a_1^i \square b_0^j)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

We can write,  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ :

$$\begin{aligned} a_{1,p}^i \square b_{1,p}^j + a_{0,m}^i \square b_{0,m}^j + x_q^i \square y_q^j + a_1^i \square b_0^j &= (a_{1,p}^i + a_{0,m}^i + x_q^i) \square (b_{1,p}^j + b_{0,m}^j + y_q^j) \\ &+ (-a_{1,p}^i \square b_{0,m}^j + a_1^i \square b_0^j) - (a_{1,p}^i + a_{0,m}^i) \square y_q^j - x_q^i \square (b_{1,p}^j + b_{0,m}^j). \end{aligned}$$

Moreover we have:

$$a_1^i \square b_0^j - a_{1,p}^i \square b_{0,m}^j = (a_1^i - a_{1,p}^i) \square b_0^j + a_{1,p}^i \square (b_0^j - b_{0,m}^j).$$

Now we use relations (2), (6), (10), (11), and we choose  $(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n)$ :

$$\begin{aligned} p > P \quad \text{so that} \quad & \| (a_1^i - a_{1,p}^i) \square b_0^j \| < \frac{\varepsilon}{4} \\ m > M \quad \text{so that} \quad & \| (a_{1,p}^i \square (b_0^j - b_{0,m}^j)) \| < \frac{\varepsilon}{4} \\ q > Q \quad \text{so that} \quad & \| (a_{1,p}^i + a_{0,m}^i) \square y_q^j \| + \| x_q^i \square (b_{1,p}^j + b_{0,m}^j) \| < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Finally we have found vectors  $\tilde{a}_0^i, \tilde{b}_0^j$  in  $\mathcal{H}_0$ ,  $\tilde{a}_1^i, \tilde{b}_1^j$  in  $\mathcal{H}_1$  and  $\tilde{x}^i, \tilde{y}^j$  in  $\mathcal{H}$ , such that:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \| [f^{i,j}] + a^i \square b^j - (\tilde{a}_0^i + \tilde{a}_1^i + \tilde{x}^i) \square (\tilde{b}_0^j + \tilde{b}_1^j + \tilde{y}^j) \| < \varepsilon, & 1 \leq i \leq k; \\ \| \tilde{a}_1^i - a_1^i \| \leq 2 \sum_{j=1}^n \| f^{i,j} \|_1^{1/2}, & 1 \leq i \leq k; \\ \| b_0^j - \tilde{b}_0^j \| \leq 2 \sum_{i=1}^k \| f^{i,j} \|_1^{1/2}, & 1 \leq j \leq n; \\ \| \tilde{a}_0^i \| \leq 3 \left( \| a_0^i \| + \sum_{j=1}^n \| f^{i,j} \|_1^{1/2} \right), & 1 \leq i \leq k; \\ \| \tilde{b}_1^j \| \leq 3 \left( \| b_1^j \| + \sum_{i=1}^k \| f^{i,j} \|_1^{1/2} \right), & 1 \leq j \leq n; \\ \| \tilde{x}^i \| \leq \sum_{j=1}^n \| f^{i,j} \|_1^{1/2}, & 1 \leq i \leq k; \\ \| \tilde{y}^j \| \leq \sum_{i=1}^k \| f^{i,j} \|_1^{1/2}, & 1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

This result is the core of the standard self improving process, which leads to property  $\mathbb{A}_{k,n}$  in the same way as in the proofs of the previous theorems. ■

In view of the above results, the following conjecture seems a reasonable first step towards obtaining necessary conditions for membership in the classes  $\mathbb{A}_{k,n}$ .

CONJECTURE. If  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  belongs to the class  $\mathbb{A}$ , then  $T \in \mathbb{A}_{1,n}$  if and only if  $\text{mult}(R^{\mathcal{H}_0}) \geq n$  on  $\mathbb{T} \setminus E_T^r$ .

If we were able to prove this conjecture, we could easily prove that:

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathbb{A}_{1,n} = \mathbb{A}_{1,\aleph_0}.$$

*Acknowledgements.* The authors express their deep gratitude to G.R. Exner for helpful suggestions and stimulating discussions.

## REFERENCES

1. H. BERCOVICI, Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert space, *Ann. of Math. (2)* **128**(1988), 399–413.
2. H. BERCOVICI, C. FOIAŞ, C. PEARCY, *Dual Algebras with Applications to Invariant Subspaces and Dilation Theory*, in CBMS Regional Conf. Ser. in Math., vol. 56, Amer. Math. Soc., Providence 1985.
3. H. BERCOVICI, L. KÉRCHY, Quasimilarity and properties of the commutant of  $C_{11}$  contractions, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **45**(1983), 67–74.
4. B. CHEVREAU, G.R. EXNER, C. PEARCY, On the structure of contraction operators. III, *Michigan Math. J.* **36**(1989), 29–62.
5. B. CHEVREAU, G.R. EXNER, C. PEARCY, Boundary sets for a contraction, *J. Operator Theory* **34**(1995), 347–380.
6. B. CHEVREAU, Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique. II, *J. Operator Theory* **20**(1988), 269–293.
7. B. CHEVREAU, Survey of the class  $\mathbb{A}$ , preprint.
8. B. CHEVREAU, C. PEARCY, On the structure of contraction operators. I, *J. Funct. Anal.* **76**(1988), 1–29.
9. P. DUREN, *Theory of  $H^p$  Spaces*, Academic Press, New York 1970.
10. G.R. EXNER, Y.S. JO, I.B. JUNG,  $C_0$  contractions: Dual operators algebra, Jordan models and multiplicity, *J. Operator Theory* **33**(1995), 381–394.
11. K. HOFFMAN, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1965.
12. M. OUANASSER, Sur les contractions dans la classe  $\mathbb{A}_n$ , *J. Operator Theory* **28**(1992), 105–120.
13. B.SZ.-NAGY, C. FOIAŞ *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North Holland, Amsterdam 1970.

ISABELLE CHALENDAR

UFR Mathématiques et Informatique  
 Université Bordeaux I  
 351, cours de la Libération  
 33405 Talence Cedex  
 FRANCE

E-mail: chalenda@math.u-bordeaux.fr

FRÉDÉRIC JAECK

UFR Mathématiques et Informatique  
 Université Bordeaux I  
 351, cours de la Libération  
 33405 Talence Cedex  
 FRANCE

E-mail: jaeck@math.u-bordeaux.fr

Received April 4, 1996; revised January 13, 1997.

## **Deuxième partie**

### **Paires commutatives de contractions**

# 1 Spectre d'une paire commutative d'opérateurs.

## 1.1 Complexe de Koszul et spectre de Taylor.

Dans son article "A joint spectrum for several commuting operators" (cf [27]) Taylor propose une notion de spectre dans les algèbres d'opérateurs qui possède les principales propriétés issues de la notion de spectre joint dans les algèbres de Banach commutatives et s'adapte bien à la résolution de certaines équations. Pour une paire  $T = (T_1, T_2)$  d'opérateurs sur un espace de Hilbert  $H$ , on définit les applications suivantes :

$$\delta_0(T) : 0 \hookrightarrow H$$

$$\begin{aligned} \delta_1(T) : H &\longrightarrow H \oplus H \\ x &\longrightarrow (-T_2x, T_1x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2(T) : H \oplus H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longrightarrow T_1x + T_2y \end{aligned}$$

$$\delta_3(T) : H \longrightarrow 0.$$

Notons aussi la forme des applications adjointes :

$$\begin{aligned} \delta_1^*(T) : H \oplus H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longrightarrow -T_2^*x + T_1^*y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2^*(T) : H &\longrightarrow H \oplus H \\ x &\longrightarrow (T_1^*x, T_2^*x). \end{aligned}$$

On remarque que  $\text{Im}\delta_i(T) \subset \text{Ker}\delta_{i+1}(T)$   $i = 0, 1, 2$  grâce à la commutativité de la paire  $T$  et on a donc le complexe de Koszul  $K(T_1, T_2)$  :

$$0 \xrightarrow{\delta_0(T)} H \xrightarrow{\delta_1(T)} H \oplus H \xrightarrow{\delta_2(T)} H \xrightarrow{\delta_3(T)} 0.$$

Les groupes de cohomologie associés sont notés  $H^i = \frac{\text{Ker}\delta_{i+1}(T)}{\text{Im}\delta_i(T)}$   $i = 0, 1, 2$ . Dans la suite on écrira  $\delta_i$  pour  $\delta_i(T)$  si il n'y a pas de confusion possible. Par définition, l'exactitude du complexe se traduit par trois propriétés :

1)  $H^0 = 0$  i.e.  $\text{Ker}T_1 \cap \text{Ker}T_2 = (0)$

2)  $H^1 = 0$  i.e. toute solution  $(x_1, x_2)$  de l'équation  $T_1x_1 + T_2x_2 = 0$  est de la forme

$(-T_2x, T_1x)$  pour un certain  $x \in H$ .

$$3) H^2 = 0 \text{ i.e. } \text{Im}T_1 + \text{Im}T_2 = H.$$

On définit alors le spectre de  $T$  par  $\text{SP}(T) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \text{ tels que } K(T_1 - \lambda_1, T_2 - \lambda_2) \text{ est inversible}\}$ .

On notera aussi  $\sigma(T)$  ou  $\sigma$  si il n'y a pas d'ambiguïté.

De plus on dira qu'une paire d'opérateurs  $T$  est inversible si  $(0, 0) \notin \text{SP}(T)$ .

On a la proposition suivante due Taylor :

**Proposition 1.1** (Taylor [27])

1.  $\text{SP}(T)$  est un compact du polydisque  $D_{\rho(T)}$  o  $\rho(T) = (\rho(T_1), \rho(T_2))$  et  $\rho(T_i) = \lim_n \|T_i^n\|^{1/n}$ .
2. On note ici, pour un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H)$ ,  $\sigma(A)$  son spectre et on désigne par  $\pi_i$  la  $i$ -me projection de  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . On a alors :  $\pi_i(\text{SP}(T)) = \sigma(T_i)$   $i = 1, 2$ .  
En particulier si  $H \neq 0$  on a  $\text{SP}(T) \neq \emptyset$ .

Dautre part l'analyse géométrique ou en termes d'opérateurs des groupes de cohomologie donne des résultats sur la structure de la paire  $T$ .

**Proposition 1.2** Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire d'opérateurs qui commute.

Si  $H^1(T) = 0$  alors on a :

$$\text{KER}(T_1) = T_2(\text{KER}T_1)$$

$$\text{KER}(T_2) = T_1(\text{KER}T_2)$$

Preuve : Soit  $x \in \text{KER}T_1$  : on a alors  $T_1x + T_20 = 0$  et donc  $(x, 0) \in \text{KER}\delta_2$ .

Puisque  $H^1 = \frac{\text{KER}\delta_2}{\text{Im}\delta_1} = 0$ , on en déduit que  $(x, 0) \in \text{Im}\delta_1$ , c'est dire, il existe  $\theta \in H$  tel que  $(x, 0) = (-T_2\theta, T_1\theta)$ . Donc  $\text{KER}T_1 \subset T_2(\text{KER}T_1)$ .

Mais  $T_1$  et  $T_2$  commutent, donc  $\text{KER}T_1 \in \text{Lat}T_2$  ce qui établit le résultat.  $\square$

Dans le cas o la paire  $T$  double-commute on peut pousser l'analyse plus loin ; en particulier Curto a montré le résultat suivant :

**Proposition 1.3** (Curto [9]) Soit  $T = (V_1, T_2)$  une paire d'opérateurs qui double-commute,  $V$  étant une isométrie. Dans ce cas on a :

$$T \text{ inversible} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{KER}V_1^* \cap \text{KER}T_2 = 0 \\ \text{et} \\ \text{Im}V_1 + \text{Im}T_2 = H \end{array} \right.$$

En fait la proposition 1.2 montre que si  $H^1 = 0$  alors on a toujours  $\text{Ker}T_2 \perp \text{Ker}T_1^*$  et  $\text{Ker}T_1 \perp \text{Ker}T_2^*$  et ceci pour toute paire d'opérateurs qui commute.

Dans ce qui suit on considère une paire d'opérateurs  $T$  qui double-commute mais on indiquera par (DC) o la double-commutativité joue un rôle.

On note  $\Lambda^p = \delta_p \delta_p^* + \delta_{p+1}^* \delta_{p+1}$   $p = 0, 1, 2$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Lambda^0 x &= T_2^* T_2 x + T_1^* T_1 x \\ \Lambda^1(x, y) &= (T_2 T_2^* x - T_2 T_1^* y; -T_1 T_2^* x + T_1 T_1^* y) + \\ &\quad (T_1^* T_1 x + T_1^* T_2 y; T_2^* T_1 x + T_2 T_2 y) \\ &\stackrel{\text{avec DC}}{=} (T_2 T_2^* x + T_1^* T_1 x; T_1 T_1^* y + T_2^* T_2 y) \\ \Lambda^2 x &= T_1 T_1^* x + T_2 T_2^* x \end{aligned}$$

**Proposition 1.4** *Pour toute paire  $T$  d'opérateurs qui commute on a :*

*Pour chaque  $p$ ,  $H^p = 0 \implies \text{Ker}\Lambda^p = 0$  et il y a équivalence ds que  $\text{Im}\delta_p$  est fermée.*

Preuve : Les opérateurs  $\delta_p \delta_p^*$  et  $\delta_{p+1}^* \delta_{p+1}$  étant positifs on a  $\text{Ker}\Lambda^p = \text{Ker}\delta_p^* \cap \text{Ker}\delta_{p+1}$ , ce qui établit la proposition.  $\square$

On en déduit la traduction suivante de l'exactitude du complexe :

$$\begin{aligned} H^0(T) = 0 &\iff \text{Ker}T_1 \cap \text{Ker}T_2 = 0 \\ H^1(T) = 0 &\stackrel{\text{avec DC}}{\iff} \begin{cases} \text{Im}\delta_1 \text{ fermé} \\ \text{Ker}T_2^* \cap \text{Ker}T_1 = 0 \end{cases} \\ H^2(T) = 0 &\iff \begin{cases} \text{Im}\delta_2 \text{ fermé} \\ \text{Ker}T_1^* \cap \text{Ker}T_2^* = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De plus Curto a montré le résultat suivant :

**Proposition 1.5** *(Curto [9, Prop.3.4 p.134]) Pour toute paire  $T$  qui commute sur  $H$  on a l'équivalence suivante :*

*$T$  inversible  $\iff [\Lambda^p$  inversible pour tout  $p = 0, 1, 2$ ].*

En fait la preuve de Curto permet d'établir un rapport un peu plus précis entre les groupes de cohomologie et l'inversibilité des opérateurs  $\Lambda^p$ . Sans autre hypothse que la commutativité de la paire  $T$  on a :

**Proposition 1.6** *Soit  $T$  une paire d'opérateurs qui commute sur  $H$ .*



1.  $H^2 = 0 \iff \Lambda^2$  inversible
2.  $\Lambda^p$  inversible gauche  $\implies H^p = 0$
3.  $(H^2 = 0 \text{ et } H^1 = 0) \implies \Lambda^1$  inversible
4.  $(H^1 = 0 \text{ et } H^0 = 0) \implies \Lambda^0$  inversible

Preuve : C'est essentiellement celle de Curto. La réécrire?  $\square$

Ce qui précède peut alors se traduire sur la matrice  $\hat{T}$  définie par

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_1^* \end{pmatrix} : (H \oplus H)^2 \longrightarrow H \oplus H$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} T_1x + T_2y \\ -T_2^*z + T_1^*t \end{pmatrix}$$

Curto a montré qu'une paire  $T$  d'opérateurs qui commute est inversible si et seulement si  $\hat{T}$  l'est. Ceci résulte immédiatement de ce qui précède et des relations :  $\hat{T}^*\hat{T} = \Lambda^1$  et  $\hat{T}\hat{T}^* = (\Lambda^2, \Lambda^0)$ . On en déduit le résultat :

**Proposition 1.7** Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire d'opérateurs qui double-commute.

Si  $\Lambda^0(T)$  et  $\Lambda^2(T)$  sont inversibles alors  $\text{Ker}T_1 = T_2^*(\text{Ker}T_1)$ .

Preuve : La démonstration est fondée sur la remarque suivante (cf les définitions des  $\Lambda^p$ ) :

$$\Lambda^1(T_1, T_2^*) = \begin{pmatrix} \Lambda^0(T_1, T_2) \\ \Lambda^2(T_1, T_2) \end{pmatrix}$$

Or, d'après ce qui précède on a :

$$T \text{ inversible} \iff (\Lambda^p \text{ inversible } \forall p) \iff \begin{cases} \Lambda^0(T_1, T_2^*) \\ \Lambda^1(T_1, T_2^*) \\ \Lambda^2(T_1, T_2^*) \end{cases} \text{ inversibles}$$

En particulier  $H^1(T_1, T_2^*) = 0$ . Soit alors  $x \in H$  tel que  $T_1x = 0$  ; on a aussi  $T_1x + T_2^*0 = 0$  i.e.  $(x, 0) \in \text{Ker}\delta_2(T_1, T_2^*) = \text{Im}\delta_1(T_1, T_2^*)$ . On en déduit qu'il existe donc  $y \in H$  tel que :

$$\begin{cases} x = -T_2^*y \\ 0 = T_1y \end{cases}$$

D'o  $\text{Ker}T_1 \subset T_2^*(\text{Ker}T_1) \stackrel{\text{avec DC}}{\subset} \text{Ker}T_1$ .  $\square$

Comme cas particulier on retrouve ici un résultat de Curto.

**Proposition 1.8** (Curto [9, Cor.3.15 p.137]) *Soit  $T$  une paire d'opérateurs qui double-commute. On a alors :  $T$  inversible  $\implies \text{KERT}_1 \perp \text{KERT}_2$*

Le tableau suivant récapitule quelques traductions de l'inversibilité de  $T$  et on note ADC ou SDC pour signifier que les résultats sont obtenus avec ou sans double commutativité :

$$\begin{array}{ccc}
T \text{ inversible} & \xLeftrightarrow{\text{SDC}} & (H^p = 0 \quad \forall p) & \xLeftrightarrow{\text{SDC}} & (\Lambda^p \text{ inversible } \forall p) \\
& & \Updownarrow \text{ADC} & & \\
& & \left\{ \begin{array}{l} \text{KERT}_1 \perp \text{KERT}_2 \\ \text{KERT}_1 \perp \text{KERT}_2^* \\ \text{KERT}_1^* \perp \text{KERT}_2 \\ \text{KERT}_1^* \perp \text{KERT}_2^* \end{array} \right. & & 
\end{array}$$

## 1.2 Spectre essentiel et théorie Fredholm.

On met ici en évidence quelques définitions et propriétés du spectre essentiel pour une paire d'opérateurs. Pour les éléments plus complets d'une théorie Fredholm et la notion d'indice on peut consulter Albrecht [3], Ambrosie [4], Curto [9], Vasilescu [28][3].

**Définition 1.1** *On dit que  $\lambda \in \mathbb{C}^2$  est dans le spectre essentiel de  $T$  si le complexe  $K(T-\lambda)$  est essentiellement inexact, i.e. l'un au moins des espaces  $H^p$  est de dimension infinie.*

Cette notion permet de dissocier trois parties du spectre essentiel de  $T$  : on notera  $\sigma_e = \sigma_{le} \cup \sigma_{me} \cup \sigma_{re}$ .

$$\begin{array}{l}
\lambda \in \sigma_{le} \iff \left\{ \begin{array}{l} \dim H^0 = +\infty \\ \text{ou} \\ \text{IM}\delta_1(T-\lambda) \text{ non fermé (ceci impliquant } \dim H^1 = +\infty) \end{array} \right. \\
\lambda \in \sigma_{me} \iff \left\{ \begin{array}{l} \dim H^1 = +\infty \text{ et } \text{IM}\delta_1(T-\lambda) \text{ fermé} \\ \text{ou} \\ \text{IM}\delta_2(T-\lambda) \text{ non fermé (ceci impliquant } \dim H^2 = +\infty) \end{array} \right. \\
\lambda \in \sigma_{re} \iff \left\{ \begin{array}{l} \dim H^2 = +\infty \\ \text{et} \\ \text{IM}\delta_2(T-\lambda) \text{ fermé} \end{array} \right.
\end{array}$$

On a alors la traduction suivante en terme de suites de vecteurs de  $H$ . Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ , on obtient :

1.  $\lambda \in \sigma_{le}$  si il existe une suite  $(x_n)_n$  orthonormale dans  $H$  telle que  $(T_1 - \lambda_1)x_n \rightarrow 0$  et  $(T_2 - \lambda_2)x_n \rightarrow 0$ .
2.  $\lambda \in \sigma_{me}$  si il existe une suite  $(X_n)_n = ((x_n)_n \oplus (y_n)_n)$  orthonormale dans  $(\text{Im}\delta_1)^\perp \subset H \oplus H$  telle que  $\delta_2(T - \lambda)X_n = (T_1 - \lambda_1)x_n + (T_2 - \lambda_2)y_n \rightarrow 0$ .
3.  $\lambda \in \sigma_{re}$  si il existe  $(x_n)_n$  suite orthonormale dans  $(\text{Im}\delta_2(T - \lambda))^\perp$  i.e. telle que  $(T_1^* - \overline{\lambda_1})x_n \rightarrow 0$  et  $(T_2^* - \overline{\lambda_2})x_n \rightarrow 0$ .

**Proposition 1.9** (Curto [9, Cor.3.11 p.136]) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire d'opérateurs qui commute sur  $H$ . Alors  $T$  est Fredholm si et seulement si  $\hat{T}^1$  l'est.

Ce résultat permet de définir de façon élémentaire une notion d'indice pour les paires Fredholm d'opérateurs qui commutent : soit  $T$  une paire Fredholm, on pose  $i(T) = i(\hat{T})$  où  $\hat{T} \in \mathcal{L}((H \oplus H)^2)$ .

Nous rappelons quelques propriétés de l'indice qui nous seront utiles par la suite.

**Théorème 1.1** (Curto [9, Th.3 p.142]) On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des paires commutatives Fredholm sur  $H$ .

Alors  $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$  est continue, invariante par perturbation compacte et surjective.

En particulier  $i$  est constante sur les composantes connexes par arcs de  $\mathcal{F}$ .

De plus on peut donner une expression de l'indice en fonction des applications  $\delta_p$  :

**Proposition 1.10** (Curto [9, p.143]) Soit  $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{F}$ .

Alors on a :

$$i(T) = -\dim \text{KER}\delta_1^* + \dim(\text{KER}\delta_1 \cap \text{KER}\delta_2^*) - \dim(\text{Im}\delta_1^* \cap \text{Im}\delta_2) - \dim \text{KER}\delta_2$$

Nous finissons cette partie avec un exemple d'application de ce qui précède. Il s'agit des paires de shifts, qui constituent un test pour de nombreux problèmes et sert souvent de modèle.

### 1.3 Exemple : paires de shifts qui double-commute.

Dans cette partie nous montrons comment la double-commutativité garantit une certaine indépendance des deux shifts ; ceci se traduit en un mode fonctionnel simple et de fortes propriétés spectrales.

---

<sup>1</sup>cf. 1.1

Soit  $S = (S_1, S_2)$  une paire de shifts qui commute sur  $H$ . On sait (cf. ??) qu'il existe un calcul fonctionnel  $\Phi : H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon) \rightarrow \mathcal{A}_S$  o  $\mathcal{A}_S$  est l'algbre duale engendrée par  $S_1$  et  $S_2$ . Cette représentation est de plus  $C_{\cdot 0}$  (cf. ??).

Lorsque de plus la paire  $S$  double-commute, Ślocinski [25] a montré qu'elle constitue un module au sens du théorème suivant.

Commenons par rappeler quelques définitions :

**Définition 1.2** Soit  $V = (V(s))_{s \in S}$  un semi-groupe d'opérateurs sur  $H$ .

1. On dit qu'un sous-espace  $L \subset H$  est ambulant pour  $V$  si  $\forall s_1, s_2 \in S, s_1 \neq s_2$  on a  $V(s_1) \perp v(s_2)$ .
2. On dit que le semi-groupe  $V$  est de type  $s$  si il existe un sous-espace ambulant  $L$  tel que  $H = \bigoplus_{s \in S} V(s)L$ .

On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 1.2** (Ślocinski [25, Th.1 p.258]) Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux isométries qui commutent sur  $H$ . On note  $L_i = H \ominus V_i H$   $i = 1, 2$ .

Les quatre propositions suivantes sont alors équivalentes :

1. Le semi-groupe  $\{V_1^n V_2^m\}_{\mathbb{N}^2}$  est de type  $s$ .
2.  $V_1$  et  $V_2$  sont deux shifts qui double-commutent.
3.  $V_2$  est un shift et  $L_2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_1^n(L_1 \cap L_2)$ , ou bien  $V_1$  est un shift et  $L_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_2^n(L_1 \cap L_2)$ .
4. L'espace  $\mathcal{L} = L_1 \cap L_2$  est ambulant pour le semi-groupe  $\{V_1^n V_2^m\}_{\mathbb{N}^2}$  et  $H = \bigoplus_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} V_1^n V_2^m \mathcal{L}$ .

Pour une paire de shifts qui double-commute on a donc  $\mathcal{L} = \text{KERS}_1^* \cap \text{KERS}_2^* \neq (0)$  et un module pour  $S$  est la paire  $M = (M_{z_1}, M_{z_2})$  de multiplication par les variables indépendantes sur  $H^2(\mathcal{D}^\epsilon, \mathcal{L})$ .

**Proposition 1.11** Soit  $S = (S_1, S_2)$  une paire de shifts qui commute et telle que  $\mathcal{L} = \text{KERS}_1^* \cap \text{KERS}_2^* \neq (0)$ .

Alors on a  $\text{SPS} = \overline{\mathcal{D}}^2$  et la représentation  $\Phi$  est une isométrie.

Preuve : Le fait que  $\mathcal{L} \neq 0$  montre que  $0 \in \text{SP}(S)$ . On considère alors la transformation de Möbius  $M_\mu(z) = \frac{z - \mu}{1 - \bar{\mu}z}$  pour  $\mu \in \mathcal{D}$ .

Pour  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D}^\epsilon$ , la paire  $S^\mu := (S_1^{\mu_1}, S_2^{\mu_2}) := (M_{\mu_1}(S_1), M_{\mu_2}(S_2))$  reste une paire de shifts. De plus  $(S^\mu)^* = \overline{S^\mu} \circ \bar{\mu} = (\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2})$ . On en déduit facilement que la paire  $S^\mu$  double-commute et que  $0 \in \text{SP}(S^\mu)$ .

Puis on utilise le fait que pour tout  $f \in A(\mathcal{D}^\epsilon)$  et on a  $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$ , pour conclure avec  $T = S^\mu$  et  $f = M_\mu^{-1}$ .

De plus pour  $f \in H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  on peut écrire :

$$\|f\| = \sup_{\lambda \in \mathcal{D}^\epsilon} |f(\lambda)| \leq \rho(f(S_1, S_2)) \leq \|f(S_1, S_2)\|$$

où  $\rho(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$ ,  $T \in \mathcal{L}(H)$ . On déduit de cette remarque qu'une paire de shifts qui double-commute admet un calcul fonctionnel  $\Phi$  isométrique, i.e. elle appartient la classe A.  $\square$

Remarque : Dans le cas o  $\dim \mathcal{L} = 1$  Curto a montré dans [9, p.145 Th.5] que le spectre de la paire de multiplications  $M$  agissant sur  $H^2(\mathcal{D}^\epsilon)$  est  $\overline{\mathcal{D}^2}$ .

D'autre part, la formule donnant l'indice d'une paire d'opérateurs Fredholm qui double-commute permet d'établir le résultat suivant :

**Proposition 1.12** *Soit  $S = (S_1, S_2)$  une paire de shifts Fredholm qui double-commute, et  $\mathcal{L} = \dim(\text{KERT}_1 T_1^* \cap \text{KERT}_2 T_2^*)$ .*

*On a alors  $i(S) = -\dim(\text{KERT}_1 T_1^* \cap \text{KERT}_2 T_2^*) = -\dim \mathcal{L}$*

Remarque 1 :  $\text{KERT}_1 T_1^* \cap \text{KERT}_2 T_2^* = \text{KER} \Lambda^2(T)$ .

Remarque 2 : Pour une paire d'isométries qui double-commute on a  $\Lambda^0 = 1$  et  $\text{KER} \Lambda^1 = \text{KER} \Lambda^2 = \text{KERT}_1^* \cap \text{KERT}_2^*$ .

Donc une paire de shifts qui double-commute est Fredholm si et seulement si l'espace ambulant  $\mathcal{L}$  est de dimension finie.

Remarque 3 :  $\dim H^2 = n$  signifie  $\dim(\text{IM} \delta_2)^\perp = n$  i.e.  $\dim \text{KER} \delta_2^* = n$  ou encore  $\dim(\text{KERT}_1^* \cap \text{KERT}_2^*) = n$ .

Pour finir cette partie, on considère la paire  $M_\nu = (M_{z_1}, M_{z_2})$  de multiplications par  $z_1$  et  $z_2$  sur l'espace  $L^2(\nu)$  o  $\nu$  est une mesure borélienne finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$ . On notera  $\mathcal{M}_{(0,0)}$  l'ensemble des mesures représentatives de  $(0,0)$  relativement l'algbre du bidisque  $A(\mathcal{D}^\epsilon)$  :  $\theta \in \mathcal{M}_{(0,0)} \iff \int_{\mathcal{T}} f d\theta = f(0,0) \quad \forall f \in A(\mathcal{D}^\epsilon)$ .

On notera  $m_2$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  et pour toute mesure  $\nu$  sur  $\mathcal{T}^\epsilon$ , on notera  $H^2(\nu)$  la fermeture des polynmes analytiques dans  $L^2(\nu)$ .

**Proposition 1.13** *1.  $\mathcal{B} = \{z_1^n z_2^m\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$  est une base orthonormée de  $L^2(\nu)$  si et seulement si  $\nu \in \mathcal{M}_{(0,0)}$ .*

2. Ainsi, si  $\nu \in \mathcal{M}_{(0,0)}$  alors la paire  $M_\nu \in \mathcal{L}^{(2)}(L^2(\nu))$  est unitairement équivalente  $M_{m_2} \in \mathcal{L}^{(2)}(L^2(\mathcal{T}^\epsilon))$  et  $\tilde{M}_\nu = M_\nu|_{H^2(\nu)}$  est une paire de shifts qui double-commute, d'indice  $-1$ .

## 2 Dilatations isométriques. Extensions co-isométriques.

### 2.1 Généralités.

Soit  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$  et  $T$  une application de  $G$  dans  $\mathcal{L}(H)$  telle que  $T(st) = T(s)T(t) \forall s, t \in G$  et  $T(e) = 1$ .

On dit que  $T$  est de type positif si on a simultanément :

$$(1) T(s^{-1}) = T(s)^* \quad \forall s \in G.$$

$$(2) \sum_s \sum_t \langle T(t^{-1}s)h(s)|h(t) \rangle \geq 0 \text{ pour toute application } h \text{ de } G \text{ dans } H \text{ support fini.}$$

Soit  $M$  un sous-monode de  $G$  ; une représentation unitaire de  $M$  dans  $H$  est une application  $U$  de  $M$  dans  $\mathcal{L}(H)$  telle que :

$$\begin{cases} U(st) = U(s)U(t) \quad \forall s, t \in M \text{ et } U(e) = 1 \\ U(s) \text{ est unitaire pour tout } s \in M \end{cases}$$

On a donc un morphisme de monodes à valeurs unitaires.

Si  $R$  est un sous-espace de  $H$  et  $U$  une représentation unitaire de  $M$  dans  $R$ , on dit que  $U$  dilate  $T$  si  $T(s) = \text{Pr}_R U(s) \quad \forall s \in M$ .  $U$  est minimale si de plus on a  $R = \bigvee_{s \in M} U(s)H$ .

Remarque : si  $M$  est un groupe, une représentation unitaire de  $M$  dans  $H$  est automatiquement de type positif. En effet on a :

$$\sum_s \sum_t \langle U(t^{-1}s)h(s)|h(t) \rangle = \sum_s \sum_t \langle U(t)^* U(s)h(s)|h(t) \rangle = \left\| \sum_s U(s)h(s) \right\|^2 \geq 0$$

Les résultats de cette partie sont une synthèse de [26] et sont exposés de façon à aller rapidement vers la construction des dilatations pour les paires de contractions dans la prochaine section.

**Théorème 2.1** ([26]) (a) Pour toute application  $T$  de  $G$  dans  $\mathcal{L}(H)$  de type positif, il existe une représentation unitaire  $U$  du groupe  $G$  dans un sous-espace  $R$  de  $H$  qui dilate  $T$  et qui est minimale.

Une telle dilatation est déterminée isomorphisme près par l'application  $T$  (grâce à la minimalité).

(b) Réciproquement, si  $U$  est une représentation unitaire de  $G$  sur  $H$  et  $R$  est un sous-espace de  $H$ , la fonction  $T$  définie par  $T(s) = \text{Pr}_R U(s)$  est de type positif.

Remarque : pour l'unicité, le procédé est classique. Pour deux représentations unitaires minimales  $U$  et  $U'$  associées à  $T$ , on a  $\langle U(s)h|U(t)h' \rangle = \langle T(t^{-1}s)h \rangle = \langle U'(s)h|U'(t)h' \rangle \quad \forall s \in$

$G, \forall h, h' \in H.$

La minimalit permet de dfinir l'quivalence unitaire partir de :

$$\sum_{\text{finie}} U(s)h_s \longrightarrow \sum_{\text{finie}} U'(s)h_s$$

Soit  $A$  une application de  $M$  dans  $\mathcal{L}(H)$  telle que  $A(st) = A(s)A(t)$  et  $A(e) = 1$  ; trouver une dilatation unitaire minimale (d.u.m.) de  $A$  est equivalent tablir l'existence d'un prolongement de  $A$  qui soit de type positif. En effet, si  $G$  est un groupe engendr par  $M$ , et si il existe  $U$  sur  $M$  qui dilate  $A$ , alors  $U$  se prolonge  $G$  par  $U(s^{-1}) = U(s)^* \forall s \in M$ . Ceci permet alors de dfinir  $A$  sur  $G$  par  $A(s^{-1}) = \text{Pr}_H U(s^{-1})$  ce qui donne un prolongement de type positif.

Rciproquement un prolongement de type positif admet une dilatation unitaire par le thorme precedent.

Soient  $\Omega$  un ensemble et  $\mathcal{T} = \{T_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  une famille de contractions qui commutent. On note  $\mathbb{Z}^{[\Omega]}$  ( resp.  $\mathbb{N}^{[\Omega]}$ ) les familles  $(n_\omega)_{\omega \in \Omega}$  d'lments de  $\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathbb{N}$ ) n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Pour  $n, m \in \mathbb{Z}^{[\Omega]}$  on note :  $n \cup m = (\max(n_\omega, m_\omega))_{\omega \in \Omega}$ ,  $n \cap m = (\min(n_\omega, m_\omega))_{\omega \in \Omega}$ ,  $n+ = n \cup 0$  et  $n- = -(n \cup 0)$ .

On munit  $\mathbb{Z}^{[\Omega]}$  de sa structure usuelle de groupe additif. On peut alors dfinir une fonction  $T$  sur  $\mathbb{N}^{[\Omega]}$  par  $T(n) \stackrel{\text{not}}{=} T^n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\omega \in \Omega} T^{n_\omega}$ .

**Théorème 2.2** ([26]) *Toute paire de contractions qui commute possde une d.u.m.*

Remarques : (1) La minimalit dans le rsultat au dessus n'entraîne pas l'unicit de la dilatation.

(2) Parrot dans [22] a construit trois contractions qui commutent mais qui ne possdent pas de dilatation unitaire.

(3) Pour deux contractions  $T_1, T_2$  qui commutent l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ (n_1, n_2) &\longrightarrow T_1^{n_1} T_2^{n_2} \end{aligned}$$

admet en gnral un prolongement de type positif, mais ce prolongement n'est pas forcement unique.

Cas du prolongement rgulier : On peut dfinir un prolongement de  $T^n$   $\mathbb{Z}^{[\Omega]}$  par  $T^n = (T^{n-})^* T^{n+}$  appel prolongement rgulier.

Pour  $v$  sous-ensemble fini de  $\Omega$ , on note :  $|v| = \text{card}(v)$  et  $e(v) = e_\omega(v)$  o

$$e_\omega(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in v \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème 2.3** *Le prolongement rgulier  $T$  est de type positif si et seulement si :*

$$\sum_{v \subset u} (-1)^{|v|} (T^{e(v)}) \leq 0$$

pour tout sous-ensemble fini  $u$  de  $\Omega$ .

Dans ce cas  $T$  possde une d.u.m. unique appele dilatation unitaire minimale rgulire de  $T$  (d.u.m.r.).

**Proposition 2.1** ([26]) *Si  $\mathcal{T}$  est une collection de contractions qui double-commute alors le prolongement rgulier est de type positif.*

## 2.2 Dilatation isométrique et extension co-isométrique d'une paire de contraction qui double-commute.

Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions qui double-commute ; si  $U = (U_1, U_2)$  est la d.u.m.r. de  $T$  sur  $K = \bigvee_{\mathbb{Z}^2} U_1^n U_2^m H$ , on appelle dilatation isométrique minimale rgulire le

couple  $V = (V_1, V_2)$  o  $V_i$  est la restriction de  $U_i$   $K_+ = \bigvee_{\mathbb{N}^2} U_1^n U_2^m H$ .

Si  $T$  est un opérateur agissant sur  $H$  et si  $K$  est un sur-espace de  $H$ , on appelle \*-extension de  $T$  sur  $K$  tout opérateur  $A \in \mathcal{L}(K)$  tel que  $H$  est rduisant pour  $A$ .

Le lemme suivant est un rsultat d'extention utile pour analyser les propriéts de certaines dilatations que nous construirons par la suite.

**Lemme 2.1** (Śłocinski [24]) *Soient  $T$  une contraction et  $X$  un opérateur qui double-commute dans  $\mathcal{L}(H)$ . Soit  $W \in \mathcal{L}(L)$   $H \subset L$  la d.u.m. de  $T$ .*

*Alors il existe une et une seule \*-extension  $Y$  de  $X$  sur  $L$  telle que  $YW = WY$ .*

*De plus on a :*

1.  $\|X\| = \|Y\|$ .
2.  $L_+ = \bigvee_{\mathbb{N}} W^n H$  rduit  $Y$ .
3.  $Y|_{L_+}$  et  $U|_{L_+}$  double-commutent.
4. Si  $X$  est unitaire alors  $Y$  l'est aussi.

Construction de la dilatation unitaire rgulire de  $T = (T_1, T_2)$  :

Śłocinski dans [24] donne la construction d'une dilatation d'une paire  $T$  qui double-commute ; celle-ci utilise le lemme prcdent et nous rappelons la dmarche qui servira analyser la structure de la dilatation ainsi obtenue.

Soit  $S_2$  la d.u.m. de  $T_2$  sur  $K_0 = \bigvee_{\mathbb{Z}} S_2^n H$  ; par le lemme 2.1 il existe une unique \*-extension



$S_1$  de  $T_2$  sur  $K_0$  telle que  $S_2S_1 = S_1S_2$ . De plus  $K_0^+ = \bigvee_{\mathbb{N}} S_2^n H$  rduit  $S_1$ ,  $\|S_1\| = \|T_1\|$  et on note  $\tilde{S}_i = S_{i|K_0^+}$ . La paire  $(\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$  double-commute.

Dans ce cas  $S_1$  reste une contraction et on peut donc considrer sa d.u.m.  $U_1$  sur l'espace  $K = \bigvee_{\mathbb{Z}} U_1^n K_0$ .

Puisque  $S_2$  est unitaire et que  $S_1S_2 = S_2S_1$ , la paire  $(S_1, S_2)$  double-commute et on peut appliquer nouveau le lemme : il existe une unique \*-extention de  $S_2$  sur  $K$ , note  $U_2$ , qui est unitaire (car  $S_2$  l'est) et telle que  $U_2U_1 = U_1U_2$ . De plus l'espace  $K_1^+ = \bigvee_{\mathbb{N}} U_1^n K_0$  rduit

$U_2$  et la paire  $U_{1|K_1^+}, U_{2|K_1^+}$  double-commute.

Comme  $U_2$  est une \*-extention de  $S_2$ , on a :

$$K_+ = \bigvee_{\mathbb{N}} U_1^n \bigvee_{\mathbb{Z}} S_2^m H = \bigvee_{\mathbb{Z}^2} U_1^n U_2^m H$$

On note  $K_+ = \bigvee_{\mathbb{N}} K_0^+ = \bigvee_{\mathbb{N}} U_1^n \bigvee_{\mathbb{N}} S_2^m H = \bigvee_{\mathbb{N}^2} U_1^n U_2^m H \in \text{LAT}U_1 \cup \text{LAT}U_2$  et  $V = (V_1, V_2)$  o  $V_i = U_{i|K_1^+}$   $i = 1, 2$ .

On remarque que  $U_{1|K_1^+}$  est la dilatation isométrique minimale de  $S_1$ . Słocinski appelle cette dilatation unitaire (resp. isométrique) minimale la dilatation unitaire (resp. isométrique) minimale naturelle de  $T$ .

**Proposition 2.2** *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions qui double-commute,  $U = (U_1, U_2)$  sa d.u.m. naturelle, et  $V = (V_1, V_2)$  sa d.i.m. naturelle. On a alors :*

1.  $V$  double-commute.
2.  $U$  est la d.u.m.r. de  $T$ .
3.  $V^* = (V_1^*, V_2^*)$  est une extension co-isométrique minimale de  $T^*$ .
4.  $V_i$  est une \*-extension de la dilatation isométrique minimale de  $T_i$  pour  $i = 1, 2$ .

Dans ce cas, comme pour une seule contraction, on a une relation privilgie entre d.i.m. de  $T$  et e.c.i.m. de  $T^*$ .

Preuve : (1) Les isométries  $V_i$  agissent sur  $K_+ = \bigvee_{\mathbb{N}^2} U_1^n S_2^m H = \bigvee_{\mathbb{N}^2} V_1^n V_2^m H$

Soient  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  et  $h \in H$ .

Pour  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} V_2 V_1^* V_1^n V_2^m h &= V_2 V_1^{n-1} V_2^m h \\ &= V_1^{n-1} V_2^{m+1} h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_1^* V_2 V_1^n V_2^m h &= V_2 V_1^* V_1^n V_2^m h \\ &= V_1^{n-1} V_2^{m+1} h \end{aligned}$$

Pour  $n = 0$  et  $m \geq 1$ , on a :

$$V_1 V_2^* V_2^m h = V_1 V_2^{m-1} h = V_2^* V_1 V_2^m h$$

Pour  $n = 0$ ,  $m = 0$  on a :

$$\begin{aligned} V_2 V_1^* h &= V_2 \tilde{S}_1^* h \quad \text{car } V_1 \text{ est la d.i.m. de } \tilde{S}_1 \text{ donc } V_1^* \text{ est l'e.c.i.m. de } \tilde{S}_1^*. \\ &= \tilde{S}_2 \tilde{S}_1^* h \quad \text{car } V_2 \text{ est une extention de } \tilde{S}_2 : \forall x \in K_0^+ \quad V_2 x = U_2 x = S_2 x = \tilde{S}_2 x. \\ &= \tilde{S}_1^* \tilde{S}_2 h \quad \text{car le lemme 2.1 garantit que } \tilde{S}_1 \text{ et } \tilde{S}_2 \text{ double-commutent.} \\ &= V_1^* V_2 h. \end{aligned}$$

(2)  $U$  est rgulire : il faut montrer que pour tout  $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$  on a :

$$(T^{n-})^* T^{n+} = \text{Pr}_H U_1^{n_1} U_2^{n_2} \Big|_H \stackrel{\text{not}}{=} (U_1^{n_1} U_2^{n_2})_H.$$

On peut crire  $n_i = n_i^+ + n_i^-$  avec  $n_i^+ \geq 0$ ,  $n_i^- \leq 0$  et  $n_i = n_i^+$  ou  $n_i = n_i^-$ . Dans ce cas on a  $n- = (-n_1^-, -n_2^-)$  et  $n+ = (n_1^+, n_2^+)$ . Avec ces notations on a alors :

$$(T^{n-})^* T^{n+} = (T_2^*)^{-n_2^-} (T_1^*)^{-n_1^-} T_1^{n_1^+} T_2^{n_2^+}.$$

Pour  $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$  et  $h \in H$ , on a :

$$\begin{aligned} U_1^{n_1^-} h &= (S_1^*)^{-n_1^-} h \quad \text{car } U_1^* \text{ est l'e.c.i.m. de } S_1. \\ &= (T_1^*)^{-n_1^-} h \quad \text{car } S_1 \text{ est une *-extention de } T_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2^{n_2^-} h &= (S_2^*)^{-n_2^-} h \quad \text{car } U_2 \text{ est une *-extention de } S_2. \\ &= (T_2^*)^{-n_2^-} h \quad \text{car } S_2^* \text{ est l'e.c.i.m. de } T_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr_H U_1^{n_1} U_2^{n_2} h &= \Pr_H U_1^{n_1} S_2^{n_2^+} h \quad \text{car } U_2 \text{ est une extension de } S_2. \\
&= \Pr_H S_1^{n_1^+} S_2^{n_2^+} h \quad \text{car } U_1 \text{ est la d.u.m. de } S_1 \text{ et } S_2^{n_2^+} h \in K_0. \\
&= \Pr_H S_2^{n_2^+} S_1^{n_1^+} h \\
&= \Pr_H S_2^{n_2^+} T_1^{n_1^+} h \quad \text{car } S_1 \text{ est une extension de } T_1. \\
&= T_2^{n_2^+} T_1^{n_1^+} h \quad \text{car } S_2 \text{ est la d.u.m. de } T_2.
\end{aligned}$$

La combinaison en déduit que  $U$  est l'unique (isomorphisme près) dilatation unitaire régulière minimale de la paire  $T$ .

(3) On montre tout d'abord que  $V_2^*$  est une  $*$ -extension de  $\tilde{S}_2$  (ce qui prouve aussi (4)) : pour  $k \in K_0^+$ , et sachant que la d.u.m. d'une contraction est une extension de sa d.i.m., on a  $V_2 k = U_2 k = S_2 k = \tilde{S}_2 k$ .

D'autre part si  $k$  est de la forme  $k = V_2^n h$ ,  $h \in H$ , on peut écrire  $V_2^* k = V_2^* V_2^n h$ .

Pour  $n \geq 1$ , on en déduit que  $V_2^* k = V_2^{n-1} h = \tilde{S}_2^{n-1} h = \tilde{S}_2^* S_2^n h = \tilde{S}_2^* k$ .

Pour l'action sur les éléments de  $H$  on peut écrire :

$$\begin{aligned}
V_2^* h &= \Pr_{K_0^+} \tilde{S}_2^* h \quad \text{car } V_2 \text{ est une extension de } \tilde{S}_2. \\
&= \Pr_{K_0^+} T_2^* h \quad \text{car } \tilde{S}_2^* \text{ est l'e.c.i.m. de } T_2^*. \\
&= T_2^* h \\
&= \tilde{S}_2^* h.
\end{aligned}$$

Enfin ceci étant établi,  $T = (T_1, T_2)$ , on associe la d.i.m.r.  $V = (V_1, V_2)$  pour laquelle  $V_2$  est une  $*$ -extension de  $\tilde{S}_2$ , d.i.m. de  $T_2$ .

Le même procédé s'applique à la paire  $T' = (T_2, T_1)$  et donne une d.i.m.r.  $V' = (V'_2, V'_1)$  telle que  $V'_1$  est une  $*$ -extension de  $\tilde{S}'_1$ , d.i.m. de  $T_1$ .

On a donc  $V'$  qui est une d.i.m.r. de  $T$  d'après l'unicité de cette dilatation, et finalement on en déduit que  $V_1$  est une  $*$ -extension de la d.i.m. de  $T$ .

ceci montre que  $V_1^*$  est une extension co-isométrique de  $T_1^*$  et  $V_2^*$  est une extension co-isométrique de  $T_2^*$ .  $\square$

On dira que  $V^* = (V_1^*, V_2^*)$  est l'extension co-isométrique minimale régulière de  $T^*$ .

### 2.3 Décomposition de Wold d'une paire d'isométries qui double-commute.

Soit  $V = (V_1, V_2)$  une paire d'isométries sur  $H$  qui commute. On dit que  $V$  possède une décomposition de Wold si il existe  $H_{UU}$ ,  $H_{US}$ ,  $H_{SU}$  et  $H_{SS}$ , quatre espaces réduisant pour  $V$  (c'est-à-dire pour chacun des opérateurs  $V_i$ ) tels que :

1.  $H = H_{UU} \oplus H_{US} \oplus H_{SU} \oplus H_{SS}$
2.  $V_{i|H_{UU}}$  sont unitaires  $i = 1, 2$ .
3.  $V_{1|H_{US}}$  et  $V_{2|H_{SU}}$  sont unitaires.
4.  $V_{1|H_{SU}}$  et  $V_{2|H_{US}}$  sont des shifts.
5.  $V_{1|H_{SS}}$  et  $V_{2|H_{SS}}$  sont des shifts.

Le resultat qui suit est du Słocinski (cf [25]) et décrit les paires d'opérateurs possédant une telle décomposition.

**Proposition 2.3** (Słocinski [25]) *Soit  $V = (V_1, V_2)$  une paire d'isométries qui commute.*

*Si  $V$  admet une décomposition de Wold, alors celle-ci est unique.*

*Soit  $H = H_1 \oplus K_1$  la décomposition de  $H$  relative à la décomposition de Wold de l'isométrie  $V_1$ , avec  $V_{1|H_1}$  unitaire ; puis  $K_1 = H_2 \oplus K_2$  la décomposition de  $K_1$  issue de la décomposition de Wold de l'isométrie  $V_{1|K_1}$ , où  $H_2$  est associée à la partie unitaire.*

*Alors la paire  $V$  possède la décomposition de Wold si et seulement si pour tout  $i = 1, 2$  l'espace  $H_i$  est réductible pour  $V_i$ .*

*En particulier toute paire d'isométries qui double-commute admet une décomposition de Wold.*

Remarque : Dans une décomposition de type Wold seule la paire de shifts peut ne pas être doublement commutative.

## 2.4 Structure de la d.i.m.r. d'une paire qui double-commute.

On considère ici une paire  $T = (T_1, T_2)$  de contractions qui double-commute sur  $H$  et  $V = (V_1, V_2)$  sa dilatation isométrique minimale régulière sur  $K_+$ .

Comme  $V$  double-commute on a la décomposition de Wold et on écrit :

$$K_+ = K_{UU} \oplus K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

Pour un sous-ensemble quelconque  $S$  de  $H$ , on utilisera les notations suivantes :

$$M_+(S) = \bigvee_{\mathbb{N}^2} V_1^n V_2^m S$$

$$R_i(S) = \bigcap_{\mathbb{N}} V_i^n M_+(S)$$

**Proposition 2.4** (Słocinski [24, Prop.1]) *Soit  $T$  une paire de contraction qui double-commute sur  $H$ . On considère sa d.i.m.r. sur  $K_+$  avec la décomposition de Wold comme au dessus.*

*Alors on a :*

1.  $R_1(H) = K_{UU} \oplus K_{US}$  .

2.  $R_2(H) = K_{UU} \oplus K_{SU}$ .

3. En gnral on a les inclusions  $R_1(S) \subset K_{UU} \oplus K_{US}$  et  $R_2(S) \subset K_{UU} \oplus K_{SU}$ .

On a aussi le thorme suivant qui dtermine la structure de la dilatation isomtrique minimale d'une paire de contractions  $C_{\bullet 0}$ . Pour une contraction  $T$  sur  $H$  on notera  $C_{\bullet 0}(T) = \{x \in H, \|T^*x\| \rightarrow 0\}$ .

**Théorème 2.4** (Stocinski [24, Th.1]) *Supposons que  $T = (T_1, T_2)$  est une paire de contractions qui double-commute et que  $V = (V_1, V_2)$  est sa d.i.m.r.*

*Si  $S \subset C_{\bullet 0}(T_i)$  alors  $R_i(S) = 0$*

En particulier si  $T_1$  et  $T_2$  sont simultanment  $C_{\bullet 0}$  alors la d.i.m.r. se rduit une paire de shifts.

De nombreux autres rsultats de structure peuvent tre trouvs dans les articles de Gaspar et Suciu [12] [13].

### 3 Calcul fonctionnel et paires absolument continues.

#### 3.1 Le schma initial de Briam, Davie et Øksendal.

En 1972 dans leur article "A Functional Calculus For Commuting Contractions", Briem, Davie et Øksendal mettent en place un calcul fonctionnel  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  pour les paires de contractions compltement non unitaires. Nous donnons ici le plan gnral de leur dmarche qui conduit une dfinition de l'absolue continuit pour ces paires.

On considre donc une paire de contractions  $T = (T_1, T_2)$  qui commute sur  $H$ . Le point de dpart est un rsultat d'Ando bien connu qui assure l'existence d'une (ou plusieurs) dilatations unitaires minimales  $U = (U_1, U_2)$  sur un espace  $K \supset H$ .

##### 3.1.1 Outils fonctionnels.

On note  $A = A(\mathcal{D}^\epsilon)$  l'algbre des fonctions continues sur  $\overline{\mathcal{D}^2}$  qui sont analytiques sur  $\mathcal{D}^\epsilon$ . On munit  $\mathcal{T}^\epsilon$  de sa tribu des borliens et on note  $\mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon)$  l'ensemble des mesures borliennes complexes sur  $\mathcal{T}^\epsilon$ . Parmi celles-ci on notera  $m_2$  et  $m$  la mesure de Lebesgue normalise sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  et  $\mathcal{T}$  respectivement.

On rappelle ici quelques notions utiles par la suite :

(1) Une mesure  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon)$  est dans  $A^\perp$  si  $\int_{\mathcal{T}^\epsilon} f d\mu = 0 \quad \forall f \in A$ .

(2) Pour  $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}^\epsilon$ , on dfinit  $\mathcal{M}_{(z_1, z_2)} = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon) ; \int_{\mathcal{T}^\epsilon} \{\uparrow\mu = \{\dagger_\infty, \dagger_\epsilon\}\}$ .

(3) Un sous-ensemble  $\beta$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon)$  est une bande si :

(i) Si  $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon)$  et si il existe  $\mu \in \beta$  telle que  $\nu$  est absolument continue par rapport

$|\mu|$ , alors  $\nu \in \beta$ .

(ii) Si  $\{\mu_n\} \subset \beta$  et  $\sum \|\mu_n\| < \infty$  alors  $\sum \mu_n \in \beta$ .

(4) Si  $\beta \subset \mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon)$  alors on note  $\beta^s = \{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon), \nu \perp \gamma \ \forall \gamma \in \beta\}$ .

Si  $\beta$  est une bande de mesures alors  $\beta^s$  est aussi une bande. De plus on a  $(\beta^s)^s = \beta$  et toute mesure  $\mu$  a une unique dcomposition  $\mu = \sigma + \tau$  o  $\sigma \in \beta$  et  $\tau \in \beta^s$ .

Dans la suite on conside trois bandes de mesures dans  $\mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon)$  :

(a)  $\beta_1 = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon), \mu$  supporte par  $\mathcal{E} \times \mathcal{T}, \mathcal{E}$  tant un borlien de  $\mathcal{T}$  tel que  $\uparrow(\mathcal{E}) = \uparrow\}$ .

(b)  $\beta_2 = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{T}^\epsilon), \mu$  supporte par  $\mathcal{T} \times \mathcal{E}, \mathcal{E}$  tant un borlien de  $\mathcal{T}$  tel que  $\uparrow(\mathcal{E}) = \uparrow\}$ .

(c)  $\beta_*$  la bande engendre par  $A^\perp \cap \beta_1^s \cap \beta_2^s$ .

Un rsultat de Cole montre que  $\beta_*$  coincide avec la bande  $\beta_0$  engendre par  $\mathcal{M}_{(0,0)}$ .

Deux rsultats sont alors essentiels pour construire le calcul :

**Théorème 3.1** ([7]) Soit  $\mu \in A^\perp \cap \beta_1^s \cap \beta_2^s$ . On conside  $\{f_n\}_n \subset A$  telle que  $\sup_n \|f_n\| < +\infty$  et  $f_n(z_1, z_2) \rightarrow 0 \ \forall (z_1, z_2) \in \mathcal{D}^\epsilon$ .

Alors  $f_n \rightarrow 0$  pour la topologie  $f^*$  de  $L^\infty(|\mu|)$ .

Nous rappelons ici la dmonstration de ce rsultat qui reste une cl dans cette dmarche.

Preuve : Pour la norme uniforme,  $\bigvee \left\{ \frac{g(z_1, z_2)}{(z_1 - a)(z_2 - b)}, g \in A, (a, b) \in \mathcal{D}^\epsilon \right\}$  est dense dans l'ensemble  $\mathcal{C}(\mathcal{T}^\epsilon)$  des fonctions continues sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  et donc dense dans  $L^1(|\mu|)$ .

Il suffit donc, sous les hypothses du thorme, de montrer que

$$\int_{\mathcal{T}^\epsilon} f_n(z_1, z_2) \frac{g(z_1, z_2)}{(z_1 - a)(z_2 - b)} d\mu(z_1, z_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Quitte remplacer  $f_n$  par  $f_n g$ , on peut supposer que  $g = 1$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}^\epsilon} \frac{f_n(z_1, z_2)}{(z_1 - a)(z_2 - b)} d\mu(z_1, z_2) &= \int_{\mathcal{T}^\epsilon} \frac{f_n(z_1, b)}{(z_1 - a)(z_2 - b)} d\mu(z_1, z_2) + \\ &\quad \int_{\mathcal{T}^\epsilon} \frac{f_n(a, z_2)}{(z_1 - a)(z_2 - b)} d\mu(z_1, z_2) \\ &= - \int_{\mathcal{T}^\epsilon} \frac{f_n(a, b)}{(z_1 - a)(z_2 - b)} d\mu(z_1, z_2) + \\ &\quad \int_{\mathcal{T}^\epsilon} h_n(z_1, z_2) d\mu(z_1, z_2) \\ &= T_1^n + T_2^n + T_3^n + T_4^n \end{aligned}$$

o on a pos

$$h_n = \frac{f_n(z_1, z_2) - f_n(z_1, b) - f_n(a, z_2) + f_n(a, b)}{(z_1 - a)(z_2 - b)}.$$

On remarque que  $h_n \in A$  et donc  $T_4^n = 0$ . D'autre part  $f_n(a, b) \rightarrow 0$  par hypothèse et donc  $T_3^n \rightarrow 0$ .

Pour  $T_1^n$ , on définit une mesure  $\nu$  sur  $\mathcal{T}$  par la relation

$$\int_{\mathcal{T}} q(z_1) d\nu(z_1) = \int_{\mathcal{T}^\epsilon} \frac{q(z_1)}{z_2 - b} d\mu(z_1, z_2) \text{ pour } q \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$$

En fait  $\nu$  ainsi définie est absolument continue par rapport  $m$  : en effet si  $E \subset \mathcal{T}$  est un borlien tel que  $m(E) = 0$ , on a alors  $|\mu|(E \times \mathcal{T}) = 0$  car  $\mu \in \beta^s$  et donc  $|\nu(E)| = 0$ .

Maintenant on pose  $F_n(z_1) = f_n(z_1, b)$  ; on a  $F_n \in A(\mathcal{D})$ ,  $\sup_n \|F_n\|_\infty < +\infty$  et  $F_n \rightarrow 0$  simplement sur  $\mathcal{D}$ . Ceci implique que  $F_n \rightarrow 0$  pour la topologie  $f^*$  de  $L^\infty(m)$ . On en déduit alors que  $\int_{\mathcal{T}} \frac{F_n(z_1)}{z_1 - a} d\nu(z_1) \rightarrow 0$  i.e.  $T_1^n \rightarrow 0$ .

On procède de la même façon pour montrer que  $T_2^n \rightarrow 0$ .  $\square$

Le second résultat essentiel est l'identification de  $H^\infty(\mu)$  pour  $\mu \in \beta_*$ . On notera  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur  $\mathcal{D}^\epsilon$ .

**Proposition 3.1** *soit  $\mu \in \beta_*$  ; l'application suivante*

$$\begin{aligned} H^\infty(\mu + m_2) &\longrightarrow H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon) \\ f &\longrightarrow P(f) \text{ (transforme de Poisson)}^2 \end{aligned}$$

*est un isomorphisme isométrique.*

Dans la suite on identifiera donc  $H^\infty(\mu + m_2)$  et  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  ou sa version au bord  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$ . Un résultat de Bercovici (cf. chap...) permet d'identifier ponctuellement certains éléments de  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  et de  $H^\infty(\mu + m_2)$ .

### 3.1.2 Mesure spectrale et structure de la d.u.m.

Si  $U = (U_1, U_2) \in \mathcal{L}(K)$  est une dilatation unitaire minimale de la paire de contractions c.n.u.  $T = (T_1, T_2)$ , on peut définir des mesures spectrales scalaires élémentaires  $\sigma_{k,l}$  pour  $k, l \in K$  par :

$$(U_1^m U_2^n k | l) = \int_{\mathcal{T}^\epsilon} z_1^m z_2^n d\sigma_{k,l}$$

**Lemme 3.1** ([7]) *Soit  $T$  une paire de contractions c.n.u. et  $U$  une d.u.m. sur  $K \supset H$ . Il existe  $\mu \in \beta_*$  telle que  $\forall k, l \in K$ , la mesure spectrale élémentaire  $\sigma_{k,l}$  est absolument continue par rapport  $\mu$*

Ceci permet alors de définir le calcul fonctionnel. Pour  $f \in H^\infty(\mu + m_2) = H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  on pose

$$(f(T_1, T_2)x | y) = \int_{\mathcal{T}^\epsilon} f d\sigma_{x,y}, \quad x, y \in H$$

De plus le théorème 3.1 garantit la continuité  $f^*$  de cette représentation.

Énonçons le résultat :

**Théorème 3.2** ([7]) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions c.n.u. Il existe un homomorphisme d'algèbres  $\Phi : H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que :

1.  $p(T_1, T_2)$  a sa définition habituelle si  $p$  est un polynôme.
2.  $\|f(T_1, T_2)\| \leq \|f\|$ ,  $f \in H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$ .
3. Si  $\sup \|f_n\| < +\infty$  et  $f_n \longrightarrow f$  simplement sur  $\mathcal{D}^\epsilon$  alors  $f_n(T) \longrightarrow f(T)$  pour la topologie faible des opérateurs.
4.  $(f(T))^* = \tilde{f}(T_1^*, T_2^*)$  o  $\tilde{f}(z_1, z_2) = \overline{f(\bar{z}_1, \bar{z}_2)}$ .

### 3.2 Paires absolument continues

la première extension du cadre précédent est apparue dès 1974 avec l'article " Les A-mesures sur le tore de deux dimensions et le calcul symbolique de deux contractions permutables" [14] de B.D. Khanh.

Ces résultats seront tendus aux cas des N-uples et des ensembles spectraux produits de compacts par M. Kosiek [17] [16][15][18].

Afin de nous placer dans le contexte favorable le plus large possible, nous adopterons la définition suivante :

**Définition 3.1** Soit  $T$  une paire de contractions qui commute sur  $H$ . on dit que  $T$  est absolument continue si il existe un homomorphisme d'algèbres  $\Phi : H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tel que :

1.  $\Phi$  prolonge le calcul polynomial.
2.  $\Phi$  est contractante.
3.  $\Phi$  est  $f^*$ -continue.

Soient  $U$  une dilatation unitaire minimale de  $T$  et  $\mu$  une mesure spectrale scalaire associée. Si  $\mu \in \beta_*$  alors  $T$  est absolument continue au sens précédent. Octavio montre dans [21] que l'on peut construire le calcul en suivant une démarche analogue celle de Briem, Davie et Øksendal.

Nous allons maintenant envisager le problème réciproque : peut-on caractériser les mesures spectrales scalaires conduisant à un calcul  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$ ?

Bien sûr, via l'existence d'une dilatation unitaire (Ando) et l'ingalité de Von Neumann, une paire de contractions possède un calcul fonctionnel  $\phi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  contractant.

On peut alors décomposer  $\phi$  de la façon suivante :



**Théorème 3.3** (Kosiek [17, Th.1,Th.2]) Soit  $\phi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  un homomorphisme d'algèbres contractant.

Alors

1. il existe une décomposition de  $\phi$  et de  $H$  unique

$$\phi = \phi_0 \oplus \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \phi_3$$

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$$

o  $H_i$  réduit  $\phi(A)$  et  $\phi(A)|_{H_i} = \phi_i(A)$ .

2. Pour  $i = 0, 1, 2$ ,  $\phi_i$  possède un système de mesures spectrales scalaires élémentaires dans la bande  $\beta_i$  (i.e. il existe une mesure spectrale  $E_i$  telle que  $\langle E_i(\cdot)f, g \rangle \in \beta_i$ ).
3.  $\phi_3$  s'étend de façon unique en une représentation  $\tilde{\phi}_3 : \mathcal{C}(\mathcal{T}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , elle possède une unique mesure spectrale et toutes les mesures spectrales scalaires élémentaires sont dans  $(A^\perp)^s$ .

On peut alors faire le lien avec les mesures spectrales de  $\phi(\alpha_1)$  et  $\phi(\alpha_2)$  o  $\alpha_i(z_1, z_2) = z_i$   $i = 1, 2$ .

Pour cel on injecte isométriquement deux copies de  $A(\mathcal{D})$  dans  $A$  : on note  $\theta_i : A(\mathcal{D}_i) \longrightarrow A$   $i = \infty, \epsilon$ . Dans ce cas  $\theta_i(A(\mathcal{D}_i))$  est une sous-algèbre fermée de  $A$ .

Grâce ces opérateurs de restriction on peut considérer les deux représentations suivantes :

$$\phi_1 = \phi \circ \theta_1 = \phi_0 \circ \theta_1 \oplus \phi_1 \circ \theta_1 \oplus \phi_2 \circ \theta_1 \oplus \phi_3 \circ \theta_1$$

$$\phi_2 = \phi \circ \theta_2 = \phi_0 \circ \theta_2 \oplus \phi_1 \circ \theta_2 \oplus \phi_2 \circ \theta_2 \oplus \phi_3 \circ \theta_2$$

Maintenant si  $\mu$  est une mesure complexe sur  $\mathcal{T}^\epsilon$ , on peut définir de façon naturelle deux projections  $\pi_1\mu$  et  $\pi_2\mu$  qui sont des mesures sur  $\mathcal{T}$  ; on a  $\pi_1\mu(\sigma) = \mu(\sigma \times \mathcal{T})$  et  $\pi_2\mu(\sigma) = \mu(\mathcal{T} \times \sigma)$ .

Par la suite on notera  $\nabla_i$  la bande de mesures engendrée par les mesures représentant les points de  $\mathcal{D}_i$  ( $i = 1, 2$ ).

**Lemme 3.2** (Kosiek [17, L.1,2,3])

1. Soit  $\phi$  une représentation de  $A$  et  $\phi_1, \phi_2$  ses restrictions à  $A(\mathcal{D}_\infty)$  et  $A(\mathcal{D}_\epsilon)$  respectivement.  
Si  $\mu$  est une mesure spectrale élémentaire associée à  $(x, y) \in H^2$  alors pour  $i = 1, 2$   $\pi_i(\mu)$  est une mesure spectrale élémentaire pour  $\phi_i$  associée à  $(x, y)$ .
2. Si  $\mu \in \beta_0$  alors  $\pi_i\mu \in \nabla_i$   $i = 1, 2$ .

3. Si  $\mu \in \beta_1$  alors  $\pi_1(\mu) \in \nabla_1^s$  et  $\pi_2\mu \in \nabla_2$ .

4. Si  $\mu \in \beta_2$  alors  $\pi_1(\mu) \in \nabla_1$  et  $\pi_2\mu \in \nabla_2^s$ .

On a alors le thorme suivant de Wilken (cf gamelin [11] p47) qui montre que si une representation de  $A(\mathcal{D})$  a un systme de mesures spectrales lmentaires singulires la bande engendre par les mesures representant les points de  $\mathcal{D}$  alors cette representation est singulire : elle a une mesure spectrale dans  $(A(\mathcal{D})^\perp)^J$ .

**Théorème 3.4** (Wilken) *Si  $\nabla$  est la bande engendre par les mesures representant les points de  $\mathcal{D}$  alors on a :*

$$A(\mathcal{D})^\perp \cap \nabla^J = (\iota)$$

Finalemnt on peut donner la description suivante :

**Théorème 3.5** (Kosiek <sup>3</sup> [17, Th.2]) *Soit  $\phi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$  une representation et  $\phi_1, \phi_2$  ses restrictions  $A(\mathcal{D}_\infty)$  et  $A(\mathcal{D}_\varepsilon)$ . On utilise les notation introduites au dessus. On a alors :*

1. Pour  $i = 1, 2$ ,  $\phi_0 \circ \theta_i$  est une representation absolument continue (on a un systme de mesures spectrales lmentaires dans  $A(\mathcal{D})^\perp$ ).
2.  $\phi_1 \circ \theta_1$  est singulire et  $\phi_1 \circ \theta_2$  est absolument continue.
3.  $\phi_2 \circ \theta_1$  est absolument continue et  $\phi_2 \circ \theta_2$  est singulire.

Traduit en terme d'opérateurs avec  $T_1 = \phi(\alpha_1)$  et  $T_2 = \phi(\alpha_2)$ , on obtient donc une dcomposition de la paire de contractions  $T = (T_1, T_2)$  en quatre morceaux rduisants.

**Théorème 3.6** (Kosiek [18]) *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions sur  $H$ . On a alors une dcomposition de  $H$  en sous espaces rduisant simultanment  $T_1$  et  $T_2$  :  $H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ .*

*De plus  $T_{i|H_i}$  est unitaire avec une mesure spectrale scalaire et  $T_{i|H_3}$  est unitaire.*

On en dduit que toute paire de contractions  $T = (T_1, T_2)$  n'ayant aucun sous-espace rduisant  $K$ , tel que  $(T_{1|K}, T_{2|K})$  soit une paire d'opérateurs unitaires ayant une mesure spectrale scalaire hors de  $\beta_*$ , est absolument continue au sens de notre dfinition. On dira que  $T$  est purement absolument continue.

En particulier Kosiek, Octavio et Ptak [19] ont signal un cas d'extention simple du contexte de Briem, Davie et Øksendal.

---

<sup>3</sup>Version modifie par kosiek ignorant la partie fausse du rsultat annonc dans l'article que nous citons

**Proposition 3.2** ([19]) *Si  $T_1$  est c.n.u. et  $T_2$  est absolument continue, alors la paire  $(T_1, T_2)$  est purement absolument continue.*

D'autre part, pour une contraction il y a équivalence entre l'existence d'un calcul  $H^\infty(\mathcal{D})$  et le fait que la représentation de  $A(\mathcal{D}^\epsilon)$  ait une mesure spectrale dans  $A(\mathcal{D})^\perp$ .

Dans le cas de deux contractions les deux lemmes suivants qui sont une conséquence du théorème du minimax permettent de donner une description claire de la situation. (cf Gamelin [11])

**Lemme 3.3** (Forelli) *Soit  $A$  une algèbre uniforme sur un compact  $X$ . Pour  $\phi \in \text{Max} A$  (espace maximal idéal), on note  $M_\phi$  l'ensemble des mesures représentatives de  $\phi$ .*

*Soit  $E \subset X$  un  $F_\sigma$  tel que  $M_\phi(E) = 0$ .*

*Alors il existe une suite  $(f_n)_n \in A$  telle que  $\|f_n\| \leq 1$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0 \ \forall x \in E$  et  $f_n \rightarrow 1$   $M_\phi$ -pp (i.e. pour toute mesure de  $M_\phi$ ).*

**Lemme 3.4** ([11]) *Même contexte qu'au lemme précédent.*

*Soit  $K$  un ensemble  $f^*$ -compact convexe de mesure positive dans  $X$ . Si  $\mu \in (\mathcal{M}(X))^s$  alors il existe  $E \subset X$ , un  $F_\sigma$  tel que :*

1.  $|\mu|(X \setminus E) = 0$
2.  $K(E) = 0$

Ces résultats peuvent alors s'appliquer à l'étude des bandes qui nous intéressent :

**Lemme 3.5** (Khanh [14, L.8]) *Soit  $\mu$  une  $A$ -mesure positive. Si  $\mu \in \beta_0^s$  alors  $\mu = 0$ .*

Preuve : D'après ce qui précède, il existe une suite de fonctions  $(f_n)_n \in A$  telle que  $\|f_n\| \leq 1$ ,  $f_n \rightarrow 0$   $\mu$ -pp, et  $f_n \rightarrow 1$  presque partout par rapport à toute mesure de  $\beta_0$ . On en déduit que  $\int_{\mathcal{T} \in E} f_n d\mu \rightarrow 0$ , et  $f_n$  tend ponctuellement vers 1 dans  $\mathcal{D}^\epsilon$ . La mesure  $\mu$  étant une  $A$ -mesure, on a donc  $\int_{\mathcal{T} \in E} f_n d\mu \rightarrow \int_{\mathcal{T} \in E} 1 d\mu$ . D'où  $\mu = 0$   $\square$

On peut alors faire le lien entre l'absolue continuité telle que nous l'avons définie et la nature des mesures spectrales.

Commençons par rappeler un théorème que l'on trouve par exemple dans [11] :

**Théorème 3.7** (citegamelin) *Soit  $A$  une algèbre uniforme et  $\phi \in M_A$ . Soit  $\mu$  une mesure complexe représentant  $\phi$ . Alors il existe une mesure  $\nu$  positive représentant  $\phi$  et absolument continue par rapport à  $\mu$ .*

En particulier si  $\mu$  est dans une bande  $\beta$  alors la mesure positive  $\nu$  est aussi dans  $\beta$ .

**Proposition 3.3** *Soit  $T$  une paire de contractions et  $\Phi : A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  un calcul sur  $A$  associ.*

*Alors  $T$  est absolument continue si et seulement si  $\Phi$  possde une mesure spectrale scalaire positive  $\mu$  dans la bande  $\beta_0$ .*

Preuve : On applique ce qui prde aux mesures spectrales scalaires : pour  $x, y \in H$  on note  $\phi = x \square y$  l'ement de  $M_A$  vrifiant  $\langle f | x \square y \rangle = \int_{\mathcal{T} \in \text{sp}(A)} f d\mu_{x,y} \circ \mu_{x,y}$  est la mesure spectrale scalaire lmentaire associe  $x \otimes y$ . De plus  $\mu_{x,y}$  peut tre suppose positive grce au thorme prcdent. Si  $\Phi$  est absolument continue alors chaque mesure lmentaire est une  $A$ -mesure (positive) et se trouve donc dans la bande  $\beta_0$  d'apr le lemme de Khanh.  $\square$

### 3.3 Continuit absolue et dilatations minimales.

On montre ici que la dfinition de paire absolument continue donne au dessus est compatible avec certaines dilatations minimales.

**Proposition 3.4** *Soit  $T$  une paire de contractions absolument continues. Alors  $T$  possde une dilatation isométrique minimale et une extension co-isométrique minimale absolument continue.*

*De plus si  $T$  double commute sa dilatation isométrique et son extension co-isométrique rgulire minimale sont absolument continues.*

Cette partie est mettre en parallle avec le chapitre 2.2 car nous utilisons une dcomposition de la dmarche qu'on y utilise pour construire la dilatation isométrique rgulire minimale. D'autre part on passe facilement de l'extension co-isométrique minimale la dilatation isométrique minimale en travaillant sur  $T$  ou  $T^*$ .

Pour un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H)$ , on note  $D_A = (1 - A^*A)^{1/2}$  l'opérateur de dfaut et  $\mathcal{D}_A = \overline{D_A H}$ . Le lemme suivant permet de mettre en place une construction tape par tape, et il est essentiellement contenu dans [5, lemme 3.2] :

**Lemme 3.6** *Soient  $T = (T_1, T_2)$  une paire absolument continue de contractions qui commute sur  $H$ .*

*On note  $T'_1$  l'isométrie partielle qui dilate  $T_1$  :  $T'_1 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ D_{T_1} & 0 \end{pmatrix}$  agissant sur  $H \oplus \mathcal{D}_{T_1}$  et on note  $\mathcal{R}(T'_1) = \{A \text{ contraction, extension de } T_2, A \in \mathcal{L}(H \oplus \mathcal{D}_{T_1}) \mid AT'_1 = T'_1 A\}$ . On a alors :*

1.  $\mathcal{R}(T'_1) \neq \emptyset$
2. Pour  $T'_2 \in \mathcal{R}(T'_1)$  on a :

*[\*]  $T'_2$  est absolument continue.*

*La paire  $(T'_1, T'_2)$  est absolument continue.*

Si  $T_2$  est une isométrie alors  $T_2'$  est aussi une isométrie.

Preuve : La continuité absolue de  $T$  se traduit par l'existence d'une représentation  $\Phi : H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$   $f^*$ -continue.

Le fait que  $\mathcal{R}(T_1') \neq \emptyset$  provient d'un thème de relèvement du commutant (cf [10]).

On montre tout d'abord que  $T_2'$  est absolument continue. En fait on a  $H \oplus \mathcal{D}_{T_1} = H \vee M$  o  $M = \{T_1x \oplus D_{T_1}x, x \in H\}$ . L'espace  $H$  est invariant pour  $T_2'^*$  et  $T_2'^*|_H = T_2^*$  est absolument continu.

De plus  $T_2'|_M$  est unitairement équivalent à  $T_2$  via l'opérateur unitaire  $U : H \rightarrow M$  défini par  $U(x) = T_1x \oplus D_{T_1}x$ .

Pour prouver que la paire  $(T_1', T_2')$  est absolument continue, on construit son calcul fonctionnel : toute fonction de  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  peut s'écrire de façon unique  $u(z_1, z_2) = v(z_2) + z_1w(z_1, z_2)$  o  $v \in H^\infty(\mathcal{D})$  et  $w \in H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$ .

On définit alors

$$\Phi'(u) = v(T_2') + \begin{pmatrix} T_1\Phi(w) & 0 \\ D_{T_1}\Phi(w) & 0 \end{pmatrix}$$

o  $\Phi$  est le calcul associé à la paire absolument continue  $(T_1, T_2)$  et  $v(T_2')$  est défini par le calcul de Sz.-Nagy-Foias pour la contraction absolument continue  $T_2'$ .

Biensur  $\Phi'(u)$  est un opérateur borné sur  $H \oplus \mathcal{D}_{T_1}$ .

Le fait que  $\Phi'$  est  $f^*$ -continu est évident par construction car  $u \rightarrow v$  ou  $u \rightarrow w$  dans la décomposition précédente sont des applications  $f^*$ -continues.

Pour montrer que  $\Phi'$  est une représentation qui prolonge le calcul polynomial il suffit de montrer que  $\Phi'(u) = T_1'^n T_2'^m$  avec  $u(z_1, z_2) = z_1^n z_2^m$ . Si  $n = 0$  c'est immédiat par construction. Si  $n > 0$  alors  $u(z_1, z_2) = z_1w(z_1, z_2)$  et on obtient facilement :

$$T_1'^n T_2'^m = \begin{pmatrix} T_1^n T_2^m & 0 \\ D_{T_1} T_1^{n-1} T_2^m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1\Phi(w) & 0 \\ D_{T_1}\Phi(w) & 0 \end{pmatrix} = \Phi'(u)$$

Enfin par l'inégalité de von Neumann  $\Phi'$  est contractante sur les polynômes et cette propriété s'étend grâce à la continuité  $f^*$ .  $\square$

On est maintenant en mesure de prouver la proposition 3.4.

Preuve : On part de la paire  $T^* = (T_1^*, T_2^*)$ . Soit  $B^* = (B_1^*, \tilde{T}_2^*)$  o  $B_1^*$  est la dilatation isométrique minimale de  $T_1^*$  et  $\tilde{T}_2^*$  est une extension de  $T_2^*$  qui commute avec  $B_1^*$  sur l'espace  $K_1^+$ .

On note  $P_n$  la projection de  $K_1^+$  sur le sous-espace  $K_{1,n}^+ = \underbrace{\mathcal{D}_{T_1^*} \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_{T_1^*}}_{n \text{ copies}}$ . Soit  $i_n$

l'injection canonique de  $K_{1,n}^+$  dans  $K_1^+$ . Dans ce cas  $B_1^*$  est la limite forte de la suite d'opérateurs

$$i_n P_n B_1^* i_n P_n = (\Theta_{1,n}^*, \Theta_{2,n}^*)$$

Une utilisation rpte  $n$  fois du lemme precedent montre que la paire  $(\Theta_{1,n}^*, \Theta_{2,n}^*)$  est absolument continue.

Finalement on dfinit une representation  $\tilde{\Phi} : H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{L}(K_\infty^+)$  par :

$$\tilde{\Phi}(f)x = \lim_{n, n \geq N} f(\Theta_{1,n}^*, \Theta_{2,n}^*)x \in K_{1,N}^+ \quad f \in H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$$

A ce stade  $\tilde{\Phi}$  est bien dfinie car  $\bigvee_{n \geq 1} K_{1,n}^+ = K_1^+$  et est videmment  $f^*$ -continue.

On en conclut que  $B_1^*$  est une paire absolument continue.

On considre alors  $B = (B_1, \tilde{T}_2)$  et on ritre le procd que nous venons de dcire. On obtient alors une paire  $V = (V_1, \tilde{\tilde{T}}_2)$  o  $V_1$  est la dilatation isométrique minimale de la co-isométrie  $B_1$ . En fait  $V_1$  est la dilatation unitaire minimale de  $T_1$ , et  $\tilde{\tilde{T}}_2$  est une extension de  $\tilde{T}_2$  qui commute avec  $V_1$ . La paire  $V$  est donc absolument continue.

Le mme procd appliqué au couple  $(\tilde{\tilde{T}}_2, V_1)$  conduit la dilatation unitaire naturelle (cf chap...) de  $(T_2, T_1)$  et montre qu'elle est absolument continue.

De plus si  $T$  double-commute, ce procd donne la dilatation unitaire minimale rgulière de  $T$ . On obtient les dilatations isométriques minimales par restriction de cette dilatation unitaire naturelle, ce qui conserve la continuité absolue.  $\square$

### 3.4 La classe $\mathbf{A}^{(2)}$

**Définition 3.2** La classe  $\mathbf{A}^{(2)}$  est constituée des paires absolument continues de contractions qui possèdent un calcul  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$   $f^*$ -continu isométrique.

Dans le cas o  $T \in \mathbf{A}^{(2)}$ , l'application adjointe  $\phi_T$  devient une isométrie et permet donc d'identifier le dual  $\mathcal{Q}_\infty$  de  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  et  $\mathcal{Q}_T$ , celui de  $T$ .

$$\Phi_T : H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{A}_T$$

$$\phi_T : \mathcal{Q}_T \longrightarrow \mathcal{Q}_\infty$$

Pour  $x, y \in H$ , on notera  $x \otimes y$  l'opérateur de rang au plus 1 agissant de la façon suivante :  $x \otimes y u = (u|x)y$ .

L'image de  $x \otimes y$  dans  $\mathcal{Q}_T = \mathcal{C}^1(T)^\perp \mathcal{A}_T$  sera notée  $[x \overset{T}{\otimes} y]$ .

pour travailler via l'identification  $\phi_T$  lorsqu'on a un calcul isométrique, on notera de plus  $x \square T y = \phi_T([x \overset{T}{\otimes} y])$ . De plus on omettra de noter  $T$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Pour tout couple d'opérateurs unitaires  $U = (U_1, U_2)$  sur  $K$  on dispose d'une mesure spectrale scalaire  $\mu$  et chacune des mesures élémentaires  $\mu_{x,y}$  s'écrit  $d\mu_{x,y} = x \overset{U}{\cdot} y d\mu$  o  $x \overset{U}{\cdot} y$  est

la derive de Radon-Nikodym de  $\mu_{x,y}$  par rapport  $\mu$ . L'application  $(x, y) \longrightarrow x \cdot^U y$  est sesquilineaire, valeurs dans  $L^1(\mu)$ , et  $\|x \cdot^U y\|_1 \leq \|x\| \|y\|$ . De plus si il existe une dcomposition de l'espace  $K$  en sous-espace rduisants pour  $U$ ,  $K = K_1 \oplus K_2$ , et  $U = U_1 \oplus U_2$ , on a alors  $x \cdot^U y = P_{K_1} x \cdot^{U_1} P_{K_1} y + P_{K_2} x \cdot^{U_2} P_{K_2} y$ . Ceci se dmontre de faon lmentaire grce la dfiniion de  $x \cdot^U y$ .

**Proposition 3.5** *Soit  $U \in \mathbf{A}^{(2)}$ , une paire d'oprteurs unitaires sur  $H$ . Pour tous vecteurs  $x, y \in H$ , on a  $[x \cdot^U y]_{L^1(\mathcal{T}^\epsilon)/\mathcal{H}_r^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)} = x \sqcup y$*

these.tex

## 4 Paire de contractions $C_{0,\cdot}$ .

Si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux  $C_{0,\cdot}$ , on sait que la paire  $T = (T_1, T_2)$  est absolument continue. Il existe  $\Phi : H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{A}_T$   $f^*$ -continue prolongeant le calcul polynomial. Une question naturelle apparait alors :  $\Phi$  est-elle  $C_{0,\cdot}$  ou, en d'autres termes,  $\Phi$  est-elle continue si on met sur  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  la topologie  $f^*$  et sur  $\mathcal{A}_T$  la topologie de la convergence forte des oprteurs. Apostol a apport une rponse positive cette question ds 1980. Cependant ce rsultat semble avoir t oubli dans certains articles rcents. Signalons ce sujet une erreur dans une dmonstration [20, L.5.1 p. 411]. Il nous semble donc intressant de rappeler ce rsultat dans le cadre des paires d'oprteurs agissant sur un espace de Hilbert.

D'autre part dans certains cas particuliers nous donnerons des preuves simplifies de cette propriit du calcul fonctionnel.

### 4.1 Rsultats gnraux

Ce qui suit tend clarifier quelques notions autour du calcul fonctionnel d'une paire d'oprteurs sur un espace de Hilbert.

Les rsultats que nous exposons ici proviennent de l'article d'Apostol "Functional Calculus and Invariant Subspaces", et les preuves sont modifies pour prendre en compte que nous travaillons sur un espace de Hilbert.

Soit  $H$  un espace de Hilbert, et  $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{L}(H)$  une paire d'oprteurs qui commute. Pour  $m = 1, 2$ , on note  $H_m^\infty(\mathcal{D}^\uparrow)$  la sous-algre de  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  constitue des polynmes en la  $m$ -ime variable  $w_m \in \mathcal{D}$ . Vu comme un polynme en  $w_n$ , tout lment de  $H_m^\infty(\mathcal{D}^\uparrow)$  a ses coefficient dans  $H^\infty(\mathcal{D})$  via une identification immddiate.

Rappelons qu'une paire d'oprteurs est polynmialement borne si elle est commutative et  $c_T := \sup\{\|p(T)\|, p \text{ polynme } \|p\| \leq 1\} < +\infty$ . Si  $T$  est polynmialement borne (on crira  $T \in \mathcal{PB}$ ) alors on a aussi  $T^* = (T_1^*, T_2^*) \in \mathcal{PB}$ .

Pour tout  $h \in H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  et tout rel  $0 \leq r < 1$ , on note  $h_r$  l'lment de  $A(\mathcal{D}^\epsilon)$  dfini par

$h_r(w) = h(rw)$ . Si  $T \in \mathcal{PB}$ , alors  $T$  possde un calcul fonctionnel  $A(\mathcal{D}^\epsilon)$  et on pourra considrer  $h_r(T) \in \mathcal{L}(H)$ .

On dira que  $T$  est fortement- $H^\infty$ -borne (not  $T \in \mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$ ) si pour tout  $h \in H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$   $h_r(T)$  admet une limite forte lorsque  $r \rightarrow 1$ . On notera dans ce cas  $s - \lim_{r \rightarrow 1} h_r(T) = h(T)$ . L'application  $\Phi : h \rightarrow h(T)$  est un morphisme f\*-continu valeurs dans  $\mathcal{L}(H)$ .

Rappelons que pour un oprateur  $T \in \mathcal{L}(H)$  est  $C_0$ . si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n x\| = 0$  pour tout  $x \in H$ . Dans ce cas on dfinit aussi de faon similaire un oprateur  $\mathcal{PB}$  ou  $\mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$ .

On dfinit alors les oprateurs  $\alpha_{k,n}, \beta_{k,n}, \gamma_{k,n} \in \mathcal{L}(H^\infty(D^2)), 1 \leq k \leq 2, n \in \mathbb{N}^*$  comme suit : si  $h \in H^\infty(D^2)$  a un dveloppement en srie de Taylor par rapport sa k-ime variable  $w_k$  de la forme  $h(w) = \sum_{l=0}^{+\infty} h^{(k,l)}(w) w_k^l$  o  $h^{(k,l)} \in H^\infty(D^N)$  ne dpendent pas de  $w_k$  on pose :

$$\begin{aligned} (\alpha_{k,n}h)(\omega) &= \sum_{l=0}^{n^3-1} \frac{n^3-l}{n^3} h^{(k,l)}(\omega) \omega_k^l \\ (\beta_{k,n}h)(\omega) &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{l}{n^3} h^{(k,l)}(\omega) \omega_k^l \\ (\gamma_{k,n}h)(\omega) &= \frac{h(\omega) - (\alpha_{k,n})(\omega) - (\beta_{k,n}h)(\omega)}{\omega_k^n} \end{aligned}$$

En fait  $\alpha_{k,n}h$  esl la moyenne de Cesaro d'ordre  $n^3$  de  $h$  vue en tant que fonction de la variable  $w_k$ .

On commence par un lemme pour estimer la norme de ces lments :

**Lemme 4.1** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, k \leq n$  on a :*

$$\|\alpha_{k,n}\| = 1 \quad \|\beta_{k,n}\| \leq \frac{1}{2n} \quad \|\gamma_{k,n}\| \leq 2 + \frac{1}{2n}$$

Les rsultats suivants suivent l'article d'Apostol et nous donnons les preuves dans le cadre hilbertien.

**Lemme 4.2** *Si  $T_k \in C_0$ . alors  $s - \lim_{n \rightarrow +\infty} g(h - \alpha_{k,n}h)_r(T) = 0$  uniformment par rapport  $0 \leq r < 1$  pour tout polynme  $g$  et tout  $h \in H^\infty(D^2)$  avec  $\|h\|_\infty \leq 1$  et  $\|g\|_\infty \leq 1$ .*

Preuve : Pour  $x \in H$  on a :

$$\|g(T)(h - \alpha_{k,n}h)_r(T)x\| = \|g(T)(\beta_{k,n}h)_r(T)x\| + \|r^n T_k^n g(T)(\gamma_{k,n}h)_r(T)x\| \leq c_T \left\{ \|x\| \frac{1}{2n} + \left(2 + \frac{1}{2n}\right) \|T_k^n x\| \right\} \rightarrow 0 \quad \square$$

**Lemme 4.3** *Si  $T_1$  est  $\mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$ , alors  $s - \lim_{r \rightarrow 1} g_r(T)$  existe pour tout  $g \in H_2^\infty(D^2)$ .*

Preuve : On crit  $g(T) = a_0(T_1) + \dots + a_L(T_1) T_2^L$  and  $g_r(T) = (a_0)_r(T_1) + \dots + (a_L)_r(T_1) r^L T_2^L$ . Puisque  $T_1 \in \mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$  le rsultat devient immdiat.  $\square$



**Lemme 4.4** *Si  $T_1$  est  $\mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$  et  $T_2$  est  $C_0$ , alors  $T$  est  $\mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$ .*

Preuve : On calcule  $\|h_r(T)x - h_{r'}(T)x\| = \lim_n \|(\alpha_{2,n}h)_r(T)x - (\alpha_{2,n}h)_{r'}(T)x\|$  par le lemme 4.2.

Maintenant  $\alpha_{2,n}h$  est dans  $H_2^\infty(D^2)$  et le lemme 4.3 peut tre appliqué, ce qui conduit au rsultat.  $\square$

**Théorème 4.1** *Si  $T_i \in C_0$ , pour tout  $i \leq 2$ , alors  $T$  est  $\mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$ .*

Preuve : Au vu du lemme 4.4 on peut se ramener un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Mais on tombe alors sur un rsultat bien connu. (cf...)  $\square$

Le rsultat qui suit joue un rle fondamental dans le developpement de la thorie des algbres duales, en particulier dans l'utilisation de relations d'annulation dans l'algbre prduale associative.

**Théorème 4.2** *Si  $T_i \in C_0$ , pour tout  $i \leq 2$ , alors  $T$  est  $C_0$ . ( $\Phi_T$  est  $f^*$ -SOT-continue).*

Preuve : Au vu du thorme 4.1,  $T$  est  $\mathcal{SH}^\infty\mathcal{B}$  et on a donc pour tout  $x \in H$  et toute suite  $\{h_j\}_{j \geq 1}$  dans  $H^\infty(D^2)$  telle que  $\|h_j\| \leq 1$  et  $h_j \xrightarrow{f^*} 0$  :

$$h_j(T)x = \lim_{r \rightarrow 1} (h_j)_r(T)x = \lim_{r \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{2,n}h_j)_r(T)x$$

La dernire galit provient du lemme 4.2 et la limite est uniforme par rapport  $r$  et  $j$  (en effet,  $\|h_j\| \leq 1 \ \forall j$ ). Maintenant  $\alpha_{2,n}h_j$  est dans  $H_2^\infty(D^2)$ . Il suffit donc d'avoir le rsultat pour un opérateur. L encore on tombe sur un rsultat classique en une variable.  $\square$

## 4.2 Cas particulier simplifi.

Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions complètement non unitaires qui commutent.

Briem, Davie et Øksendal ([7]) ont montré l'existence d'un calcul fonctionnel  $H^\infty$  pour la paire  $T$ : il existe un homomorphisme  $\Phi : f \longrightarrow \Phi(f) \stackrel{not}{=} f(T_1, T_2)$ , de  $H^\infty$  dans  $\mathcal{L}(H)$  tel que:

1.  $P(T_1, T_2)$  a sa signification habituelle pour  $P$  polynôme.
2.  $\|f(T_1, T_2)\| \leq \|f\|, f \in H^\infty$
3. Si  $\|f_n\| < \infty$  et  $f_n \longrightarrow f$  ponctuellement sur  $\mathcal{D}^\epsilon$  alors  $f_n(T_1, T_2) \longrightarrow f(T_1, T_2)$  pour la topologie faible de  $\mathcal{L}(H)$ .

**Proposition 4.1** Soit  $T = (S, T_0)$  une paire où  $S$  est un shift unilatéral et  $T_0$  une contraction  $C_0$ . Alors  $\Phi_T$  est  $C_0$ .

Preuve : Etant donné une suite  $(f_n)_n$  d'éléments de  $H^\infty$ ,  $x \in H$ , et  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $g_n \in H^\infty$  telle que:

$$f_n(T)^*x = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^n(T_0)^* S^{*k} x + g_n(S, T_0)^* S^{*N} x$$

De plus  $S$  étant un shift, on a  $H = \bigvee_{N \in \mathbb{N}} (\text{Ker} S^{*N})$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \text{Ker} S^{*N}$ , on a:

$$f_n(T)^*x = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^n(T_0)^* S^{*k} x$$

Si  $f_n \rightarrow 0$  alors  $\forall k \leq N-1$   $a_k^n \xrightarrow{w^*} 0$  pour la topologie faible-\* de  $H^\infty(\mathcal{D})$ .

Ceci associé au fait que  $T \in C_0$  implique que  $a_k^n(T)^* \xrightarrow{\text{sol}^t} 0$  et donc que  $\|f_n(T)^*x\| \rightarrow 0$ .

On a donc montré que

$$\text{Ker} S^{*N} \subset X = \{x \in H / \forall f_n \xrightarrow{w^*} 0 f_n(T)^*x \rightarrow 0\}$$

Or  $X$  est un sous espace fermé: en effet, pour  $y \in H$   $x \in X$  on a  $\|f_n(T)^*y\| \leq \sup_n \|f_n\|_\infty \|y-x\| + \|f_n(T)^*x\|$ . Et  $y \in \overline{X} \iff d(y, X) = 0$ , d'où  $\overline{\lim} \|f_n(T)^*y\| \leq C \|y-x\|$  et  $\overline{X} \square$

Ce résultat peut être généralisé en utilisant la structure de la dilatation isométrique minimale de la paire  $T$  lorsque celle-ci existe.

Soient  $T$  une paire de contractions qui double-commute et  $V = (V_1, V_2)$  agissant sur  $K$  sa d.i.m.r. On a la décomposition de Wold:  $K = K_{UU} \oplus K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$  où tous les espaces cités réduisent  $V$  en une paire d'opérateurs unitaires, une paire unitaire-shift, une paire shift-unitaire et une paire shift-shift respectivement.

Le théorème 1 de [24] montre de plus que si  $T$  double-commute et si de plus  $T_1$  et  $T_2$  sont simultanément  $C_0$ , alors  $K$  se réduit  $K_{SS}$  et que la d.i.m. est une paire de shifts  $S = (S_1, S_2)$  qui double-commute. On en déduit que l'on a un calcul fonctionnel  $\Phi_T$ , défini par la compression de  $\Phi_S(f)$  à  $H$ . On est dans le cadre d'application directe des résultats de [7] car on a une mesure spectrale jointe pour  $T$  absolument continue par rapport celle engendrée par la paire  $S$  c'est à dire dans la bande  $\beta_*$ .

**Proposition 4.2** Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions qui double commutent telle que  $T_1$  et  $T_2$  soient  $C_0$ . Alors il existe un calcul  $\Phi_T$  qui est  $C_0$ .

## 5 Paires de shifts qui double-commutent.

Dans cette partie nous montrons comment la double-commutativité garantit une certaine indépendance des deux shifts qui "agissent dans des directions indépendantes" ; ceci se traduit en un module fonctionnel simple et de fortes propriétés spectrales.

Soit  $S = (S_1, S_2)$  une paire de shifts qui commute sur  $H$ . On sait (cf partie calcul...) qu'il existe un calcul fonctionnel  $\Phi : H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon) \rightarrow \mathcal{A}_S$  où  $\mathcal{A}_S$  est l'algèbre duale engendrée par  $S_1$  et  $S_2$ . Cette représentation est de plus  $C_0$  (cf p. ...refp.C.0).

Lorsque de plus la paire  $S$  double-commute, Słocinski [25] a montré qu'elle constitue un module au sens suivant :

**Théorème 5.1** *Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux isométries qui commutent sur  $H$ . On note  $L_i = H \ominus V_i H$   $i = 1, 2$ .*

*Les quatre propositions suivantes sont alors équivalentes :*

- (1) *Le semi-groupe  $\{V_1^n V_2^m\}_{\mathbb{N}^2}$  est de type  $s$  (au sens de Suciu [1]).*
- (2)  *$V_1$  et  $V_2$  sont deux shifts qui double-commutent.*
- (3)  *$V_2$  est un shift et  $L_2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_1^n (L_1 \cap L_2)$ , ou bien  $V_1$  est un shift et  $L_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_2^n (L_1 \cap L_2)$ .*
- (4) *L'espace  $\mathcal{L} = L_1 \cap L_2$  est ambulant pour le semi-groupe  $\{V_1^n V_2^m\}_{\mathbb{N}^2}$  et  $H = \bigoplus_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} V_1^n V_2^m \mathcal{L}$ .*

Pour une paire de shifts qui double-commute on a donc  $\mathcal{L} = \text{Ker} S_1^* \cap \text{Ker} S_2^* \neq 0$  et un module pour  $S$  est la paire  $M = (M_{z_1}, M_{z_2})$  de multiplication par les variables indépendantes sur  $H^2(\mathcal{D}^\epsilon, \mathcal{L})$ .

**Proposition 5.1** *Soit  $S = (S_1, S_2)$  une paire de shifts qui commute et telle que  $\mathcal{L} = \text{Ker} S_1^* \cap \text{Ker} S_2^* \neq 0$ .*

*Alors on a  $\text{SP} S = \mathcal{D}^\epsilon$  et la représentation  $\Phi$  est une isométrie.*

*Preuve :* Le fait que  $\mathcal{L} \neq 0$  montre que  $0 \in \text{SP}(S)$ . On considère alors la transformation de Möbius  $M_\mu(z) = \frac{z - \mu}{1 - \bar{\mu}z}$  pour  $\mu \in \mathcal{D}$ .

Pour  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D}^\epsilon$ , la paire  $S^\mu := (S_1^{\mu_1}, S_2^{\mu_2})$  reste une paire de shifts. De plus  $(S^\mu)^* = S^{\bar{\mu}} \circ \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ . On en déduit facilement que la paire  $S^\mu$  double-commute et que  $0 \in \text{SP}(S^\mu)$ .

.....

Dans le cas où  $\dim \mathcal{L} = 1$  Curto a montré dans [9] que le spectre de la paire de multiplications

$M$  agissant sur  $H^2(\mathcal{D}^\epsilon)$  est  $\overline{\mathcal{D}}^2$  tout entier.

D'autre part pour  $f \in H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  on peut écrire :

$$\|f\| = \sup_{\lambda \in \mathcal{D}^\epsilon} |f(\lambda)| \leq \rho(f(S_1, S_2)) \leq \|f(S_1, S_2)\|$$

On déduit de cette remarque qu'une paire de shifts qui double-commute admet un calcul fonctionnel  $\Phi$  isométrique, i.e. elle appartient à la classe A.  $\square$

D'autre part, après avoir défini l'indice d'une paire d'opérateurs Fredholm  $T$  par l'indice de  $\hat{T} \in \mathcal{L}(H \otimes C^2)$  (cf. 4), Curto dans [9, p. 143] a montré la formule suivante dans le cas de double-commutativité :

**Théorème 5.2** *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire d'opérateurs qui double-commute sur  $H$ .*

*Alors on a :*

$$\begin{aligned} i(T) = & -\dim(\text{KER}T_1T_1^* \cap \text{KER}T_2T_2^*) + \dim(\text{KER}T_1^*T_1 \cap \text{KER}T_2T_2^*) \\ & + \dim(\text{KER}T_1T_1^* \cap \text{KER}T_2^*T_2) - \dim(\text{KER}T_1^*T_1 \cap \text{KER}T_2^*T_2) \end{aligned}$$

**Corollaire 5.1** *Soit  $S = (S_1, S_2)$  une paire de shifts Fredholm qui double-commute, et  $\mathcal{L} = \dim(\text{KER}T_1T_1^* \cap \text{KER}T_2T_2^*)$ .*

*On a alors  $i(S) = -\dim(\text{KER}T_1T_1^* \cap \text{KER}T_2T_2^*) = -\dim \mathcal{L}$*

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème précédent.  $\square$

Remarque 1 :  $\text{KER}T_1T_1^* \cap \text{KER}T_2T_2^* = \text{KER}\Lambda^2(T)$ .

Remarque 2 : Pour une paire d'isométries qui double-commute on a  $\Lambda^0 = 1$  et  $\text{KER}\Lambda^1 = \text{KER}\Lambda^2 = \text{KER}T_1^* \cap \text{KER}T_2^*$ .

Donc une paire de shifts qui double-commute est Fredholm si et seulement si l'espace ambulant  $\mathcal{L}$  est de dimension finie.

Remarque 3 :  $\dim H^2 = n$  signifie  $\dim(\text{IM}\delta_2)^\perp = n$  i.e.  $\dim \text{KER}\delta_2^* = n$  i.e.  $\dim(\text{KER}T_1^* \cap \text{KER}T_2^*) = n$ .

Pour finir cette partie, on considère la paire  $M = (M_{z_1}, M_{z_2})$  de multiplications par  $z_1$  et  $z_2$  sur l'espace  $L^2(\nu)$  où  $\nu$  est une mesure borélienne finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$ .

**Proposition 5.2** (1)  $\mathcal{B} = \{z_1^n z_2^m\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$  est une base orthonormée de  $L^2(\nu)$  si et seulement si  $\nu \in \mathcal{M}_{(0,0)}$ .

(2) Si  $\nu \in \mathcal{M}_{(0,0)}$  alors  $\tilde{M} = M|_{H^2(\nu)}$  est une paire de shifts qui double-commute, et dans ce cas on a  $M = (M_{z_1}, M_{z_2})$  sur  $L^2(\nu)$  qui est unitairement équivalent à  $M = (M_{z_1}, M_{z_2})$  sur  $L^2(\mathcal{T}^\epsilon)$ .

## 6 Algèbre duale engendrée par une paire d'opérateurs.

### 6.1 Introduction.

Cette partie se décompose en deux directions principales.

Dans un premier temps nous exposerons une collection de résultats essentiellement issus de l'analyse des propriétés spectrales des paires d'opérateurs. Nous rappellerons ces résultats afin de donner une vision assez détaillée et précise des percées effectuées dans ce domaine. Cette collection n'est pas exhaustive mais retrace quelques progrès essentiels effectués dans l'utilisation des spectres dans les algèbres duales et dans certaines réductions maintenant classiques du problème du sous-espace invariant.

Dans un second temps nous développerons un procédé d'approximation fondé sur la dominance de certains ensembles et la méthode de Scott Brown. Ceci permet entre autres d'obtenir de nouveaux résultats sur les sous-espaces invariants et la réflexivité de certaines paires de contractions.

### 6.2 Rappels.

Dans cette section nous rappelons quelques notations et définitions nécessaires pour noncer les résultats qui vont suivre. Il s'agit du contexte général classique des algèbres duales et des calculs fonctionnels. On peut consulter [26] et [1] pour une exposition plus complète et détaillée de ces notions.

**Définition 6.1** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$  une algèbre duale et  $\theta \in ]0, 1[$ .

On appelle  $\mathcal{X}_\theta(\mathcal{A})$  l'ensemble des éléments  $[L]$  du  $\mathcal{Q}_\mathcal{A}$  pour lesquels il existe deux suites  $(x_i)_i$  et  $(y_i)_i$  dans la boule unité fermée de  $H$  vérifiant simultanément :

$$(a) \quad \limsup_{i \rightarrow +\infty} \|[L] - [x_i \otimes y_i]\| \leq \theta.$$

$$(b^r) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \|[x_i \otimes \omega]\| = 0, \quad \omega \in H.$$

$$(c^l) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \|\omega \otimes x_i\| = 0, \quad \omega \in H.$$

**Définition 6.2** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$  une algèbre duale,  $\theta \in ]0, 1[$  et  $\gamma > \theta$ .

On dit que  $\mathcal{A}$  possède la propriété  $X_{0,1}$  si  $\mathcal{X}_\theta \supset (\mathcal{Q}_\mathcal{A})_\gamma$  (boule fermée du  $\mathcal{Q}_\mathcal{A}$ , centre en 0, de rayon  $\gamma$ ).

Cette propriété garantit une très grande flexibilité dans les approximations et implique en particulier que l'algèbre  $\mathcal{A}$  est réflexive (ce qui garantit un treillis des sous-espaces invariants riche).

Maintenant soit  $G$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^2$ . Tout sous-espace  $B(G)$  de  $H^\infty(G)$  qui est  $f^*$ -fermé possède un pré-dual  $B_*(G)$  identifiable  $L^1(G)/{}^\perp B(G)$ . On considère les évaluations ponctuelles  $\{\mathcal{E}_\lambda, \lambda \in G\} \subset B_*(G)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda : B(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow \langle f, \mathcal{E}_\lambda \rangle = f(\lambda). \end{aligned}$$

Soit  $\Phi : B(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  une représentation ; pour  $x, y \in H$  on définit des formes linéaires sur  $B(G)$  par :

$$\begin{aligned} x \square y : B(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow \langle f, x \square y \rangle = (\Phi(f)x|y). \end{aligned}$$

**Définition 6.3** Soit  $\Phi$  comme au-dessus et  $\theta \in ]0, 1[$ .

On appelle  $\mathcal{X}_\theta(\Phi)$  l'ensemble des éléments  $[L]$  du pré-dual  $B_*(G)$  pour lesquels il existe deux suites  $(x_i)_i$  et  $(y_i)_i$  dans la boule unité fermée de  $H$  vérifiant simultanément :

$$\begin{aligned} (a) \quad &\limsup_{i \rightarrow +\infty} \|[L] - x_i \square y_i\| \leq \theta. \\ (b^r) \quad &\lim_{i \rightarrow +\infty} \|x_i \square \omega\| = 0, \omega \in H. \\ (c^l) \quad &\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\omega \square x_i\| = 0, \omega \in H. \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent on a :

**Définition 6.4** Soit  $\Phi$  comme ci-dessus,  $\theta \in ]0, 1[$  et  $\gamma > \theta$ .

On dit que  $\Phi$  possède la propriété  $X_{\theta, \gamma}$  si  $\mathcal{X}_\theta(\Phi) \supset (B_*(G))_\gamma$  (boule fermée du pré-dual, centre en 0, de rayon  $\gamma$ ).

Remarque  $\forall x, y \in H, x \square y \in B_*(G)$  équivaut à la continuité de  $\Phi$  lorsque l'on munit  $B(G)$  de la topologie faible\* et  $\mathcal{L}(H)$  de la topologie faible des opérateurs.

### 6.3 Résultats liés des propriétés spectrales.

Les résultats qui suivent sont classés par ordre chronologique de leur parution. Cette liste, bien que non exhaustive, a pour but de citer les questions classiques et de fournir un ensemble assez large de références bibliographiques. Les théorèmes et propositions sont écrits dans le cadre de l'étude des paires d'opérateurs bien que plusieurs résultats soient initialement établis dans le contexte général des  $N$ -uplets. Cependant le cas  $N = 2$  met bien en évidence les nouvelles caractéristiques spectrales ainsi que les outils développés pour les exploiter.

**Théorème 6.1** (Kosiek, Octavio, Ptak [19, Th.3.1 p.3]) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions sur  $H$  qui commute. Supposons que  $T_1 \in C_{0, \bullet}$  et  $T_2$  est absolument continue. Si  $\sigma_{le}(T) \cap \mathcal{D}^\epsilon$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$ , alors l'algèbre duale  $\mathcal{A}_T$  a la propriété  $X_{0,1}$ .

Pour le thorme suivant on rappelle la notion d'extention co-isométrique diagonale d'une paire de contractions qui commute  $T = (T_1, T_2)$ .

On dit que la paire  $T$  possde une extention co-isométrique diagonale si il existe une extention co-isométrique  $B = (B_1, B_2)$  de  $T$  ou de  $(\tilde{T}) = (T_2, T_1)$  sur  $K$  telle que relativement la dcomposition de Wold de  $B_1 = S_1^* \oplus R_1$  et  $K = S_1 \oplus R_1$  (o  $S_1^*$  est l'adjoint d'un shift unilatral et  $R_1$  est unitaire), on puisse crire  $B_2 = A_s \oplus A_r$  o  $A_s \in \mathcal{L}(S_1)$  et  $A_r \in \mathcal{L}(S_2)$ .

**Théorème 6.2** (*Kosiek, Octavio, Ptak [19, Th.4.2 p.7]*) Soit  $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{L}(H)$  une paire absolument continue de contractions qui commute. Supposons de plus que  $T$  possde une extention co-isométrique diagonale.

Dans ce cas si  $\sigma_{le}(T) \cap \mathcal{D}^\epsilon$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$ , alors l'algbre  $\mathcal{A}_T$  possde la proprié  $X_{0,1}$ .

Le rsultat qui suit est le premier utiliser la partie "mdiane" du spectre, dont l'apparition est caractéristique du passage d'un seul deux, voire  $N$  oprateurs.

Ici  $G$  est un domaine born de  $\mathbb{C}^2$  et  $B(G)$  est un sous-espace  $f^*$ -ferm de  $H^\infty(G)$  qui possde la proprié de Gleason : pour  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in G$ ,

$$\left\{ \sum_{j=1}^2 (\lambda_j - z_j) g_j, \quad g_1, g_2 \in B(G) \right\} = \{f \in B(G), \quad f(\lambda) = 0\}.$$

**Théorème 6.3** (*Albrecht, Chevreau [1, Th.2.1 p.6]*) On considre  $B(G)$  comme au dessus. On suppose qu'il existe une représentation continue  $\Phi : B(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  telle que  $\|\Phi\| = 1$ . On suppose de plus que  $\Phi$  est  $C_{00}$ .

Si  $\sigma_e(T) \cap G$  est dominant pour  $B(G)$ , o  $T := (\Phi(\pi_1), \Phi(\pi_2))$ , alors  $\Phi$  a la proprié  $X_{\theta,1}$  ( $\pi_i : (z_1, z_2) \longrightarrow z_i, \quad i = 1, 2$ ).

**Proposition 6.1** (*Albrecht, Chevreau [1, Cor.3.3 et Cor.3.4 p.11]*) On considre une représentation  $\Phi : B(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$  continue.

1. Si  $\Phi$  est  $C_{00}$  et  $(\sigma_{le} \cup \sigma_{re}) \cap G$  est dominant pour  $B(G)$  alors  $\Phi$  a la proprié  $X_{\theta,1}$ .
2. Si  $\Phi$  est  $C_{0\bullet}$  et  $\sigma_{le} \cap G$  est dominant pour  $B(G)$  alors  $\Phi$  a la proprié  $X_{\theta,1}$ .
3. Si  $\Phi$  est  $C_{\bullet 0}$  et  $\sigma_{re} \cap G$  est dominant pour  $B(G)$  alors  $\Phi$  a la proprié  $X_{\theta,1}$ .

Le rsultat qui suit est une rduction pour le problme du sous espace invariant.

**Proposition 6.2** (*Albrecht, Ptak [2, Cor.2.4 p.4]*) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire d'oprateurs qui double-commute dans  $\mathcal{L}(H)$ .

Si  $\text{SP}(T) \setminus \sigma_e(T) \neq \emptyset$  alors  $T_1$  ou  $T_2$  a un sous-espace hyperinvariant.

De mme si  $T_1$  ou  $T_2$  possde une partie unitaire alors  $\text{LAT}T$  est non trivial.

**Théorème 6.4** (Albrecht, Ptak [2, Th.2 p.2]) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions complètement non unitaires qui double-commute dans  $\mathcal{L}(H)$ . Si  $\sigma_e(T) \cap \mathcal{D}^\epsilon$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  alors  $T$  a la propriété  $X_{0,1}$ .

Ceci combiné avec les réductions au dessus permet d'établir :

**Proposition 6.3** (Albrecht, Ptak [2, Th.1 p.1]) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions qui double-commute dans  $\mathcal{L}(H)$ . Si  $\sigma(T) \cap \mathcal{D}^\epsilon$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  alors  $\text{LAT} T$  est non trivial.

**Proposition 6.4** (Albrecht, Ptak [2, Prop.5.3 Rq.5.4]) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions qui double-commute presque dans  $\mathcal{L}(H)$  (i.e.  $T_1^*T_2$  et  $T_2T_1^*$  ne diffèrent que d'un opérateur compact).

Si on est dans une des situations suivantes :

1.  $\sigma_{me}(T)$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  ou
2.  $T_1$  est  $C_{0,\bullet}$  et  $T_2$  est  $C_{\bullet,0}$  et  $\sigma_e(T)$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  ou
3.  $T_1$  ou  $T_2$  est  $C_{0,\bullet}$  et  $(\sigma_{le} \cup \sigma_{me})$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  ou
4.  $T_1$  ou  $T_2$  est  $C_{\bullet,0}$  et  $(\sigma_{re} \cup \sigma_{me})$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  ou
5.  $T$  admet une extension co-isométrique diagonale et  $(\sigma_{le} \cup \sigma_{me})$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$

alors  $T$  a la propriété  $X_{0,1}$ .

**Théorème 6.5** (Kosiek, Ptak [20, ???]) Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions complètement non unitaires.

Si  $\sigma(T) \cap \mathcal{D}^\epsilon$  est dominant pour  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$ , et  $T_1$  et  $T_2$  sont simultanément  $C_{0,\bullet}$ , alors  $\mathcal{A}_T$  a la propriété  $X_{0,1}$ .

Enfin nous finissons cette partie en citant quelques problèmes classiques liés aux notions évoquées plus haut.

Le premier est l'analogie d'un résultat bien connu d'Apostol.

**Problème 6.1** Une paire de contractions c.n.u. qui commute, telle que  $\sigma(T) \supset \mathcal{T}^\epsilon$  et qui possède un calcul  $H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$  non isométrique a-t-elle un sous-espace invariant non trivial ?

**Problème 6.2** Une paire telle que  $\sigma_e \neq \sigma$  a-t-elle un sous-espace invariant non trivial ?

**Problème 6.3** Que dire de  $\text{LAT}(T)$  si  $\sigma(T) \supset \mathcal{T}^\epsilon$  ?



## 6.4 Gnralits.

Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions sur  $H$  qui commute et  $B = (B_1, B_2)$  une extention co-isométrique minimale agissant sur  $K \supset H$ . On suppose qu'il existe un sous-espace  $M$  réduisant pour  $B$ . On note  $P_H$  la projection orthogonale de  $K$  sur  $H$  et  $P_M$  la projection orthogonale de  $K$  sur  $M$ .

On suppose de plus que  $T \in \mathbf{A}^{(2)}(H)$ . On note alors  $\Phi_T$  le calcul  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  associé et  $\phi_T$  sont application adjointe :

$$\Phi_T : H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{A}_T \subset \mathcal{L}(H)$$

$$\phi_T : \mathcal{Q}_T \longrightarrow \mathcal{Q}_\infty = L^1(\mathcal{T}^\epsilon)/H_0^1(\mathcal{T}^\epsilon)$$

pour  $x, y \in H$  on note  $x \overset{\top}{\square} y$  la forme linéaire (qui est dans  $\mathcal{Q}_\infty$  car  $\Phi_T$  est  $f^*$ -continue) agissant de la façon suivante :

$$\langle f|x \overset{\top}{\square} y \rangle = (\Phi_T(f)x|y) \quad f \in H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon).$$

La paire  $B = (B_1, B_2)$  est aussi absolument continue et la proposition qui suit permet de travailler relativement l'e.c.i.m. et au prdual associé.

**Proposition 6.5** *Supposons que  $T \in \mathbf{A}^{(2)}(H)$  et que  $B$  est une e.c.i.m. sur  $K$  ;*

*Dans ce cas on a :*

1.  $B \in \mathbf{A}^{(2)}(K)$ .
2.  $\forall x, y \in H \quad x \overset{\text{B}}{\square} y = x \overset{\top}{\square} y$ . Dans la suite on notera  $x \square y = x \overset{\text{B}}{\square} y$ .
3. Pour tout  $x \in H$  et  $w, z \in K$  on a :

$$x \square z = x \square P_H z$$

$$w \square z = P_M w \square P_M z.$$

4. Soit  $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$  telle que  $\|x_n \square y\| \longrightarrow 0 \quad \forall y \in H$  alors on a :

$$\|x_n \square z\| \longrightarrow 0 \quad \forall z \in K$$

$$\|P_M x_n \square z\| \longrightarrow 0 \quad \forall z \in K.$$

Preuve : (1...4) sont classiques cf. [8]  $\square$

On met maintenant en évidence des relations d'entrelacement essentielles pour utiliser la dcomposition de l'espace  $K$ .

**Proposition 6.6** *Soit  $T$  une contraction absolument continue et  $B$  une e.c.i.m. ayant un sous-espace réduisant  $M$ . On écrit  $K = M \oplus M^\perp$  et relativement à cette décomposition  $B = B_M \oplus B_{M^\perp}$ .*

*Soient  $x \in H$  et  $h \in H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$ . On a alors :*

$$h(T)x = h(B)x = h(B_M)P_Mx \oplus h(B_{M^\perp})P_{M^\perp}x$$

*et on en déduit donc que :*

$$h(B_M)P_Mx = P_Mh(T)x$$

$$h(B_{M^\perp})P_{M^\perp}x = P_{M^\perp}h(T)x$$

Il résulte de plus de ces relations que  $\overline{P_M H}$  est invariant pour la paire  $B_M$ .

Les notions que nous rappelons maintenant ont été introduites par Chevreau et Pearcy.

Soient  $\mathcal{M}$  un sous-espace  $f^*$ -fermé de  $\mathcal{L}(H)$  et  $0 \leq \theta < 1$  ; alors  $\mathcal{E}_\theta^r(\mathcal{M})$  est l'ensemble de tous les éléments  $[L]$  de  $\mathcal{Q}_M$  pour lesquels il existe deux suites  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  dans  $(H)_1$  vérifiant :

$$(a) \quad \limsup_n \|[L] - [x_n \otimes y_n]\| \leq \theta$$

$$(b^r) \quad \|[x_n \otimes z]\| \rightarrow 0 \quad \forall z \in H$$

$$(c^r) \quad y_n \rightarrow 0$$

L'ensemble  $\mathcal{E}_\theta^l(\mathcal{M})$  est obtenu en remplaçant les conditions  $(b^r)$  et  $(c^r)$  respectivement par :

$$(b^l) \quad \|[z \otimes y_n]\| \rightarrow 0 \quad \forall z \in H$$

$$(c^l) \quad x_n \rightarrow 0$$

Remarque : Les conditions  $(c^r)$  et  $(c^l)$  sont en fait superflues ici.

Dans le cas où on étudie une paire de contractions  $T$  qui possède un calcul fonctionnel  $\Phi_T : H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon) \rightarrow \mathcal{A}_T$ , on peut pour  $0 \leq \theta < 1$  définir les ensembles  $\hat{\mathcal{E}}_\theta^r(T)$  et son analogue  $\hat{\mathcal{E}}_\theta^l(T)$  ; par exemple  $\hat{\mathcal{E}}_\theta^r(T)$  est l'ensemble des éléments  $[f]$  du dual de  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  identifié  $L^1(\mathcal{T}^\epsilon)/\mathcal{H}_r^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  pour lesquels il existe deux suites  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  dans  $(H)_1$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$(\hat{a}) \quad \limsup_n \|[f] - x_n \square y_n\| \leq \theta$$

$$(\hat{b}^r) \quad \|x_n \square z\| \rightarrow 0 \quad \forall z \in H$$

On peut observer que puisque  $\phi_T$  est contractante, la condition  $(\hat{b}^r)$  est vérifiée dès que  $\|[x_n \square z]\| \rightarrow 0, z \in H$ .

Pour  $0 \leq \theta < \gamma \leq 1$ , on dit que le sous-espace  $f^*$ -fermé  $\mathcal{M}$  possède la propriété  $E_{\theta, \gamma}^r$  si l'enveloppe

quilibre ferme de l'ensemble  $\mathcal{E}_\theta^r$  contient la boule unit ferme de  $\mathcal{Q}_M$  centre en 0 et de rayon  $\gamma$ . On crira  $ecef(\mathcal{E}_\theta^r(\mathcal{M})) \supset (\mathcal{Q}_M)_\gamma$ .

Pour l'algre  $\mathcal{A}_T$  engendre par une paire d'oprteurs on notera  $ecef(\mathcal{E}_\theta^r(T)) \supset (\mathcal{Q}_T)_\gamma$  et on omettra  $T$  losqu'il n'y a pas d'ambigut. De mme on dfinit la proprit  $E_{\theta,\gamma}^l(\mathcal{M})$  lorsque  $ecef(\mathcal{E}_\theta^l) \supset (\mathcal{Q}_M)_\gamma$ .

Lorsque de plus on a un calcul fonctionnel  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$ , on introduit les proprits  $\hat{E}_\theta^r(T)$  et  $\hat{E}_\theta^l(T)$  ; par exemple la premiere est vrifie si  $ecef(\hat{\mathcal{E}}_\theta^r(T)) \supset (\mathcal{Q}_\infty)_\gamma$ .

Dans le cas d'un calcul isomtrique les notions cites au-dessus coincident.

## 6.5 Prliminaires fonctionnels.

On commence par dfinir quelques sous-espaces de  $L^2(\mathcal{T}^\epsilon)$  qui sont essentiels dans la description de la paire  $B$  via des modles fonctionnels.

Pour tout borlien  $\sigma$  de  $\mathcal{T}$ , on notera  $H^2L^2(\mathcal{T} \times \sigma)$  l'ensemble des lments  $f \in L^2(\mathcal{T}^\epsilon)$  tels que :

$$(1) \quad \forall \omega_1, \quad f(\omega_1, \cdot) \in L^2(\sigma)$$

$$\text{et } (2) \quad \forall \omega_2, \quad f(\cdot, \omega_2) \in H^2(\mathcal{T}).$$

On dfinit de faon symtrique  $L^2H^2(\sigma \times \mathcal{T})$ , ensemble des lments de  $L^2(\mathcal{T}^\epsilon)$  qui sont dans  $L^2(\sigma)$  lorsqu'on fixe la seconde variable  $\omega_2$  et dans  $H^2(\mathcal{T})$  lorsqu'on fixe  $\omega_1$ .

On dfinit de faon similaire les ensembles  $\overline{H}^2L^2(\mathcal{T} \times \sigma)$  et  $L^2\overline{H}^2(\sigma \times \mathcal{T})$  en remplaant au-dessus  $H^2(\mathcal{T})$  par  $\overline{H}^2(\mathcal{T})$  (fermeture dans  $L^2(\mathcal{T})$  des polynmes anti-analytiques).

On notera  $H^2(\mathcal{T}^\epsilon)$  la fermeture dans  $L^2(\mathcal{T}^\epsilon)$  des polynmes.

Dans la suite nous aurons besoin de factoriser des fonctions de  $L^1(\nu)$  o  $\nu$  est une mesure sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  appartenant la bande  $\beta_0$ <sup>4</sup> et nous donnerons des rsultats gnraux dans ce cadre. Cependant dans le cas o  $\nu = m_{2|\mathcal{T} \times \sigma}$  ou  $\nu = m_{2|\sigma \times \mathcal{T}}$  de telles factorisations peuvent souvent s'obtenir sans nouvel outil en analysant les factorisations obtenues lorsque l'on fixe une des variables.

Rappelons tout d'abord quelques rsultats et outils de factorisations dj connus.

Dans le cas o  $\nu = m_2$ , Bercovici et Westwood ont montr les thormes suivants pour le polydisque  $\mathcal{T}^\parallel$  muni de la tribu des borliens et la mesure de Lebesgue  $m_k$  :

**Théorème 6.6** (Bercovici, Westwood [6]) Soient  $h \in L^1(\mathcal{T}^\parallel, \mathbb{1}_\parallel)$  et  $\epsilon > 0$  ; il existe  $f, g \in H^2(\mathcal{T}^\parallel)$  tels que  $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq \|h\|_1^{1/2}$  et  $\|h - f\bar{g}\| < \epsilon$ .

Si  $f \geq 0$  on peut choisir  $f = g$ .

**Théorème 6.7** (Bercovici, Westwood [6]) Soient  $h \in L^1(\mathcal{T}^\parallel, \mathbb{1}_\parallel)$  et  $\epsilon > 0$  ; il existe  $f \in H^2(\mathcal{T}^\parallel)$  et  $g \in L^2(\mathcal{T}^\parallel)$  tels que  $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq (1 + \epsilon)\|h\|_1^{1/2}$  et  $h = fg$ .

<sup>4</sup>Les bandes de mesures sont dfinies p. ???

Les preuves données dans cet article sont extrêmement constructives et permettent une grande souplesse d'utilisation. Elles sont essentiellement fondées sur un procédé d'approximation successives et la localisation.

C'est le résultat suivant qui permet de localiser certaines fonctions sur un borlien et reste une clé essentielle dans ce type de processus.

**Théorème 6.8** (Rudin [23, Th. 3.5.3]) Soient  $\omega \subset \mathcal{T}^{\parallel}$  un ouvert et  $\eta \in ]0, 1[$ .

Il existe  $u \in H^{\infty}(\mathcal{T}^{\parallel})$  tel que :

$$\begin{aligned} |u| &= 1 \quad m_2 - pp \text{ sur } \omega \\ |u| &= \eta \quad m_2 - pp \text{ sur } \mathcal{T}^{\epsilon} \setminus \omega \end{aligned}$$

Le premier essai dans le sens d'une généralisation de tels résultats est apparu dans l'article de Bercovici et Li "Isometric Functional Calculus on the Bidisk and Invariant Subspace" ([5]) en 1992.

Dans cet article on considère une mesure  $\nu \in \beta_0$ . Dans ce cas on a un isomorphisme isométrique  $\theta : H^{\infty}(\mathcal{T}^{\epsilon}) \rightarrow \mathcal{P}^{\infty}(\nu)$ .

Bercovici et Li démontrent dans ce cadre les deux résultats :

**Proposition 6.7** (Bercovici, Li [5, Lemme 4.1]) Soient  $\omega \subset \mathcal{T}^{\epsilon}$  un ouvert et  $u \in H^{\infty}(\mathcal{T}^{\epsilon})$  tel qu'il existe  $g$  continue sur  $\omega$  vérifiant  $u|_{\omega}(\zeta) = g(\zeta)$   $m_2 - pp$  sur  $\omega$ . On a alors  $\theta u(\zeta) = g(\zeta)$   $\nu - pp$  sur  $\omega$ .

Le deuxième résultat est en accord avec le théorème 6.8.

**Proposition 6.8** (Bercovici, Li [5]) Pour tout borlien  $\omega \subset \mathcal{T}^{\epsilon}$  tel que  $\nu(\omega) \neq 0$  et  $\epsilon > 0$ , il existe  $u \in \mathcal{P}^{\infty}(\nu)$  tel que  $\|u\|_{\infty} = 1$  et  $\nu\{\zeta \in \mathcal{T}^{\epsilon}, ||\Pi(\zeta)| - \chi_{\omega}(\zeta)| > \epsilon\} < \epsilon$ .

Il faut voir ce résultat comme une extension du théorème 6.8 car ici  $\omega$  est un borlien quelconque. Malheureusement la proposition 6.8 de Bercovici et Li ne permet pas à l'heure actuelle de localiser correctement certains vecteurs. En effet dans cette proposition on peut avoir  $\nu\{\zeta \in \mathcal{T}^{\epsilon}, ||\Pi(\zeta)| - \chi_{\omega}(\zeta)| > \epsilon\} \neq \emptyset$  et certains vecteurs peuvent alors être concentrés sur ce borlien non négligeable.

De plus ce qui suit montre que le cas du polydisque, même avec la mesure de Lebesgue  $m_2$ , est singulièrement différent de celui de  $\mathcal{T}$ .

Commençons d'abord par rappeler une remarque importante sur les traces au bord des modules des éléments de  $H^{\infty}(\mathcal{D}^{\epsilon})$ .

Soit  $f \in H^{\infty}(\mathcal{D}^{\epsilon})$ , et  $f^* \in H^{\infty}(\mathcal{T}^{\epsilon})$ ,  $f^*(z_1, z_2) = \lim_{r \rightarrow 1} f(rz_1, rz_2)$ . Pour  $w \in \mathcal{T}^{\epsilon}$ , et

$$\psi \in L^{\infty}(\mathcal{T}^{\epsilon})$$

on note :

$$\begin{aligned}\psi_w : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longrightarrow \psi(\lambda w)\end{aligned}$$

On définit la fonction  $G_\psi$  partout sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  par :

$$G_\psi(w) = \|\psi_w\|_\infty$$

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 6.9** (Rudin [?], Th. 3.5.2) Si  $f \in H^\infty(\mathcal{D}^\epsilon)$ , alors  $G_{f^*}$  est semi-continue inférieurement (sci).

Preuve : Grâce au principe du maximum, on a

$$G_{f^*}(w) = \sup_{z \in \mathcal{T}} \left\{ \left| \lim_{r \rightarrow 1} f_w(rz) \right| \right\} = \sup_{z \in \mathcal{T}} \sup_{r \in ]0,1[} |f(rzw)|$$

Or pour tout  $r \in ]0,1[$ , l'application  $w \longrightarrow \sup_{z \in \mathcal{T}} |f(rzw)|$  est continue, d'où le résultat.  $\square$

Afin de montrer exactement les limites des résultats du même type que le théorème 5.8 ou la proposition 5.8, nous allons appliquer ce qui précède deux exemples significatifs.

Exemple 1 : Soit  $A \in \mathcal{T}^\epsilon$  un ouvert dense et circulaire ( $\forall |z| = 1, w \in A \rightsquigarrow zw \in A$ ) tel que  $m_2(A) < 1$ .

On pose  $B = \mathcal{T}^\epsilon \setminus A$  ; on a donc  $m_2(B) \neq 0$  et  $B$  est d'intérieur vide.

On définit alors  $\psi$  sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  par :

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta \in A \\ 2 & \text{si } \zeta \in B \end{cases}$$

Dans ce cas il est facile de voir que  $\{w / \sup_{|z|=1} |\psi(zw)| > 1,5\} = B$ . Donc  $G_\psi$  n'est pas sci et il n'existe pas  $f \in H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  telle que  $|f| = \psi$   $m_2 - pp$ .

Exemple 2 : Même en relaxant les hypothèses dans l'esprit de la propriété ( $\mathcal{R}'$ ), on construit le contre exemple suivant : soient  $A$  et  $B$  comme dans l'exemple 1.

Supposons qu'il existe  $f \in H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  tel que :

$$\| |f| - \chi_B \| < \epsilon \quad m_2 - pp$$

On aurait alors  $|f| > 1 - \epsilon \quad m_2 - pp$  sur  $B$  et  $|f| < \epsilon \quad m_2 - pp$  sur  $A$ . On en déduit que  $\{w / \sup_{|z|=1} |f(zw)| > 1 - \epsilon\} = B$ , ce qui est impossible.

Les résultats qui suivent donnent une extension exacte du théorème 6.8 qui ne permet pas de localiser tous les vecteurs mais suffit pour réaliser certaines factorisations fonctionnelles dans  $L^1(\nu)$ .

Nous formulons le résultat sous des hypothèses plus générales quant à la nature de la mesure  $\nu$ .

**Définition 6.5** On dit qu'une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  muni de la tribu des borliens a la proprié (R) si pour tout ensemble  $\mathcal{E} = \mathcal{T} \times \{\alpha_\epsilon, \beta_\epsilon\} \cup \{\alpha_\infty, \beta_\infty\} \times \mathcal{T}$  o  $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{T}$   $\nu(\mathcal{E}) = 0$ .

Le rsultat suivant est du Bercovici et Li.

**Lemme 6.1** (Bercovici, Li [5]) Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la proprié (R). Quelque soit le rectangle ouvert  $R = ]\alpha_1, \beta_1[ \times ]\alpha_2, \beta_2[ \subset \mathcal{T}^\epsilon$  tel que  $\nu(R) \neq 0$  et quelque soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $u \in P^\infty(\nu)$  tel que :

$$(i) \quad \|u\|_\infty = 1$$

$$(ii) \quad \| |u(\zeta)| - \chi_R(\zeta) | < \epsilon \quad \nu \text{ pp}$$

On peut alors tendre ce rsultat aux ouverts de  $\mathcal{T}^\epsilon$  et prouver la proposition :

**Proposition 6.10** Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la proprié (R). Pour tout ouvert  $\omega \subset \mathcal{T}^\epsilon$  et tout  $\epsilon > 0$  fixes, il existe  $u \in P^\infty(\nu)$  tel que  $\|u\|_\infty = 1$  et

$$\| |u(\zeta)| - \chi_\omega(\zeta) | < \epsilon \quad \nu \text{ pp}.$$

Preuve : Pour une mesure  $\nu$  ayant la proprié (R) et un ouvert  $\omega \subset \mathcal{T}^\epsilon$ , on peut crire  $\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i \cup \omega_0$  o  $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de rectangles ouverts et  $\omega_0$  est un ensemble  $\nu$ -ngligeable.

Soit  $(\epsilon_n)_n$  une suite dcroissante de rels positifs tels que  $\sum_{\mathbb{N}} \epsilon_n < \epsilon$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Lambda_n = \bigcup_{i=0}^n R_i$ .

(1) Pour  $n = 0$ ,  $\Lambda_0 = R_0$  et le lemme prcdent permet de construire  $u_0 \in P^\infty(\nu)$  tel que :

$$(i) \quad \|u_0\|_\infty = 1$$

$$(ii) \quad \| |u_0(\zeta)| - \chi_{R_0}(\zeta) | < \epsilon_0 \quad \nu \text{ pp}$$

Soit alors  $(\delta_n)_n$  une suite de rels positifs tels que  $\frac{2\delta_n}{1-2\delta_n} < \epsilon_{n+1}$ .

(2) Supposons que l'on sache construire pour  $n$  donn un lment  $u_n \in P^\infty(\nu)$  tel que :

$$\begin{cases} \|u_n\|_\infty = 1 \\ \| |u_n(\zeta)| - \chi_{\Lambda_n}(\zeta) | < \delta_n < \epsilon_{n+1} < \epsilon_n \quad \nu \text{ pp} \end{cases}$$

On considre alors  $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n \cup R_{n+1}$  ; grce au lemme prcdent, on sait qu'il existe  $v_{n+1} \in P^\infty(\nu)$  tel que :

$$\begin{cases} \|v_{n+1}\|_\infty = 1 \\ \| |v_{n+1}(\zeta)| - \chi_{R_{n+1}}(\zeta) | < \delta_n \quad \nu \text{ pp} \end{cases}$$

On construit alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_{n+1}}{\|u_n + v_{n+1}\|}$$

On a  $\|u_n\| - \|v_{n+1}\| \leq \|u_n + v_{n+1}\| \leq \|u_n\| + \|v_{n+1}\|$ , ce qui permet d'évaluer :

$$\begin{cases} \zeta \notin \Lambda_{n+1} & : & 0 \leq |u_n(\zeta) + v_{n+1}(\zeta)| < 2\delta_n \\ \zeta \in \Lambda_n & : & 1 - 2\lambda_n \leq |u_n(\zeta) + v_{n+1}(\zeta)| < 1 + \delta_n \\ \zeta \in R_{n+1} & : & 1 - 2\lambda_n \leq |u_n(\zeta) + v_{n+1}(\zeta)| < 1 + 2\delta_n \end{cases}$$

On en déduit que  $1 - 2\delta_n \leq \|u_n + v_{n+1}\|_\infty \leq 1 + \delta_n$  et :

$$\begin{cases} \|u_{n+1}\|_\infty = 1 \\ \|u_{n+1}(\zeta) - \chi_{\Lambda_{n+1}}(\zeta)\| < \frac{2\delta_n}{1 - 2\delta_n} < \delta_{n+1} \end{cases}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= \left| \frac{u_n + v_{n+1}}{\|u_n + v_{n+1}\|_\infty} - u_n \right| \\ &\leq \|u_n\|_\infty \left| 1 - \frac{1}{\|u_n + v_{n+1}\|_\infty} \right| + \frac{|v_{n+1}|}{\|u_n + v_{n+1}\|_\infty} \\ &\leq \frac{\delta_n}{1 + \delta_n} + \frac{|v_{n+1}|}{1 - 2\delta_n} \end{aligned}$$

Soit  $\zeta \in \omega$  : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > N, \zeta \in \Lambda_n$ , et

$$|u_{n+1}(\zeta) - u_n(\zeta)| \leq \frac{\delta_n}{1 + \delta_n} + \frac{\delta_n}{1 - 2\delta_n} < \epsilon_{n+1}$$

Si  $\zeta \notin \omega$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \zeta \notin \Lambda_n$  et on a encore  $|u_{n+1}(\zeta) - u_n(\zeta)| \leq \epsilon_{n+1}$ .

La suite  $(u_n)_n$  est bornée car  $\|u_n\| = 1 \quad n \in \mathbb{N}$  par construction et elle est simplement de Cauchy dans  $P^\infty(\nu)$ . Il existe donc  $u \in P^\infty(\nu)$  tel que  $u_n \rightarrow u$  simplement. On a de plus :

$$\begin{cases} \|u\|_\infty = 1 \\ \|u(\zeta) - \chi_\omega(\zeta)\| < \epsilon \quad \nu \text{ pp} \end{cases}$$

□

En particulier toute mesure de la bande  $\beta_*$  possède la propriété  $(\mathcal{R})$  (cf. [7]).

Grâce à la proposition 6.10 on peut donner une généralisation des théorèmes 6.6 et 6.7 de Bercovici et Westwood cités avant et leur preuve reste formellement inchangée (cf [6]).

**Proposition 6.11** *Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la propriété  $(\mathcal{R})$ .*

*Soient  $h \in L^1(\nu)$  et  $\epsilon > 0$  ; il existe  $f, g \in H^2(\nu)$  tels que  $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq \|h\|_1^{1/2}$  et  $\|h - f\bar{g}\| < \epsilon$ .*

*Si  $f \geq 0$  on peut choisir  $f = g$ .*

**Proposition 6.12** Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la propriété ( $\mathcal{R}$ ).

Soient  $h \in L^1(\nu)$  et  $\epsilon > 0$  ; il existe  $f \in H^2(\nu)$  et  $g \in L^2(\nu)$  tels que  $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq (1 + \epsilon)\|h\|_1^{1/2}$  et  $h = fg$ .

La proposition suivante est l'analogue du corollaire 6 [6].

**Proposition 6.13** Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la propriété ( $\mathcal{R}$ ).

Soit  $(h_n)_n \subset L^1(\nu)$ , alors il existe  $f \in H^2(\nu)$  et  $(g_n)_n \subset L^2(\nu)$  tels que  $h_n = fg_n$ ,  $n \geq 0$ .

Il est à noter que ces dernires propositions peuvent être tablies avec des preuves diffrentes lorsque on affaiblit les hypothses sur la mesure  $\nu$ . L'intert de la condition ( $\mathcal{R}$ ) est qu'elle permet de conserver les preuves de Bercovici et Weswood.

Nous donnons maintenant les rsultats lorsque la mesure vrifie la condition faible ( $\mathcal{R}'$ ) suivante :

On dit qu'une mesure  $\nu$  sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  muni de sa tribu des borliens a la propriété ( $\mathcal{R}'$ ) si pour tout ouvert  $\omega \subset \mathcal{T}^\epsilon$  tel que  $\nu(\omega) \neq 0$  et  $\epsilon > 0$ , il existe  $u \in P^\infty(\nu)$  tel que  $\|u\|_\infty = 1$  et  $\nu\{\zeta \in \mathcal{T}^\epsilon, |\chi_\omega(\zeta) - \chi_\omega(\zeta)| > \epsilon\} < \epsilon$ .

**Théorème 6.9** Soit  $\nu$  une mesure sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la propriété ( $\mathcal{R}'$ ). Etant donnés  $h \in L^1(\nu)$  et  $\epsilon > 0$ , il existe  $f, g \in H^2(\nu)$  tels que :

1.  $\|h - fg\| < \epsilon$
2.  $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq \|h\|_1^{1/2}$ .

De plus si  $h(\zeta) \geq 0$   $\nu$  pp, on peut choisir  $f = g$ .

Preuve : On choisit d'abord des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et des borliens disjoints  $\omega_1, \dots, \omega_n$  tels que :

$$\|h - \sum_1^n \alpha_j \chi_{\omega_j}\|_1 < \epsilon/2 \text{ et } \sum_1^n |\alpha_j| \nu(\omega_j) < \|h\|_1.$$

Soit  $\eta \in ]0, 1[$ ; d'après l'hypothse, il existe  $u_1, \dots, u_n \in H^\infty(\nu)$  tels que :  $\|u_i\|_\infty \leq 1$  et  $\nu\{\zeta \in \mathcal{T}, |\chi_{\omega_j}(\zeta) - \chi_{\omega_j}(\zeta)| > \eta\} < \eta$ .

On choisit alors  $\beta_i$  tel que  $\beta_i^2 = \alpha_i$  et on pose  $f = \sum_1^n \beta_i u_i$  et  $g = \sum_1^n \bar{\beta}_i u_i$ .

Il ne reste plus qu' montrer que  $f$  et  $g$  ainsi construites conviennent :

$$\begin{aligned} \|h - fg\|_1 &\leq \|h - \sum_1^n \alpha_i \chi_{\omega_i}\|_1 + \|\sum_1^n \alpha_i \chi_{\omega_i} - fg\|_1 \\ &< \epsilon/2 + \sum_1^n |\alpha_i| \|\chi_{\omega_i} - |u_i|^2\|_1 + \sum_{i \neq j} |\beta_i \bar{\beta}_j| \|u_i \bar{u}_j\|_1. \end{aligned}$$



Mais on a  $\|\chi_{\omega_i} - |u_i|^2\|_1 \leq \|\chi_{\omega_i} - |u_i|\|_1 \|\chi_{\omega_i} + |u_i|\|_\infty$  et  $\|\chi_{\omega_i} + |u_i|\|_\infty \leq 2$ . On note  $E_- = \{\zeta \in \mathcal{T}, |\chi_{\omega_j}(\zeta) - |\overline{u_j}||(\zeta)| \leq \eta\}$  et  $E_+ = \mathcal{T} \setminus E_-$ , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \|\chi_{\omega_i} - |u_i|\|_1 &= \int_{\mathcal{T}} |\chi_{\omega_i} - |u_i|| d\nu \\ &= \int_{E_-} |\chi_{\omega_i} - |u_i|| d\nu + \int_{E_+} |\chi_{\omega_i} - |u_i|| d\nu \\ &\leq \eta + \|(\chi_{\omega_i} - |u_i|)\|_\infty \nu(E_+) \\ &< 3\eta. \end{aligned}$$

D'où  $\|\chi_{\omega_i} - |u_i|^2\|_1 \leq 6\eta$ .

On estime ensuite pour  $i \neq j$  :

$$\|u_i \overline{u_j}\|_1 \leq \int_{\mathcal{T}} \| |u_i| - \chi_{\omega_i} \| \| |\overline{u_j}| - \chi_{\omega_j} \| d\nu + \int_{\mathcal{T}} (|u_i \chi_{\omega_j}| + |\overline{u_j} \chi_{\omega_i}|) d\nu.$$

Mais on a :  $\int_{\mathcal{T}} \| |u_i| - \chi_{\omega_i} \| \| |\overline{u_j}| - \chi_{\omega_j} \| d\nu \leq \| |u_i| - \chi_{\omega_i} \|_\infty \int_{\mathcal{T}} \| |\overline{u_j}| - \chi_{\omega_j} \| d\nu \leq 6\eta$ . On a aussi en utilisant encore la décomposition  $\mathcal{T} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$  :

$$\int_{\mathcal{T}} |u_i \chi_{\omega_j}| d\nu = \int_{\mathcal{T}} \| |u_i| - \chi_{\omega_i} \| \chi_{\omega_j} d\nu \leq 3\eta.$$

De même on a  $\int_{\mathcal{T}} |\overline{u_j} \chi_{\omega_i}| d\nu \leq 3\eta$ , d'où  $\|u_i \overline{u_j}\|_1 \leq 12\eta$ . Finalement pour  $\eta$  assez petit on a  $\|h - f\overline{g}\|_1 < \epsilon$ .

De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} |f|^2 d\nu &= \int_{\mathcal{T}} \left| \sum_1^n \beta_i u_i \right|^2 d\nu \\ &\leq \sum_1^n |\alpha_i| \int_{\mathcal{T}} |u_i|^2 d\nu + \sum_{i \neq j} |\beta_i \overline{\beta_j}| \int_{\mathcal{T}} |u_i \overline{u_j}| d\nu. \end{aligned}$$

Mais on a  $\int_{\mathcal{T}} |u_i|^2 d\nu = \int_{\mathcal{T}} (|u_i|^2 - \chi_{\omega_i}) d\nu + \int_{\mathcal{T}} \chi_{\omega_i} d\nu \leq 6\eta + \nu(\omega_i)$ . Avec  $\int_{\mathcal{T}} |u_i \overline{u_j}| d\nu \leq 12\eta$ , on obtient finalement :

$$\int_{\mathcal{T}} |f|^2 d\nu \leq 6\eta \sum_1^n |\alpha_i| + \sum_1^n |\alpha_i| \nu(\omega_i) + 12\eta \sum_{i \neq j} |\beta_i \overline{\beta_j}|.$$

Ceci donne pour  $\eta$  assez petit  $\|f\|_2 \leq \|h\|_1^{1/2}$ ; la majoration de  $\|g\|_2$  est similaire.  $\square$

On a maintenant besoin d'un lemme technique qui permet de mettre en place un procédé itératif qui conduira la factorisation finale. La forme très précise des facteurs ne nous servira pas pour achever cette partie mais sera nécessaire dans une partie ultérieure pour l'étude des paires d'opérateurs unitaires.

**Lemme 6.2** Soient  $f', f'' \in H^2(\nu)$ ,  $g^j, g''^j \in L^2(\nu)$   $j = 1, \dots, N$  et  $\epsilon > 0$ . Alors il existe  $u \in H^\infty(\nu)$  telle que pour tout couple  $(n, m) \in \mathbb{N}$  il existe  $g_{n,m}^j \in L^2(\nu)$   $j = 1, \dots, N$  tels que :

1.  $\|(f'g^j + f''g''^j) - (f' + \alpha_1^n \alpha_2^m u f'')g_{n,m}^j\|_1 < \epsilon$   $j = 1, \dots, N$
2.  $\|u f''\|_2 < 2\|f''\|_2 + \epsilon$
3.  $\|g_{n,m}^j\|_2 \leq \|g^j\|_2 + \|g''^j\|_2$   $j = 1, \dots, N$ .

Preuve : Soit  $\eta \in ]0, \frac{1}{2}[$  ; on considère le borlien  $\omega = \{\zeta \in \mathcal{T}, |\mathcal{H}''(\zeta)| > |\mathcal{H}'(\zeta)|\}$  et on définit  $H$  sur  $\mathcal{T}$  par :

$$H(\zeta) = \begin{cases} 2 - \eta & \text{sur } \omega \\ \eta & \text{sur } \mathcal{T} \setminus \omega. \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse  $(\mathcal{R}')$  on peut construire  $u \in H^\infty(\nu)$  tel que  $\|u\|_\infty \leq 2 - \eta$  et  $\nu\{\zeta \in \mathcal{T}, |\mathcal{H}'(\zeta)| - |\mathcal{H}(\zeta)| > \eta\} < \eta$ .

On note  $E_- = \{\zeta \in \mathcal{T}, |\mathcal{H}'(\zeta)| - |\mathcal{H}(\zeta)| \leq \eta\}$  et  $E_+ = \mathcal{T} \setminus E_-$  comme précédemment.

On pose alors  $f = f' + \alpha_1^n \alpha_2^m u f'' \in H^2(\nu)^5$  et on définit  $g^j$   $j = 1, \dots, N$  par :

$$\begin{cases} g^j = (2 - \eta) \frac{f'g^j + f''g''^j}{f} & \text{sur } \{f \neq 0\} \cap E_- \\ g^j = 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(1) Si  $\zeta \in \omega \cap E_-$  :

On a dans ce cas  $|\mathcal{H}'(\zeta)| - |\mathcal{H}(\zeta)| \leq \eta$  donc  $2 - \eta - |\mathcal{H}'(\zeta)| \leq \eta$  et  $|\mathcal{H}'(\zeta)| - 1 \geq 1 - 2\eta$ .

On en déduit que  $|f'(\zeta) + u f''(\zeta)| \geq |f''(\zeta)| |\mathcal{H}'(\zeta)| - |f'(\zeta)| \geq |f''(\zeta)| (|\mathcal{H}'(\zeta)| - 1) \geq |f''(\zeta)| (1 - 2\eta)$ .

(2) Si  $\zeta \in (\mathcal{T} \setminus \omega) \cap E_-$  :

On a alors  $|\mathcal{H}'(\zeta)| - \eta \leq \eta$  et donc  $|\mathcal{H}'(\zeta)| \leq 2\eta$  et  $1 - |\mathcal{H}'(\zeta)| \geq 1 - 2\eta$ . On a donc  $|f'(\zeta) + u f''(\zeta)| \geq |f'(\zeta)| - |\mathcal{H}'(\zeta)| |f''(\zeta)| \geq |f'(\zeta)| (1 - |\mathcal{H}'(\zeta)|) \geq |f'(\zeta)| (1 - 2\eta)$ .

Finalement on a obtenu :

$$|f| \geq (2 - \eta) \max\{|f'|, |f''|\} \text{ sur } E_-.$$

On en déduit que :

$$|g^j| = \frac{(2 - \eta) |f'g^j + f''g''^j|}{|f|} \leq |g^j| + |g''^j| \text{ sur } \{f \neq 0\} \cap E_-.$$

---

<sup>5</sup>Pour toute mesure on a  $H^\infty H^2 \subset H^2$

et l'ingalit est trivialement vrifie si  $f = 0$  ou sur  $E_+$  car  $g = 0$  dans ce cas.

On a donc  $g^j \in L^2(\nu)$   $j = 1, \dots, N$  et  $\|g^j\|_2 \leq \|g'^j\|_2 + \|g''^j\|_2$ .

De plus on a :  $\|uf''\|_2 \leq \|u\|_\infty \|f''\| \leq (2 - \eta)\|f''\|$  On en dduit donc pour  $\eta$  assez petit que  $\|f - f'\|_2 \leq 2\|f''\|_2 + \epsilon$ .

On pose  $g_{n,m}^j = \overline{\alpha_1^n \alpha_2^m} g^j$  et  $f_{n,m} = \alpha_1^n \alpha_2^m u f''$ .

Reste montrer que l'on ralise bien une factorisation approche :

$$\|f_{n,m} g_{n,m} - (f' g'^j + f'' g''^j)\|_1 = \int_{E_+} |f' g'^j + f'' g''^j| d\nu.$$

En effet l'ingalit  $|f| \geq \max\{|f'|, |f''|\}$  implique que lorsque  $f$  est nul  $f'$  et  $f''$  le sont aussi et la factorisation est trivialement vrifie. On a donc  $\|fg - (f' g'^j + f'' g''^j)\|_1 \leq \|f' g'^j + f'' g''^j\|_1 \nu(E_+) < \eta \|f' g'^j + f'' g''^j\|_1 < \epsilon$  pour  $\eta$  assez petit.  $\square$

On est maintenant en mesure d'noncer le thorme et le corollaire suivants, dont les preuves sont formellement identiques celles donnes par Bercovici et Westwood dans [6].

**Théorème 6.10** *Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la proprié ( $\mathcal{R}'$ ).*

*Soient  $h \in L^1(\nu)$  et  $\epsilon > 0$ .*

*Il existe  $f \in H^2(\nu)$  et  $g \in L^2(\nu)$  tels que :*

1.  $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq (1 + \epsilon)\|h\|_1^{1/2}$
2.  $h = fg$ .

**Théorème 6.11** *Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la proprié ( $\mathcal{R}'$ ).*

*Soit  $(h_n)_{n \geq 0}$  une suite d'lements de  $L^1(\nu)$ ;*

*Il existe  $f \in H^2(\nu)$  et une suite  $(g_n)_{n \geq 0} \in L^2(\nu)$  tels que  $h_n = fg_n$   $n \geq 0$ .*

On donne ici un corollaire du lemme 6.2. Cette forme plus nous sera utile par la suite :

**Proposition 6.14** *Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la proprié ( $\mathcal{R}'$ ).*

*Soient  $0 < \eta < 1/2$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\{l^j\}_{j=1}^N \in L^1$ ,  $f, \{g^j\}_{j=1}^N \in L^2$  ;*

*Il existe  $u \in H^2(\nu)$ ,  $\{c_{n,m}^j\}_{j=1}^N \in L^2(\nu)$  telles que*

$$\|l^j + fg^j - (f + \alpha_1^n \alpha_2^m u) \cdot c_{n,m}^j\| < \eta \quad j = 1, \dots, N$$

*avec le contrôle des normes suivant :*

$$\|c_{n,m}^j\|_2 \leq \begin{cases} (1 + \eta) (\|l^j\|_1^{1/2} + \|g^j\|_2) \\ (1 + \eta) \|l^j\|_1^{1/2} \quad \text{si } f \equiv 0 \end{cases}$$

$$\|\alpha_1^n \alpha_2^m u\|_2 \leq \begin{cases} (2 - \eta) \sum_{j=1}^N \|l^j\|_1^{1/2} \\ (\sum_{j=1}^N \|l^j\|_1)^{1/2} \quad \text{si } f \equiv 0 \end{cases}$$

Preuve : On peut crire grce au thorme 5.6  $l^j = l'l''^j$   $j = 1, \dots, N$  avec  $l' \in H^2(\nu)$  et  $l''^j \in L^2(\nu)$  et il suffit alors d'appliquer le lemme 6.2.

On peut de plus remarquer que si  $f = 0$ , on peut poser  $u = \frac{l'}{1+\eta}$  ; il vient alors  $\|u\|_2 \leq (\sum_{j=1}^N \|l^j\|_1)^{1/2}$  et  $c_{n,m}^j = \frac{(1+\eta)l^j}{\alpha_1^n \alpha_2^m l'}$   $\square$

VERSION MULTI ???

**Proposition 6.15** *Soit  $\nu$  une mesure finie sur  $\mathcal{T}^\epsilon$  ayant la propriit  $(\mathcal{R}')$ .*

*On note  $M^\nu = (M_{\alpha_1}^\nu, M_{\alpha_2}^\nu)$  la paire de multiplications par les variables  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur l'espace  $H^2(\mathcal{T}^\epsilon)$ . Alors  $M^\nu \in \mathbf{A}_{1,8_0}^{(2)}$ .*

Preuve : ...  $\square$

Dans la suite on notera  $M_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{T}^\epsilon))$  l'oprateur de multiplication par la variable  $\omega_i$ . On notera  $M'_{\alpha_1}$  la compression de  $M_{\alpha_1}$   $\overline{H}^2 L^2(\mathcal{T}^\epsilon)$  et  $M'_{\alpha_2}$  la compression de  $M_{\alpha_2}$   $L^2 \overline{H}^2(\mathcal{T}^\epsilon)$ .

### 6.5.1 Cas des e.c.i.m. de type Wold purs.

Dans cette partie on considre une paire  $T = (T_1, T_2)$  de contractions sur  $H$  et  $B$  une extention co-isomtrique sur  $K$ .

**Définition 6.6** *On dit que  $B$  est de type Wold si  $B$  admet une dcomposition de type Wold. On dit que  $B$  est de plus pure si il n'y a pas de sous-espace de  $K$ , rduisant  $B$  en une paire d'opérateurs unitaires.*

Dans le cas dcrir par la dfinition on crira avec les notation introduites au chap ... :

$$K = K_{UU} \oplus K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (U_1, U_2) \oplus (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On note  $E = \{UU, US, SU, SS\}$  et pour tout  $e \in E$  on dsigne par  $P_e$  la projection orthogonale de  $K$  sur l'espace correspondant  $K_e$ . De plus on dsignera par  $P_H$  la projection orthogonale de  $K$  sur  $H$ .

Une paire de contractions de type Wold pure est automatiquement absolument continue (cf Th. 3.6). On note alors  $\Phi_T$  le calcul  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  associ et  $\phi_T$  sont application pradjointe :

$$\Phi_T : H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{A}_T \subset \mathcal{L}(H)$$

$$\phi_T : \mathcal{Q}_T \longrightarrow \mathcal{P}_\infty = L^1(\mathcal{T}^\epsilon)/H_0^1(\mathcal{T}^\epsilon)$$

**Proposition 6.16** *Soit  $(x_n)_n \in H^\mathbb{N}$  telle que  $\|x_n \square y\| \longrightarrow 0 \ \forall y \in H$  alors on a :*

$$\|x_n \square z\| \longrightarrow 0 \ \forall z \in K$$

$$\|P_M x_n \square z\| \longrightarrow 0 \ \forall z \in K.$$

### 6.5.2 Analyse de la paire $B_{SU}$ .

La paire  $B_{SU} = (V_1^*, W_2)$  agit sur l'espace  $K_{SU} \subset K$ .

On note  $\Sigma_2$  le support borlien de  $W_2$  et  $\mathcal{L} = \text{KERV}_1^*$ .

**Lemme 6.3** *Il existe un sous-espace  $\mathcal{M}$  de  $K_{SU}$  qui est rduisant pour  $B_{SU}$  et tel que  $B_{SU|_{\mathcal{M}}}$  soit unitairement quivalent la paire  $(M'_{\alpha_1}, M_{\alpha_2})$  sur  $\overline{H}^2 L^2(\mathcal{T} \times \pm_{\epsilon})$ .*

Preuve : On a  $K_{SU} = \bigoplus_{n \geq 0} V_1^n \mathcal{L}$ .

De plus  $\mathcal{L} \in \text{LATRED}W_2$  car  $W_2$  et  $V_1$  double-commutent.

Soit  $\mathcal{A}_{W_2}$  l'algbre duale auto-adjointe engendree par  $W_2$ . Pour  $x \in \mathcal{L}$  on note  $\mathcal{R}_2 = \overline{\mathcal{A}_{W_2} x} \subset \mathcal{L}$ . Dans ce cas  $W_2|_{\mathcal{R}_2}$  est unitairement quivalent  $M_{\alpha_2}$  ; notons  $\Gamma : \mathcal{R}_2 \rightarrow L^2(\Sigma_2)$  l'oprateur unitaire ralisant cette quivalence.

On a alors un oprateur unitaire :

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{M} := \bigoplus_{n \geq 0} V_1^n \mathcal{R}_2 &\longrightarrow \overline{H}^2 L^2(\mathcal{T} \times \pm_{\epsilon}) \\ \sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n} &\longrightarrow \sum_{n \geq 0} \overline{z_1}^n \Gamma(x_{1,n}) \end{aligned}$$

De plus  $A := V_1^* (\sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n}) = \sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n+1}$  et

$$\begin{aligned} \Theta(A) &= \sum_{n \geq 0} \overline{z_1}^n \Gamma(x_{1,n+1}) \\ &= M'_{\alpha_1} (\sum_{n \geq 0} \overline{z_1}^n \Gamma(x_{1,n})) \\ &= M'_{\alpha_1} \Theta (\sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n}) \end{aligned}$$

D'o  $\Theta V_1^* = M'_{\alpha_1} \Theta$  ; de mme on a  $\Theta W_2 = M_{\alpha_2} \Theta$ .  $\square$

Les rsultats suivants mettent en vidence la factorisation des lments de  $L^1(\mathcal{T} \times \pm_{\epsilon})$  ainsi que certaines proprits d'annulation dans le prdual de  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$ .

Dans la suite on notera  $K_2 = \overline{H}^2 L^2(\mathcal{T} \times \pm_{\epsilon})$ .

**Lemme 6.4** *Soient  $f \in K_2$  et  $u_{n,m} = \overline{\alpha_1}^n \alpha_2^m f$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

*Pour tout  $w \in K_2$ , on a :*

1.  $\|w \square u_{n,m}\| \leq \|M'_{\alpha_1}{}^n w\| \|f\|$  .
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_{n,m} \square w\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

*o  $\square$  est relatif la paire  $(M'_{\alpha_1}, M_{\alpha_2})$ .*

Preuve :

$$\begin{aligned}
\|w \square u_{n,m}\| &= \sup \{ |\langle u_{n,m} \square w | h \rangle|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&= \sup \{ |(\overline{\alpha}_1^{-n} \alpha_2^m f h | w)|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&= \sup \{ |(\alpha_2^m f h | \alpha_1^n w)|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&= \sup \{ |(\alpha_2^m f h | P_{K_2} \alpha_1^n w)|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&\leq \|M'_{\alpha_1}{}^n w\| \|f\|
\end{aligned}$$

D'autre part pour  $n$  fix, il existe  $(h_m)_m \subset H^\infty$ ,  $\|h_m\| = 1$  tels que :

$$\begin{aligned}
\|u_{n,m} \square w\| &= \langle u_{n,m} \square w | h_m \rangle \\
&= (\overline{\alpha}_1^{-n} \alpha_2^m f h_m | w) \\
&= (\overline{\alpha}_1^{-n} f (\alpha_2^m h_m) | w) \\
&= \langle \overline{\alpha}_1^{-n} f \square w | \alpha_2^m h_m \rangle.
\end{aligned}$$

Mais  $\alpha_2^m h_m \xrightarrow{f^*} 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ , d'o le rsultat.  $\square$

**Proposition 6.17** Soit  $l \in (L^1(\mathcal{T} \times \pm_\epsilon))_\infty$ .

Il existe des suites  $(f_p)_p$  et  $(g_p)_p$  dans  $(K_2)_1$  telles que :

1.  $\|l - f_p \cdot g_p\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
2.  $\forall w \in K$ ,  $\|w \square g_p\| + \|f_p \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

o  $\square$  est relatif la paire  $(M'_{\alpha_1}, M_{\alpha_2})$ .

Preuve : On se donne une suite  $(w_p)_p$  dense dans  $K$  et une suite de rels positifs  $(\epsilon_p)_p \downarrow 0$ . Pour chaque  $p$ , on a en vertu de la proposition 6.11 l'existence d'lments  $\phi_p$  et  $\psi_p$  de  $(K_2)_1$  tels que  $\|l - \phi_p \cdot \psi_p\| < \epsilon_p$ <sup>6</sup>.

D'autre part il existe  $n_p$  tel que  $\|M'_{\alpha_1}{}^{n_p} w_j\| < \epsilon_p$   $j \leq p$ . On pose alors  $u_m = \overline{\alpha}_1^{-n_p} \alpha_2^m \phi_p$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et on vrifie par le lemme prcdent que  $\|w_j \square u_m\| < \epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ . ( $K_2$  tant rduisant,  $w_j \square u_m = P_{K_2} w_j \square u_m$  et le lemme s'applique).

De plus, en posant  $v_m = \overline{\alpha}_1^{-n_p} \alpha_2^m \psi_p$ , on a la factorisation approche  $\|l - u_m \cdot v_m\| < \epsilon_p$ .

Le lemme donne en outre l'existence d'un entier  $m_p$  tel que  $\|v_{m_p} \square w_j\| < \epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ .

---

<sup>6</sup>On peut remarquer que dans ce cas trs particulier, l'existence de  $\phi_p$  et  $\psi_p$  dcoule immdiatement de ce qui se passe en une variable. En effet pout tout  $z_1$  fix  $l(z_1, \cdot) \in L^1(\mathcal{T})$ . Pout tout  $\epsilon > 0$  on dfinit  $f(z) = \exp \left[ \int_{\mathcal{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log(l(z_1, \zeta) + \epsilon) d\zeta \right]$ . On a alors  $f \in H^1(\mathcal{D})$  et  $\lim_{r \rightarrow 1} |f(rz)| = l(z_1, z)$ . De plus  $z_2 \rightarrow \exp \left[ \int_{\mathcal{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log(l(z_1, \zeta) + \epsilon) d\zeta \right]$  est dans  $L^1(\Sigma_2)$ , ce qui assure le resultat.

On obtient finalement le resultat avec  $f_p = u_{m_p}$  et  $g_p = v_{m_p}$ , les conditions d'annulation s'tendant par l'argument de densit des  $(w_p)_p$ .  $\square$

**Proposition 6.18** *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions absolument continue de type Wold pure sur  $H$  et  $B = (B_1, B_2)$  son extention co-isometrique minimale rgulire sur  $K \supset H$  avec la dcomposition de type Wold :*

$$K = K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On suppose de plus ici que  $K_{SU} = \overline{P_{SU}H}$ .

Soit  $l \in L^1(\mathcal{T} \times \pm\epsilon)$ ,  $\|\downarrow\|_\infty \leq \infty$ .

Il existe deux suites  $(x_p)_p$  et  $(y_p)_p$  dans  $(H)_1$  telles que :

1.  $\|l - x_p \cdot y_p\|_{1_{p \rightarrow +\infty}} \rightarrow 0$ .
2.  $\forall w \in K, \|w \begin{smallmatrix} \mathbb{B} \\ \square \end{smallmatrix} y_p\| + \|x_p \begin{smallmatrix} \mathbb{B} \\ \square \end{smallmatrix} w\|_{p \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$ .
3.  $\|x_p - P_{SU}x_p\|_{p \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$ .
4.  $\|y_p - P_{SU}y_p\|_{p \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$ .

(ici "·" est relatif dilatation unitaire minimale rgulire de  $B$  qui est aussi la d.u.m.r. de  $T$ )  
En particulier on a alors  $[l] \in \mathcal{X}_0(T)$ .

Preuve : L'hypothse de densit permet d'aller chercher les vecteurs d'approximation dans  $H$  et la relation d'entrelacement  $P_{SU}T_2 = W_2P_{SU}$  assure le lien avec l'approximation fonctionnelle de la proposition 6.23.

Soient  $l \in L^1(\mathcal{T} \times \pm\epsilon)$ ,  $\|\downarrow\|_\infty \leq \infty$ ,  $(w_p)_p$  une suite dense dans  $K$  et  $(\epsilon_p)_p \downarrow 0$ .

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $f_p$  et  $g_p$  dans  $(K_2)_1$  tels que  $\|l - f_p \cdot g_p\|_1 < \epsilon_p$ .

On pose  $u_{n,m} = \overline{\alpha_1^n} \alpha_2^m f_p$  et  $v_{n,m} = \overline{\alpha_1^n} \alpha_2^m g_p$ . Comme dans le resultat prcdent, on fixe  $n_p$  tel que  $\|M'_{\alpha_1}{}^{n_p} w_j\| < \epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ .

Grce l'hypothse de densit  $K_{SU} = \overline{P_{SU}H}$ , on peut trouver  $a_0$  et  $b_0$  dans  $H$  tels que :

$$\|\overline{\alpha_1}{}^{n_p} f_p - P_{SU}a_0\| < \epsilon_p \quad \|P_{SU}a_0\| < 1$$

$$\|\overline{\alpha_1}{}^{n_p} g_p - P_{SU}b_0\| < \epsilon_p \quad \|P_{SU}b_0\| < 1$$

On pose alors  $a_m = T_2^m a_0$  et  $b_m = T_2^m b_0$  et on a :

$$\begin{aligned} \|u_{n_p,m} - P_{SU}a_m\| &= \|\alpha_2^m \overline{\alpha_1}{}^{n_p} f_p - P_{SU}T_2^m a_0\| \\ &= \|W_2^m (\overline{\alpha_1}{}^{n_p} f_p - P_{SU}a_0)\| < \epsilon_p \end{aligned}$$

De mme  $\|v_{n_p, m} - P_{SU} b_m\| < \epsilon_p$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|P_{SU} a_m\| &= \|V_2^{*m} P_{US} a_0\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \|P_{SU} b_m\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \\ \|P_{SS} a_m\| &= \|S_2^{*m} P_{SS} a_0\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \|P_{SS} b_m\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

On en dduit que sous l'hypothse  $K_{UU} = 0$ , on a pour  $m$  assez grand  $\|u_{n_p, m} - a_m\| < \epsilon_p$  et  $\|v_{n_p, m} - b_m\| < \epsilon_p$ .

Ceci donne pour  $m$  assez grand  $\|w_j \square v_{n_p, m}\| < \epsilon_p$  et  $\|w_j \square b_m\| < 2\epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ . De mme le choix de  $n_p$  au dbut permet de conclure  $\|a_m \square w_j\| < 2\epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ , avec  $m = m_p$  assez grand.

Finalement en posant  $x_p = a_{m_p}$  et  $y_p = b_{m_p}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\|l - x_p \cdot y_p\| &< \epsilon_p \\ \|x_p \square w_j\| + \|w_j \square y_p\| &< 4\epsilon_p \quad j = 1, \dots, p\end{aligned}$$

L'argument usuel de densit tend les rsultats d'annulations  $w \in H$ .  $\square$

### 6.5.3 analyse de la paire $B_{US}$ .

La paire  $B_{US} = (W_1, V_2^*)$  agit sur l'espace  $K_{US}$ . On note ici  $\Sigma_1$  le support borlien de  $W_1$  et on obtient de la mme faon que dans la partie precdente les rsultats suivants :

**Lemme 6.5** *Il existe un sous-espace  $\mathcal{N}$  de  $K_{US}$  qui est rduisant pour  $B_{US}$  et tel que  $B_{US|_{\mathcal{N}}}$  soit unitairement quivalent la paire  $(M_{\alpha_1}, M'_{\alpha_2})$  sur  $L^2 \overline{H}^2(\Sigma_1 \times \mathcal{T})$ .*

On obtient l aussi des conditions d'annulations automatiques dans  $K_1 = L^2 \overline{H}^2(\Sigma_1 \times \mathcal{T})$ .

**Lemme 6.6** *soient  $f \in K_1$  et  $u_{n, m} = \alpha_1^n \overline{\alpha_2}^m f$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

*Pour tout  $w \in K_1$ , on a :*

1.  $\|w \square u_{n, m}\| \leq \|M'_{\alpha_2}{}^m w\| \|f\|$ .
2.  $\forall m \in \mathbb{N} \quad \|u_{n, m} \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

*o  $\square$  est relatif la paire  $(M_{\alpha_1}, M'_{\alpha_2})$ .*

Ceci permet de donner des factorisations fonctionnelles comme prcdemment :

**Proposition 6.19** *Soit  $l \in (L^1(\Sigma_1 \times \mathcal{T}))_\infty$ .*

*Il existe des suites  $(f_p)_p$  et  $(g_p)_p$  dans  $(K_1)_1$  telles que :*

1.  $\|l - f_p \cdot g_p\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .



$$2. \forall w \in K, \|w \square g_p\| + \|f_p \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans le cas o on rajoute des hypothses de densit suffisantes, on peut rcuprer des vecteurs dans  $H$  pour factoriser et on obtient :

**Proposition 6.20** *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions de type Wold pure absolument continue sur  $H$  et  $B = (B_1, B_2)$  son extention co-isométrique minimale rgulire sur  $K \supset H$  :*

$$K = K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On suppose de plus ici que  $K_{US} = \overline{P_{US}H}$ .

Soit  $l \in L^1(\Sigma_1 \times \mathcal{T})$ ,  $\|\downarrow\|_\infty \leq \infty$ .

Il existe deux suites  $(x_p)_p$  et  $(y_p)_p$  dans  $(H)_1$  telles que :

1.  $\|l - x_p \cdot y_p\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
2.  $\forall w \in K, \|w \square y_p\| + \|x_p \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
3.  $\|x_p - P_{US}x_p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
4.  $\|y_p - P_{US}y_p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

(ici "." est relatif la d.u.m.r. de  $B$ )

En particulier on a alors  $[l] \in \mathcal{X}_0(T)$ .

#### 6.5.4 Approximation sous hypothse $E_{\theta, \gamma}^r$ :

On utilise ici ce qui prde pour mettre en place une approximation des lments du prdual de  $H^\infty$  sous l'hypothse  $E_{\theta, \gamma}^r$ , i.e.  $ecef(E_\theta^r) \supset \mathcal{Q}_\gamma$  avec  $\theta < \gamma$ .

Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions de type Wold sur  $H$  et  $B = (B_1, B_2)$  son extention co-isométrique minimale rgulire sur  $K \supset H$  avec la dcomposition de type Wold :

$$K = K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On dira que  $T$  vrifie l'hypothse  $(\mathcal{H})$  si on a simultanment  $\overline{P_{US}H} = K_{US}$ ,  $\overline{P_{SU}H} = K_{SU}$  et  $K_{UU} = 0$ .

Cette partie a pour but de dmontre le rsultat suivant :

**Théorème 6.12** *Soit  $T = (T_1, T_2) \in AAa(H)$  vrifiant  $(\mathcal{H})$ .*

*Supposons que  $T$  ait la proprit  $E_{\theta, \gamma}^r$  ( $\theta < \gamma$ ). Alors il existe  $\gamma' > 0$  tel que  $T$  ait la proprit  $X_{0, \gamma'}$ . ( $\gamma' = \dots$ ).*

On commence par un resultat qui permet d'amliorer une factorisation approche donne :

**Lemme 6.7** Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions qui double-commute sur  $H$  vrifiant  $(\mathcal{H})$  et qui possde la propri $t$   $E_{\theta, \gamma}^r$  ( $\theta < \gamma$ ).

Soient  $L \in \mathcal{Q}$ ,  $a, b \in H$ ,  $\delta > 0$  tels que

$$\|L - a \square b\| < \delta.$$

On se donne de plus  $\epsilon > 0$ ,  $w_1, \dots, w_p \in H$  et  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie.

Il existe alors  $a', b' \in H$  tels que :

- (1)  $\|L - a' \square b'\| < \frac{\theta}{\gamma} \delta$
- (2)  $\|a - a'\| \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$   $\|b - b'\| \leq \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$
- (3)  $\|(a' - a) \square w_k\| < \epsilon$   $\|w_k \square (b' - b)\| < \epsilon$   $k = 1, \dots, p$
- (4)  $a' - a \in \mathcal{F}^\perp$   $b' - b \in \mathcal{F}^\perp$

Preuve : On peut supposer que  $d := \|L - a \square b\| > 0$  et on choisit  $\epsilon < \frac{\theta}{\gamma}(\delta - d)$ .

Sous l'hypothse  $E_{\theta, \gamma}^r$ , il existe des suites  $(x_{n_i}^i)_{n_i}$  et  $(y_{n_i}^i)_{n_i}$  d'lments de  $(H)_1$  et des complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  tels que :

- (1)  $\|L - a \square b - \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{n_i}^i \square y_{n_i}^i\| < \epsilon + \frac{d\theta}{\gamma}$
- (2)  $\sum_{i=1}^N |\alpha_i| < \frac{d}{\gamma}$
- (3)  $\|x_{n_i}^i \square w\| \xrightarrow{n_i \rightarrow +\infty} 0$
- (4)  $y_{n_i}^i \xrightarrow{n_i \rightarrow +\infty} 0$

On pose alors  $\nu = (n_1, \dots, n_2) \in \mathbb{N}^N$  et

$$\mathfrak{R}_\nu = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{n_i}^i \square y_{n_i}^i$$

Il faut alors transformer une expression du type  $\Lambda_\nu = a \square b + \mathfrak{R}_\nu$ .

On utilise les espaces rduisants issus de la dcomposition de type Wold afin d'crire pour  $e \in \{US, SU, SS\}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu^e &= P_e a \square P_e b + \mathfrak{R}_\nu^e \\ \circ \quad \mathfrak{R}_\nu^e &= \sum_{i=1}^N \alpha_i P_e x_{n_i}^i \square P_e y_{n_i}^i \end{aligned}$$

On a alors  $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^{SS} + \Lambda_\nu^{US} + \Lambda_\nu^{SU}$ .

On notera de plus  $\mathfrak{R}_\nu^{SU} = [l_\nu^{SU}] \circ l_\nu^{SU} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{P}_{SU} x_{n_i}^i \cdot \mathbf{P}_{SU} y_{n_i}^i$  et  $\mathfrak{R}_\nu^{US} = [l_\nu^{US}] \circ l_\nu^{US} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{P}_{US} x_{n_i}^i \cdot \mathbf{P}_{US} y_{n_i}^i$ .

On pose  $x_\nu = \sum_{i=1}^N \beta_i x_{n_i}^i$  et  $y_\nu = \sum_{i=1}^N \beta_i y_{n_i}^i$  o  $\beta^2 = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Dans la suite on se donne des rels  $\tau, \tau' > 0$ .

On discutera en fin de dmonstration les conditions techniques qui permettent de faire en sorte que les perturbations des vecteurs restent dans  $\mathcal{F}^\perp$ . On notera ces conditions techniques additionnelles CTA tout au long de la dmonstration.

Il est possible de choisir  $\nu = (n_1, \dots, n_N)$  tel que :

$$\|x_\nu\|^2, \|y_\nu\|^2 < \frac{d}{\gamma} \quad (1)$$

Il suffit de rendre les produits  $(x_{n_i}^i | x_{n_i}^i)$  et  $(y_{n_i}^i | y_{n_i}^i)$  petits, ce qui est possible car  $x_{n_i}^i$  et  $y_{n_i}^i$  convergent faiblement vers 0.

$$\|\mathbf{P}_{SS} a \square \mathbf{P}_{SS} b + \mathfrak{R}_\nu^{SS} - \mathbf{P}_{SS}(a + x_\nu) \square \mathbf{P}_{SS}(b + y_\nu)\| < \tau \quad (2)$$

Il suffit de rendre petits simultanment :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \|\mathbf{P}_{SS} a \square \mathbf{P}_{SS} y_\nu\| \\ (b) \quad & \|\mathbf{P}_{SS} x_\nu \square \mathbf{P}_{SS} b\| \\ (c) \quad & \left\| \sum_{i \neq j} \beta_i \beta_j \mathbf{P}_{SS} x_{n_i}^i \square \mathbf{P}_{SS} y_{n_j}^j \right\| \end{aligned}$$

Pour (a) on utilise le (5) de de la proposition 6.5 avec  $y_\nu \rightarrow 0$  ; pour (b) on utilise l'hypothse  $\|x_{n_i}^i \square w\| \rightarrow 0$  lorsque  $n_i \rightarrow +\infty$  ; pour (c) on a le choix d'utiliser la mme technique qu'au (a) ou au (b).

En utilisant les mmes arguments on peut obtenir :

$$\|\mathbf{P}_{SU} x_\nu \square \mathbf{P}_{SU} b\| < \tau \text{ et } \|\mathbf{P}_{US} x_\nu \square \mathbf{P}_{US} b\| < \tau \quad (3)$$

et l'valuation suivante :

$$\|\mathbf{P}_{SS} y_\nu\|^2 \simeq \sum_{j=1}^N |\alpha_j| \|\mathbf{P}_{SS} y_{n_j}^j\|^2 < \frac{d}{\gamma} \quad (4)$$

(4) CTA

On utilise les deux sections prcdentes pour traiter  $\Lambda_\nu^{US}$  et  $\Lambda_\nu^{SU}$ . Pour  $\nu$  fix ralisant (1),(2),(3), et (4), il existe deux suites  $(c_n)_n$  et  $(d_n)_n$  dans  $H$ ,  $\|c_n\|, \|d_n\| \leq \|l_\nu^{SU}\|_1^{1/2}$  telles que :

$$\|l_\nu^{SU} - c_n \cdot d_n\| \rightarrow 0 \quad (6)$$

$$\|c_n \square w\| + \|w \square d_n\| \longrightarrow 0 \quad w \in H \quad (7)$$

$$\|c_n - P_{SU}c_n\| + \|d_n - P_{SU}d_n\| \longrightarrow 0 \quad (8)$$

Pour  $n = n_\nu$  assez grand, on pose  $c_\nu = c_{n_\nu}$  et  $d_\nu = d_{n_\nu}$ , ce qui permet d'écrire :

$$P_{SU}a \square P_{SU}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SU}(a + x_\nu) \square P_{SU}b \quad (9)$$

$$P_{SU}(a + x_\nu) \square P_{SU}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SU}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{SU}(b + d_\nu) \quad (10)$$

$$\|c_\nu\|, \|d_\nu\| \leq \|l_\nu^{SU}\|_1^{1/2} \quad (11)$$

$$\|c_\nu - P_{SU}c_\nu\| < \tau' \text{ et } \|d_\nu - P_{SU}d_\nu\| < \tau' \quad (12)$$

(13) CTA.

On peut alors écrire :

$$P_{US}a \square P_{US}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{US}(a + x_\nu) \square P_{US}b \quad (13)$$

Puis grâce (12) avec  $\tau'$  assez petit :

$$P_{US}(a + x_\nu) \square P_{US}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{US}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{US}(b + d_\nu) \quad (14)$$

On peut alors comme ci-avant et transformer les éléments relatifs  $K_{US}$ . Il existe  $c'_n$  et  $d'_n$  dans  $H$ ,  $\|c'_n\|, \|d'_n\| \leq \|l_\nu^{US}\|_1^{1/2}$  tels que :

$$\|l_\nu^{US} - c'_n \cdot d'_n\| \longrightarrow 0 \quad (15)$$

$$\|c'_n \square w\| + \|w \square d'_n\| \longrightarrow 0 \quad w \in H \quad (16)$$

$$\|c'_n - P_{US}c'_n\| + \|d'_n - P_{US}d'_n\| \longrightarrow 0 \quad (17)$$

Pour  $n$  assez grand on pose  $c_\nu = c_{n_\nu}$ ,  $c'_\nu = c'_{n_\nu}$ ,  $d_\nu = d_{n_\nu}$  et  $d'_\nu = d'_{n_\nu}$ , ce qui donne :

$$P_{US}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{US}(b + d_\nu) + [l_\nu^{US}] \stackrel{\tau}{\simeq} P_{US}(a + x_\nu + c_\nu + c'_\nu) \square P_{US}(b + d_\nu + d'_\nu) \quad (18)$$

$$\|c'_\nu\|, \|d'_\nu\| \leq \|l_\nu^{US}\|_1^{1/2} \quad (19)$$

$$\|c'_\nu - P_{US}c'_\nu\| < \tau' \text{ et } \|d'_\nu - P_{US}d'_\nu\| < \tau' \quad (20)$$

(19) CTA.

On a de plus en affinant le choix de  $\tau'$  et grâce (12), (18) et (4) :

$$P_{SS}(a + x_\nu) \square P_{SS}(b + y_\nu) \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SS}(a + x_\nu + c_\nu + c'_\nu) \square P_{SS}(b + y_\nu + d_\nu + d'_\nu) \quad (21)$$

De même en utilisant (18) on peut obtenir :

$$P_{SU}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{SU}(b + d_\nu) \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SU}(a + x_\nu + c_\nu + c'_\nu) \square P_{SU}(b + y_\nu + d_\nu + d'_\nu) \quad (22)$$

Finalement en posant  $a' = a + x_\nu + c_\nu + d_\nu$  et  $b' = b + P_H P_{SS} y_\nu + d_\nu + d'_\nu$ , on obtient :

$$\mathfrak{R}_\nu + a \square b \stackrel{8r}{\simeq} a' \square b' \quad (23)$$

Discussion des conditions techniques additionnelles CTA (8), (13), et (19) : si au dpart on s'est donn  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie et une collection  $w_1, \dots, w_p \in H$  ainsi que  $\epsilon > 0$ , on peut faire en sorte que :

$$\begin{cases} a' - a = x_\nu + c_\nu + c'_\nu \in \mathcal{F}^\perp \\ b' - b = P_H P_{SS} y_\nu + d_\nu + d'_\nu \in \mathcal{F}^\perp \end{cases}$$

En fait l'tape correspondante on a chaque suite de vecteurs qui tend faiblement vers 0 et, quitte passer une sous-suite, on peut donc supposer que l'on travaille dans  $\mathcal{F}^\perp$ .

De plus on peut chaque tape faire en sorte que :

$$\begin{cases} \|(a' - a) \square w_k\| < \epsilon & k = 1, \dots, p \\ \|w_k \square (b' - b)\| < \epsilon & k = 1, \dots, p \end{cases}$$

En effet :

- $\|x_\nu \square w_k\|$  peut tre rendu petit grce l'hypothse et la dfnition des ensembles  $\mathcal{E}_{\theta, \gamma}^r$ .
- $\|(c_\nu + c'_\nu) \square w_k\|$  et  $\|w_k \square (d_\nu + d'_\nu)\|$  sont contrls grce aux relations (7) et (17).
- $\|w_k \square P_{SS} y_\nu\|$  est rendu petit car  $y_\nu$  tend faiblement vers 0 et on vit sur la partie  $K_{SS}$

□

On obtient ensuite une version exacte de la proposition prcdente grce une itration de cette approximation :

**Proposition 6.21** *Soit  $T$  une paire de contractions qui double-commute et ayant la propriit ( $\mathcal{H}$ ).*

*Supposons que  $T$  possde la propriit  $E_{\theta, \gamma}^r$  pour  $\theta < \gamma$ .*

*Soient  $L \in \mathcal{Q}$ ,  $a, b \in H$ ,  $\delta > 0$  tels que  $\|L - a \square b\| < \delta$ .*

*On se donne de plus  $\epsilon > 0$ ,  $w_1, \dots, w_p \in H$  et  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie.*

*Il existe alors des vecteurs  $a', b' \in H$  tels que :*

$$(1) \quad L = a' \square b'$$

$$(2) \quad \|a' - a\| \leq \sqrt{\frac{2\delta}{\gamma - \theta}} \quad \|b' - b\| \leq \sqrt{\frac{\delta}{\gamma - \theta}}$$

$$(3) \quad (a' - a) \in \mathcal{F}^\perp \quad (b' - b) \in \mathcal{F}^\perp$$

$$(4) \quad \|(a' - a) \square w_k\| < \epsilon \quad \|w_k \square (b' - b)\| < \epsilon \quad k = 1, \dots, p$$

Preuve : Soient  $\epsilon > 0$  et  $(\epsilon_i)_i$  une suite de rels positifs vrifiant  $\sum \epsilon_i < \epsilon$ .

On pose  $a_1 = a$  et  $b_1 = b$ , puis on applique le lemme prcdent qui donne  $a_2, b_2 \in H$  tels que :

$$\begin{aligned} (i)_2 \quad & \|L - a_2 \square b_2\| < \frac{\theta}{\gamma} \delta \\ (ii)_2 \quad & \|a_1 - a_2\| \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \quad \|b_1 - b_2\| \leq \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \\ (iii)_2 \quad & \|(a_2 - a_1) \square w_k\| < \epsilon \quad \|w_k \square (b_2 - b_1)\| < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ (iv)_2 \quad & a_2 - a_1 \in \mathcal{F}^\perp \quad b_2 - b_1 \in \mathcal{F}^\perp \end{aligned}$$

Supposons alors que l'on ait trouv des vecteurs  $(a_i)_{i=1}^n$  et  $(b_i)_{i=1}^n$  vrifiant pour tout  $i \leq n$  :

$$\begin{aligned} (i)_i \quad & \|L - a_i \square b_i\| < \left(\frac{\theta}{\gamma}\right)^{i-1} \delta \\ (ii)_i \quad & \|a_{i-1} - a_i\| \leq \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \quad \|b_{i-1} - b_i\| \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \\ (iii)_i \quad & \|(a_i - a_{i-1}) \square w_k\| < \epsilon \quad \|w_k \square (b_i - b_{i-1})\| < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ (iv)_i \quad & a_i - a_{i-1} \in \mathcal{F}^\perp \quad b_i - b_{i-1} \in \mathcal{F}^\perp \end{aligned}$$

On rapplique le lemme qui permet alors de construire des vecteurs  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  convenables au rang  $n + 1$ .

Puisque  $\theta < \gamma$ , les suites  $(a_i)_i$  et  $(b_i)_i$  sont de Cauchy. On note  $a' = \lim_i a_i$  et  $b' = \lim_i b_i$ . Ceci permet de conclure :

$$\begin{aligned} L &= a' \square b' \\ \|a' - a\| &\leq \sqrt{2} \frac{\delta^{1/2}}{\gamma^{1/2} - \theta^{1/2}} \\ \|b' - b\| &\leq \frac{\delta^{1/2}}{\gamma^{1/2} - \theta^{1/2}} \\ \|(a' - a) \square w_k\| &\leq \sum \epsilon_i < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ \|w_k \square (b' - b)\| &\leq \sum \epsilon_i < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ a' - a &\in \mathcal{F}^\perp \quad b' - b \in \mathcal{F}^\perp \end{aligned}$$

□

On est alors en mesure de donner la preuve du thorme 6.13

Preuve : Soient  $(w_k)_k$  une suite dense dans  $K$  et  $(\epsilon_k)_k \downarrow 0$ . On conside  $L \in \mathcal{Q}_\infty$ ,  $\|L\| < \frac{\gamma\theta}{\sqrt{2}}$ .  
On applique la proposition prcdente avec comme donnees initiales  $a = b = 0$ , les  $p$  premiers vecteurs  $w_1, \dots, w_p$  et  $\epsilon = \epsilon_p$ .

On peut alors écrire  $L = a_p \square b_p$ , avec les contrles  $\|a_p\| \leq 2^{1/4}$  et  $\|b_p\| \leq 2^{-1/4}$ .

On pose  $a'_p = \frac{a_p}{2^{1/4}}$  et  $b'_p = 2^{1/4}b_p$ , ce qui donne  $L = a'_p \square b'_p$ .

On a de plus :

$$\|a'_p \square w_k\| < \epsilon_p \quad \forall k = 1, \dots, p$$

$$\|w_p \square b'_p\| < \epsilon_p \quad \forall k = 1, \dots, p$$

L'argument classique utilisant la densité de  $(w_k)_k$  permet alors de conclure.  $\square$

### 6.5.5 Cas des e.c.i.m. de type Wold pures.

Dans cette partie on considère une paire  $T = (T_1, T_2)$  de contractions sur  $H$  et  $B$  une extension co-isométrique sur  $K$ .

**Définition 6.7** *On dit que  $B$  est de type Wold si  $B$  admet une décomposition de type Wold. On dit que  $B$  est de plus pure si il n'y a pas de sous-espace de  $K$ , réduisant  $B$  en une paire d'opérateurs unitaires.*

Dans le cas décrit par la définition on écrit avec les notations introduites au chapitre ... :

$$K = K_{UU} \oplus K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (U_1, U_2) \oplus (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On note  $E = \{UU, US, SU, SS\}$  et pour tout  $e \in E$  on désigne par  $P_e$  la projection orthogonale de  $K$  sur l'espace correspondant  $K_e$ . De plus on désignera par  $P_H$  la projection orthogonale de  $K$  sur  $H$ .

Une paire de contractions de type Wold pure est automatiquement absolument continue (cf Th. 3.6). On note alors  $\Phi_T$  le calcul  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$  associé et  $\phi_T$  sont application adjointe :

$$\Phi_T : H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{A}_T \subset \mathcal{L}(H)$$

$$\phi_T : \mathcal{Q}_T \longrightarrow \mathcal{P}_\infty = L^1(\mathcal{T}^\epsilon)/H_0^1(\mathcal{T}^\epsilon)$$

**Proposition 6.22** *Soit  $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$  telle que  $\|x_n \square y\| \longrightarrow 0 \quad \forall y \in H$  alors on a :*

$$\|x_n \square z\| \longrightarrow 0 \quad \forall z \in K$$

$$\|P_M x_n \square z\| \longrightarrow 0 \quad \forall z \in K.$$

### 6.5.6 Analyse de la paire $B_{SU}$ .

La paire  $B_{SU} = (V_1^*, W_2)$  agit sur l'espace  $K_{SU} \subset K$ .

On note  $\Sigma_2$  le support borélien de  $W_2$  et  $\mathcal{L} = \text{Ker} V_1^*$ .

**Lemme 6.8** *Il existe un sous-espace  $\mathcal{M}$  de  $K_{SU}$  qui est rduisant pour  $B_{SU}$  et tel que  $B_{SU|\mathcal{M}}$  soit unitairement quivalent la paire  $(M'_{\alpha_1}, M_{\alpha_2})$  sur  $\overline{H}^2 L^2(\mathcal{T} \times \pm\epsilon)$ .*

Preuve : On a  $K_{SU} = \bigoplus_{n \geq 0} V_1^n \mathcal{L}$ .

De plus  $\mathcal{L} \in \text{LATRED}W_2$  car  $W_2$  et  $V_1$  double-commutent.

Soit  $\mathcal{A}_{W_2}$  l'algbre duale auto-adjointe engendre par  $W_2$ . Pour  $x \in \mathcal{L}$  on note  $\mathcal{R}_2 = \overline{\mathcal{A}_{W_2} x} \subset \mathcal{L}$ . Dans ce cas  $W_2|_{\mathcal{R}_2}$  est unitairement quivalent  $M_{\alpha_2}$  ; notons  $\Gamma : \mathcal{R}_2 \rightarrow L^2(\Sigma_2)$  l'oprateur unitaire ralisant cette quivalence.

On a alors un oprateur unitaire :

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{M} := \bigoplus_{n \geq 0} V_1^n \mathcal{R}_2 &\longrightarrow \overline{H}^2 L^2(\mathcal{T} \times \pm\epsilon) \\ \sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n} &\longrightarrow \sum_{n \geq 0} \overline{z_1}^n \Gamma(x_{1,n}) \end{aligned}$$

De plus  $A := V_1^* (\sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n}) = \sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n+1}$  et

$$\begin{aligned} \Theta(A) &= \sum_{n \geq 0} \overline{z_1}^n \Gamma(x_{1,n+1}) \\ &= M'_{\alpha_1} (\sum_{n \geq 0} \overline{z_1}^n \Gamma(x_{1,n})) \\ &= M'_{\alpha_1} \Theta(\sum_{n \geq 0} V_1^n x_{1,n}) \end{aligned}$$

D'o  $\Theta V_1^* = M'_{\alpha_1} \Theta$  ; de mme on a  $\Theta W_2 = M_{\alpha_2} \Theta$ .  $\square$

Les rsultats suivants mettent en vidence la factorisation des lments de  $L^1(\mathcal{T} \times \pm\epsilon)$  ainsi que certaines proprits d'annulation dans le prdual de  $H^\infty(\mathcal{T}^\epsilon)$ .

Dans la suite on notera  $K_2 = \overline{H}^2 L^2(\mathcal{T} \times \pm\epsilon)$ .

**Lemme 6.9** *Soient  $f \in K_2$  et  $u_{n,m} = \overline{\alpha_1}^n \alpha_2^m f$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

*Pour tout  $w \in K_2$ , on a :*

1.  $\|w \square u_{n,m}\| \leq \|M'_{\alpha_1}{}^n w\| \|f\|$  .
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_{n,m} \square w\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

*o  $\square$  est relatif la paire  $(M'_{\alpha_1}, M_{\alpha_2})$ .*



Preuve :

$$\begin{aligned}
\|w \square u_{n,m}\| &= \sup \{ |\langle u_{n,m} \square w | h \rangle|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&= \sup \{ |(\overline{\alpha}_1^{-n} \alpha_2^m f h | w)|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&= \sup \{ |(\alpha_2^m f h | \alpha_1^n w)|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&= \sup \{ |(\alpha_2^m f h | P_{K_2} \alpha_1^n w)|, h \in (H^\infty)_1 \} \\
&\leq \|M'_{\alpha_1}{}^n w\| \|f\|
\end{aligned}$$

D'autre part pour  $n$  fix, il existe  $(h_m)_m \subset H^\infty$ ,  $\|h_m\| = 1$  tels que :

$$\begin{aligned}
\|u_{n,m} \square w\| &= \langle u_{n,m} \square w | h_m \rangle \\
&= (\overline{\alpha}_1^{-n} \alpha_2^m f h_m | w) \\
&= (\overline{\alpha}_1^{-n} f (\alpha_2^m h_m) | w) \\
&= \langle \overline{\alpha}_1^{-n} f \square w | \alpha_2^m h_m \rangle.
\end{aligned}$$

Mais  $\alpha_2^m h_m \xrightarrow{f^*} 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ , d'o le rsultat.  $\square$

**Proposition 6.23** Soit  $l \in (L^1(\mathcal{T} \times \pm_\epsilon))_\infty$ .

Il existe des suites  $(f_p)_p$  et  $(g_p)_p$  dans  $(K_2)_1$  telles que :

1.  $\|l - f_p \cdot g_p\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
2.  $\forall w \in K$ ,  $\|w \square g_p\| + \|f_p \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

o  $\square$  est relatif la paire  $(M'_{\alpha_1}, M_{\alpha_2})$ .

Preuve : On se donne une suite  $(w_p)_p$  dense dans  $K$  et une suite de rels positifs  $(\epsilon_p)_p \downarrow 0$ . Pour chaque  $p$ , on a en vertu de la proposition 6.11 l'existence d'lments  $\phi_p$  et  $\psi_p$  de  $(K_2)_1$  tels que  $\|l - \phi_p \cdot \psi_p\| < \epsilon_p$ <sup>7</sup>.

D'autre part il existe  $n_p$  tel que  $\|M'_{\alpha_1}{}^{n_p} w_j\| < \epsilon_p$   $j \leq p$ . On pose alors  $u_m = \overline{\alpha}_1^{-n_p} \alpha_2^m \phi_p$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et on vrifie par le lemme prcdent que  $\|w_j \square u_m\| < \epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ . ( $K_2$  tant rduisant,  $w_j \square u_m = P_{K_2} w_j \square u_m$  et le lemme s'applique).

De plus, en posant  $v_m = \overline{\alpha}_1^{-n_p} \alpha_2^m \psi_p$ , on a la factorisation approche  $\|l - u_m \cdot v_m\| < \epsilon_p$ .

Le lemme donne en outre l'existence d'un entier  $m_p$  tel que  $\|v_{m_p} \square w_j\| < \epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ .

---

<sup>7</sup>On peut remarquer que dans ce cas trs particulier, l'existence de  $\phi_p$  et  $\psi_p$  dcoule immdiatement de ce qui se passe en une variable. En effet pout tout  $z_1$  fix  $l(z_1, \cdot) \in L^1(\mathcal{T})$ . Pout tout  $\epsilon > 0$  on dfinit  $f(z) = \exp \left[ \int_{\mathcal{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log(l(z_1, \zeta) + \epsilon) d\zeta \right]$ . On a alors  $f \in H^1(\mathcal{D})$  et  $\lim_{r \rightarrow 1} |f(rz)| = l(z_1, z)$ . De plus  $z_2 \rightarrow \exp \left[ \int_{\mathcal{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log(l(z_1, \zeta) + \epsilon) d\zeta \right]$  est dans  $L^1(\Sigma_2)$ , ce qui assure le resultat.

On obtient finalement le resultat avec  $f_p = u_{m_p}$  et  $g_p = v_{m_p}$ , les conditions d'annulation s'tendant par l'argument de densit des  $(w_p)_p$ .  $\square$

**Proposition 6.24** *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions absolument continue de type Wold pure sur  $H$  et  $B = (B_1, B_2)$  son extention co-isometrique minimale rgulire sur  $K \supset H$  avec la dcomposition de type Wold :*

$$K = K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On suppose de plus ici que  $K_{SU} = \overline{P_{SU}H}$ .

Soit  $l \in L^1(\mathcal{T} \times \pm\epsilon)$ ,  $\|\downarrow\|_\infty \leq \infty$ .

Il existe deux suites  $(x_p)_p$  et  $(y_p)_p$  dans  $(H)_1$  telles que :

1.  $\|l - x_p \cdot y_p\|_{1_{p \rightarrow +\infty}} \rightarrow 0$ .
2.  $\forall w \in K, \|w \begin{smallmatrix} \mathbb{B} \\ \square \\ \mathbb{B} \end{smallmatrix} y_p\| + \|x_p \begin{smallmatrix} \mathbb{B} \\ \square \\ \mathbb{B} \end{smallmatrix} w\|_{p \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$ .
3.  $\|x_p - P_{SU}x_p\|_{p \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$ .
4.  $\|y_p - P_{SU}y_p\|_{p \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$ .

(ici "·" est relatif dilatation unitaire minimale rgulire de  $B$  qui est aussi la d.u.m.r. de  $T$ )  
En particulier on a alors  $[l] \in \mathcal{X}_0(T)$ .

Preuve : L'hypothse de densit permet d'aller chercher les vecteurs d'approximation dans  $H$  et la relation d'entrelacement  $P_{SU}T_2 = W_2P_{SU}$  assure le lien avec l'approximation fonctionnelle de la proposition 6.23.

Soient  $l \in L^1(\mathcal{T} \times \pm\epsilon)$ ,  $\|\downarrow\|_\infty \leq \infty$ ,  $(w_p)_p$  une suite dense dans  $K$  et  $(\epsilon_p)_p \downarrow 0$ .

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $f_p$  et  $g_p$  dans  $(K_2)_1$  tels que  $\|l - f_p \cdot g_p\|_1 < \epsilon_p$ .

On pose  $u_{n,m} = \overline{\alpha_1^n} \alpha_2^m f_p$  et  $v_{n,m} = \overline{\alpha_1^n} \alpha_2^m g_p$ . Comme dans le resultat prcdent, on fixe  $n_p$  tel que  $\|M'_{\alpha_1}{}^{n_p} w_j\| < \epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ .

Grce l'hypothse de densit  $K_{SU} = \overline{P_{SU}H}$ , on peut trouver  $a_0$  et  $b_0$  dans  $H$  tels que :

$$\|\overline{\alpha_1}{}^{n_p} f_p - P_{SU}a_0\| < \epsilon_p \quad \|P_{SU}a_0\| < 1$$

$$\|\overline{\alpha_1}{}^{n_p} g_p - P_{SU}b_0\| < \epsilon_p \quad \|P_{SU}b_0\| < 1$$

On pose alors  $a_m = T_2^m a_0$  et  $b_m = T_2^m b_0$  et on a :

$$\begin{aligned} \|u_{n_p,m} - P_{SU}a_m\| &= \|\alpha_2^m \overline{\alpha_1}{}^{n_p} f_p - P_{SU}T_2^m a_0\| \\ &= \|W_2^m(\overline{\alpha_1}{}^{n_p} f_p - P_{SU}a_0)\| < \epsilon_p \end{aligned}$$

De mme  $\|v_{n_p, m} - P_{SU} b_m\| < \epsilon_p$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|P_{SU} a_m\| &= \|V_2^{*m} P_{US} a_0\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \|P_{SU} b_m\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \\ \|P_{SS} a_m\| &= \|S_2^{*m} P_{SS} a_0\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \|P_{SS} b_m\| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

On en dduit que sous l'hypothse  $K_{UU} = 0$ , on a pour  $m$  assez grand  $\|u_{n_p, m} - a_m\| < \epsilon_p$  et  $\|v_{n_p, m} - b_m\| < \epsilon_p$ .

Ceci donne pour  $m$  assez grand  $\|w_j \square v_{n_p, m}\| < \epsilon_p$  et  $\|w_j \square b_m\| < 2\epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ . De mme le choix de  $n_p$  au dbut permet de conclure  $\|a_m \square w_j\| < 2\epsilon_p$   $j = 1, \dots, p$ , avec  $m = m_p$  assez grand.

Finalement en posant  $x_p = a_{m_p}$  et  $y_p = b_{m_p}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\|l - x_p \cdot y_p\| &< \epsilon_p \\ \|x_p \square w_j\| + \|w_j \square y_p\| &< 4\epsilon_p \quad j = 1, \dots, p\end{aligned}$$

L'argument usuel de densit tend les rsultats d'annulations  $w \in H$ .  $\square$

### 6.5.7 analyse de la paire $B_{US}$ .

La paire  $B_{US} = (W_1, V_2^*)$  agit sur l'espace  $K_{US}$ . On note ici  $\Sigma_1$  le support borlien de  $W_1$  et on obtient de la mme faon que dans la partie prcdente les rsultats suivants :

**Lemme 6.10** *Il existe un sous-espace  $\mathcal{N}$  de  $K_{US}$  qui est rduisant pour  $B_{US}$  et tel que  $B_{US|_{\mathcal{N}}}$  soit unitairement quivalent la paire  $(M_{\alpha_1}, M'_{\alpha_2})$  sur  $L^2 \overline{H}^2(\Sigma_1 \times \mathcal{T})$ .*

On obtient l aussi des conditions d'annulations automatiques dans  $K_1 = L^2 \overline{H}^2(\Sigma_1 \times \mathcal{T})$ .

**Lemme 6.11** *soient  $f \in K_1$  et  $u_{n, m} = \alpha_1^n \overline{\alpha_2}^m f$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

*Pour tout  $w \in K_1$ , on a :*

1.  $\|w \square u_{n, m}\| \leq \|M'_{\alpha_2}{}^m w\| \|f\|$ .
2.  $\forall m \in \mathbb{N} \quad \|u_{n, m} \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

*o  $\square$  est relatif la paire  $(M_{\alpha_1}, M'_{\alpha_2})$ .*

Ceci permet de donner des factorisations fonctionnelles comme prcdemment :

**Proposition 6.25** *Soit  $l \in (L^1(\Sigma_1 \times \mathcal{T}))_\infty$ .*

*Il existe des suites  $(f_p)_p$  et  $(g_p)_p$  dans  $(K_1)_1$  telles que :*

1.  $\|l - f_p \cdot g_p\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

$$2. \forall w \in K, \|w \square g_p\| + \|f_p \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans le cas o on rajoute des hypothses de densit suffisantes, on peut rcuprer des vecteurs dans  $H$  pour factoriser et on obtient :

**Proposition 6.26** *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions de type Wold pure absolument continue sur  $H$  et  $B = (B_1, B_2)$  son extention co-isométrique minimale rgulire sur  $K \supset H$  :*

$$K = K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On suppose de plus ici que  $K_{US} = \overline{P_{US}H}$ .

Soit  $l \in L^1(\Sigma_1 \times \mathcal{T})$ ,  $\|l\|_\infty \leq \infty$ .

Il existe deux suites  $(x_p)_p$  et  $(y_p)_p$  dans  $(H)_1$  telles que :

1.  $\|l - x_p \cdot y_p\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
2.  $\forall w \in K, \|w \square y_p\| + \|x_p \square w\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
3.  $\|x_p - P_{US}x_p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .
4.  $\|y_p - P_{US}y_p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

(ici "." est relatif la d.u.m.r. de  $B$ )

En particulier on a alors  $[l] \in \mathcal{X}_0(T)$ .

### 6.5.8 Approximation sous hypothse $E_{\theta, \gamma}^r$ :

On utilise ici ce qui prde pour mettre en place une approximation des lments du prdual de  $H^\infty$  sous l'hypothse  $E_{\theta, \gamma}^r$ , i.e.  $ecef(E_\theta^r) \supset \mathcal{Q}_\gamma$  avec  $\theta < \gamma$ .

Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions de type Wold sur  $H$  et  $B = (B_1, B_2)$  son extention co-isométrique minimale rgulire sur  $K \supset H$  avec la dcomposition de type Wold :

$$K = K_{US} \oplus K_{SU} \oplus K_{SS}$$

$$B = (W_1, V_2^*) \oplus (V_1^*, W_2) \oplus (S_1^*, S_2^*).$$

On dira que  $T$  vrifie l'hypothse  $(\mathcal{H})$  si on a simultanment  $\overline{P_{US}H} = K_{US}$ ,  $\overline{P_{SU}H} = K_{SU}$  et  $K_{UU} = 0$ .

Cette partie a pour but de dmontre le rsultat suivant :

**Théorème 6.13** *Soit  $T = (T_1, T_2) \in AAa(H)$  vrifiant  $(\mathcal{H})$ .*

*Supposons que  $T$  ait la proprit  $E_{\theta, \gamma}^r$  ( $\theta < \gamma$ ). Alors il existe  $\gamma' > 0$  tel que  $T$  ait la proprit  $X_{0, \gamma'}$ . ( $\gamma' = \dots$ ).*

On commence par un resultat qui permet d'amliorer une factorisation approche donne :

**Lemme 6.12** *Soit  $T = (T_1, T_2)$  une paire de contractions qui double-commute sur  $H$  vrifiant  $(\mathcal{H})$  et qui possde la propriete  $E_{\theta, \gamma}^r$  ( $\theta < \gamma$ ).*

*Soient  $L \in \mathcal{Q}$ ,  $a, b \in H$ ,  $\delta > 0$  tels que*

$$\|L - a \square b\| < \delta.$$

*On se donne de plus  $\epsilon > 0$ ,  $w_1, \dots, w_p \in H$  et  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie.*

*Il existe alors  $a', b' \in H$  tels que :*

- (1)  $\|L - a' \square b'\| < \frac{\theta}{\gamma} \delta$
- (2)  $\|a - a'\| \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$   $\|b - b'\| \leq \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$
- (3)  $\|(a' - a) \square w_k\| < \epsilon$   $\|w_k \square (b' - b)\| < \epsilon$   $k = 1, \dots, p$
- (4)  $a' - a \in \mathcal{F}^\perp$   $b' - b \in \mathcal{F}^\perp$

Preuve : On peut supposer que  $d := \|L - a \square b\| > 0$  et on choisit  $\epsilon < \frac{\theta}{\gamma}(\delta - d)$ .

Sous l'hypothese  $E_{\theta, \gamma}^r$ , il existe des suites  $(x_{n_i}^i)_{n_i}$  et  $(y_{n_i}^i)_{n_i}$  d'lements de  $(H)_1$  et des complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  tels que :

- (1)  $\|L - a \square b - \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{n_i}^i \square y_{n_i}^i\| < \epsilon + \frac{d\theta}{\gamma}$
- (2)  $\sum_{i=1}^N |\alpha_i| < \frac{d}{\gamma}$
- (3)  $\|x_{n_i}^i \square w\| \xrightarrow{n_i \rightarrow +\infty} 0$
- (4)  $y_{n_i}^i \xrightarrow{n_i \rightarrow +\infty} 0$

On pose alors  $\nu = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$  et

$$\mathfrak{R}_\nu = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_{n_i}^i \square y_{n_i}^i$$

Il faut alors transformer une expression du type  $\Lambda_\nu = a \square b + \mathfrak{R}_\nu$ .

On utilise les espaces rduisants issus de la dcomposition de type Wold afin d'crire pour  $e \in \{US, SU, SS\}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu^e &= P_e a \square P_e b + \mathfrak{R}_\nu^e \\ \text{o } \mathfrak{R}_\nu^e &= \sum_{i=1}^N \alpha_i P_e x_{n_i}^i \square P_e y_{n_i}^i \end{aligned}$$

On a alors  $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^{SS} + \Lambda_\nu^{US} + \Lambda_\nu^{SU}$ .

On notera de plus  $\mathfrak{R}_\nu^{SU} = [l_\nu^{SU}] \circ l_\nu^{SU} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{P}_{SU} x_{n_i}^i \cdot \mathbf{P}_{SU} y_{n_i}^i$  et  $\mathfrak{R}_\nu^{US} = [l_\nu^{US}] \circ l_\nu^{US} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{P}_{US} x_{n_i}^i \cdot \mathbf{P}_{US} y_{n_i}^i$ .

On pose  $x_\nu = \sum_{i=1}^N \beta_i x_{n_i}^i$  et  $y_\nu = \sum_{i=1}^N \beta_i y_{n_i}^i$  o  $\beta^2 = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Dans la suite on se donne des rels  $\tau, \tau' > 0$ .

On discutera en fin de dmonstration les conditions techniques qui permettent de faire en sorte que les perturbations des vecteurs restent dans  $\mathcal{F}^\perp$ . On notera ces conditions techniques additionnelles CTA tout au long de la dmonstration.

Il est possible de choisir  $\nu = (n_1, \dots, n_N)$  tel que :

$$\|x_\nu\|^2, \|y_\nu\|^2 < \frac{d}{\gamma} \quad (24)$$

Il suffit de rendre les produits  $(x_{n_i}^i | x_{n_i}^i)$  et  $(y_{n_i}^i | y_{n_i}^i)$  petits, ce qui est possible car  $x_{n_i}^i$  et  $y_{n_i}^i$  convergent faiblement vers 0.

$$\|\mathbf{P}_{SS} a \square \mathbf{P}_{SS} b + \mathfrak{R}_\nu^{SS} - \mathbf{P}_{SS}(a + x_\nu) \square \mathbf{P}_{SS}(b + y_\nu)\| < \tau \quad (25)$$

Il suffit de rendre petits simultanment :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \|\mathbf{P}_{SS} a \square \mathbf{P}_{SS} y_\nu\| \\ (b) \quad & \|\mathbf{P}_{SS} x_\nu \square \mathbf{P}_{SS} b\| \\ (c) \quad & \left\| \sum_{i \neq j} \beta_i \beta_j \mathbf{P}_{SS} x_{n_i}^i \square \mathbf{P}_{SS} y_{n_j}^j \right\| \end{aligned}$$

Pour (a) on utilise le (5) de de la proposition 6.5 avec  $y_\nu \rightarrow 0$  ; pour (b) on utilise l'hypothse  $\|x_{n_i}^i \square w\| \rightarrow 0$  lorsque  $n_i \rightarrow +\infty$  ; pour (c) on a le choix d'utiliser la mme technique qu'au (a) ou au (b).

En utilisant les mmes arguments on peut obtenir :

$$\|\mathbf{P}_{SU} x_\nu \square \mathbf{P}_{SU} b\| < \tau \text{ et } \|\mathbf{P}_{US} x_\nu \square \mathbf{P}_{US} b\| < \tau \quad (26)$$

et l'valuation suivante :

$$\|\mathbf{P}_{SS} y_\nu\|^2 \stackrel{\tau}{\simeq} \sum_{j=1}^N |\alpha_j| \|\mathbf{P}_{SS} y_{n_j}^j\|^2 < \frac{d}{\gamma} \quad (27)$$

(4) CTA

On utilise les deux sections prcdentes pour traiter  $\Lambda_\nu^{US}$  et  $\Lambda_\nu^{SU}$ . Pour  $\nu$  fix ralisant (1),(2),(3), et (4), il existe deux suites  $(c_n)_n$  et  $(d_n)_n$  dans  $H$ ,  $\|c_n\|, \|d_n\| \leq \|l_\nu^{SU}\|_1^{1/2}$  telles que :

$$\|l_\nu^{SU} - c_n \cdot d_n\| \rightarrow 0 \quad (29)$$

$$\|c_n \square w\| + \|w \square d_n\| \longrightarrow 0 \quad w \in H \quad (30)$$

$$\|c_n - P_{SU}c_n\| + \|d_n - P_{SU}d_n\| \longrightarrow 0 \quad (31)$$

Pour  $n = n_\nu$  assez grand, on pose  $c_\nu = c_{n_\nu}$  et  $d_\nu = d_{n_\nu}$ , ce qui permet d'écrire :

$$P_{SU}a \square P_{SU}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SU}(a + x_\nu) \square P_{SU}b \quad (32)$$

$$P_{SU}(a + x_\nu) \square P_{SU}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SU}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{SU}(b + d_\nu) \quad (33)$$

$$\|c_\nu\|, \|d_\nu\| \leq \|l_\nu^{SU}\|_1^{1/2} \quad (34)$$

$$\|c_\nu - P_{SU}c_\nu\| < \tau' \text{ et } \|d_\nu - P_{SU}d_\nu\| < \tau' \quad (35)$$

(13) CTA.

On peut alors écrire :

$$P_{US}a \square P_{US}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{US}(a + x_\nu) \square P_{US}b \quad (36)$$

Puis grâce (12) avec  $\tau'$  assez petit :

$$P_{US}(a + x_\nu) \square P_{US}b \stackrel{\tau}{\simeq} P_{US}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{US}(b + d_\nu) \quad (37)$$

On peut alors comme ci-avant et transformer les éléments relatifs  $K_{US}$ . Il existe  $c'_n$  et  $d'_n$  dans  $H$ ,  $\|c'_n\|, \|d'_n\| \leq \|l_\nu^{US}\|_1^{1/2}$  tels que :

$$\|l_\nu^{US} - c'_n \cdot d'_n\| \longrightarrow 0 \quad (38)$$

$$\|c'_n \square w\| + \|w \square d'_n\| \longrightarrow 0 \quad w \in H \quad (39)$$

$$\|c'_n - P_{US}c'_n\| + \|d'_n - P_{US}d'_n\| \longrightarrow 0 \quad (40)$$

Pour  $n$  assez grand on pose  $c_\nu = c_{n_\nu}$ ,  $c'_\nu = c'_{n_\nu}$ ,  $d_\nu = d_{n_\nu}$  et  $d'_\nu = d'_{n_\nu}$ , ce qui donne :

$$P_{US}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{US}(b + d_\nu) + [l_\nu^{US}] \stackrel{\tau}{\simeq} P_{US}(a + x_\nu + c_\nu + c'_\nu) \square P_{US}(b + d_\nu + d'_\nu) \quad (41)$$

$$\|c'_\nu\|, \|d'_\nu\| \leq \|l_\nu^{US}\|_1^{1/2} \quad (42)$$

$$\|c'_\nu - P_{US}c'_\nu\| < \tau' \text{ et } \|d'_\nu - P_{US}d'_\nu\| < \tau' \quad (43)$$

(19) CTA.

On a de plus en affinant le choix de  $\tau'$  et grâce (12), (18) et (4) :

$$P_{SS}(a + x_\nu) \square P_{SS}(b + y_\nu) \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SS}(a + x_\nu + c_\nu + c'_\nu) \square P_{SS}(b + y_\nu + d_\nu + d'_\nu) \quad (44)$$

De même en utilisant (18) on peut obtenir :

$$P_{SU}(a + x_\nu + c_\nu) \square P_{SU}(b + d_\nu) \stackrel{\tau}{\simeq} P_{SU}(a + x_\nu + c_\nu + c'_\nu) \square P_{SU}(b + y_\nu + d_\nu + d'_\nu) \quad (45)$$

Finalement en posant  $a' = a + x_\nu + c_\nu + d_\nu$  et  $b' = b + P_H P_{SS} y_\nu + d_\nu + d'_\nu$ , on obtient :

$$\mathfrak{R}_\nu + a \square b \stackrel{8r}{\simeq} a' \square b' \quad (46)$$

Discussion des conditions techniques additionnelles CTA (8), (13), et (19) : si au dpart on s'est donn  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie et une collection  $w_1, \dots, w_p \in H$  ainsi que  $\epsilon > 0$ , on peut faire en sorte que :

$$\begin{cases} a' - a = x_\nu + c_\nu + c'_\nu \in \mathcal{F}^\perp \\ b' - b = P_H P_{SS} y_\nu + d_\nu + d'_\nu \in \mathcal{F}^\perp \end{cases}$$

En fait l'tape correspondante on a chaque suite de vecteurs qui tend faiblement vers 0 et, quitte passer une sous-suite, on peut donc supposer que l'on travaille dans  $\mathcal{F}^\perp$ .

De plus on peut chaque tape faire en sorte que :

$$\begin{cases} \|(a' - a) \square w_k\| < \epsilon & k = 1, \dots, p \\ \|w_k \square (b' - b)\| < \epsilon & k = 1, \dots, p \end{cases}$$

En effet :

- $\|x_\nu \square w_k\|$  peut tre rendu petit grce l'hypothse et la dfnition des ensembles  $\mathcal{E}_{\theta, \gamma}^r$ .
- $\|(c_\nu + c'_\nu) \square w_k\|$  et  $\|w_k \square (d_\nu + d'_\nu)\|$  sont contrls grce aux relations (7) et (17).
- $\|w_k \square P_{SS} y_\nu\|$  est rendu petit car  $y_\nu$  tend faiblement vers 0 et on vit sur la partie  $K_{SS}$

□

On obtient ensuite une version exacte de la proposition prcdente grce une itration de cette approximation :

**Proposition 6.27** *Soit  $T$  une paire de contractions qui double-commute et ayant la propriit ( $\mathcal{H}$ ).*

*Supposons que  $T$  possde la propriit  $E_{\theta, \gamma}^r$  pour  $\theta < \gamma$ .*

*Soient  $L \in \mathcal{Q}$ ,  $a, b \in H$ ,  $\delta > 0$  tels que  $\|L - a \square b\| < \delta$ .*

*On se donne de plus  $\epsilon > 0$ ,  $w_1, \dots, w_p \in H$  et  $\mathcal{F}$  un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie.*

*Il existe alors des vecteurs  $a', b' \in H$  tels que :*

$$(1) \quad L = a' \square b'$$

$$(2) \quad \|a' - a\| \leq \sqrt{\frac{2\delta}{\gamma - \theta}} \quad \|b' - b\| \leq \sqrt{\frac{\delta}{\gamma - \theta}}$$

$$(3) \quad (a' - a) \in \mathcal{F}^\perp \quad (b' - b) \in \mathcal{F}^\perp$$

$$(4) \quad \|(a' - a) \square w_k\| < \epsilon \quad \|w_k \square (b' - b)\| < \epsilon \quad k = 1, \dots, p$$



Preuve : Soient  $\epsilon > 0$  et  $(\epsilon_i)_i$  une suite de rels positifs vrifiant  $\sum \epsilon_i < \epsilon$ .

On pose  $a_1 = a$  et  $b_1 = b$ , puis on applique le lemme prcdent qui donne  $a_2, b_2 \in H$  tels que :

$$\begin{aligned} (i)_2 \quad & \|L - a_2 \square b_2\| < \frac{\theta}{\gamma} \delta \\ (ii)_2 \quad & \|a_1 - a_2\| \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \quad \|b_1 - b_2\| \leq \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \\ (iii)_2 \quad & \|(a_2 - a_1) \square w_k\| < \epsilon \quad \|w_k \square (b_2 - b_1)\| < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ (iv)_2 \quad & a_2 - a_1 \in \mathcal{F}^\perp \quad b_2 - b_1 \in \mathcal{F}^\perp \end{aligned}$$

Supposons alors que l'on ait trouv des vecteurs  $(a_i)_{i=1}^n$  et  $(b_i)_{i=1}^n$  vrifiant pour tout  $i \leq n$  :

$$\begin{aligned} (i)_i \quad & \|L - a_i \square b_i\| < \left(\frac{\theta}{\gamma}\right)^{i-1} \delta \\ (ii)_i \quad & \|a_{i-1} - a_i\| \leq \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \quad \|b_{i-1} - b_i\| \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{i-1}{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \\ (iii)_i \quad & \|(a_i - a_{i-1}) \square w_k\| < \epsilon \quad \|w_k \square (b_i - b_{i-1})\| < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ (iv)_i \quad & a_i - a_{i-1} \in \mathcal{F}^\perp \quad b_i - b_{i-1} \in \mathcal{F}^\perp \end{aligned}$$

On rapplique le lemme qui permet alors de construire des vecteurs  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  convenables au rang  $n + 1$ .

Puisque  $\theta < \gamma$ , les suites  $(a_i)_i$  et  $(b_i)_i$  sont de Cauchy. On note  $a' = \lim_i a_i$  et  $b' = \lim_i b_i$ . Ceci permet de conclure :

$$\begin{aligned} L &= a' \square b' \\ \|a' - a\| &\leq \sqrt{2} \frac{\delta^{1/2}}{\gamma^{1/2} - \theta^{1/2}} \\ \|b' - b\| &\leq \frac{\delta^{1/2}}{\gamma^{1/2} - \theta^{1/2}} \\ \|(a' - a) \square w_k\| &\leq \sum \epsilon_i < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ \|w_k \square (b' - b)\| &\leq \sum \epsilon_i < \epsilon \quad k = 1, \dots, p \\ a' - a &\in \mathcal{F}^\perp \quad b' - b \in \mathcal{F}^\perp \end{aligned}$$

□

On est alors en mesure de donner la preuve du thorme 6.13

Preuve : Soient  $(w_k)_k$  une suite dense dans  $K$  et  $(\epsilon_k)_k \downarrow 0$ . On conside  $L \in \mathcal{Q}_\infty$ ,  $\|L\| < \frac{\gamma\theta}{\sqrt{2}}$ .  
On applique la proposition prcdente avec comme donnees initiales  $a = b = 0$ , les  $p$  premiers vecteurs  $w_1, \dots, w_p$  et  $\epsilon = \epsilon_p$ .

On peut alors écrire  $L = a_p \square b_p$ , avec les contrles  $\|a_p\| \leq 2^{1/4}$  et  $\|b_p\| \leq 2^{-1/4}$ .

On pose  $a'_p = \frac{a_p}{2^{1/4}}$  et  $b'_p = 2^{1/4}b_p$ , ce qui donne  $L = a'_p \square b'_p$ .

On a de plus :

$$\|a'_p \square w_k\| < \epsilon_p \quad \forall k = 1, \dots, p$$

$$\|w_p \square b'_p\| < \epsilon_p \quad \forall k = 1, \dots, p$$

L'argument classique utilisant la densité de  $(w_k)_k$  permet alors de conclure.  $\square$

## References

- [1] E. Albrecht and B. Chevreau. *Invariant subspaces for certain representations of  $H^\infty(G)$ , in *Funct. Analysis*. Pietsch, Ruess, Vogt, Dekker, 1990.*
- [2] E. Albrecht and M. Ptak. Invariant subspaces for doubly commuting contractions. Contractions with rich taylor spectrum. *J. Operator Theory*, 12:12, 1990.
- [3] E. Albrecht and F.-H. Vasilescu. Semi-fredholm complexes. *Operator theory: advances and applications*, 11, 1983.
- [4] C.G. Ambrozie. On fredholm index in banach spaces. *Integral equation operator theory*, 25:1–34, 1996.
- [5] H. Bercovici and W. S. Li. Isometric functional calculus on the bidisk and invariant subspaces. *Bull. London Math. Soc.*, 25:582–590, 1993.
- [6] H. Bercovici and D. Westwood. The factorization of functions in the polydisc. *Houston J. Math.*, 18:1–6, 1992.
- [7] Briem, Davie, and Øksendal. A functional calculus for pairs of commuting contractions. *J. London Math. Soc.*, 2:709–718, 1973.
- [8] B. Chevreau, G. Exner, and C. Pearcy. On the structure of contraction operators III. *Michigan Math. J.*, 36:29–62, 1989.
- [9] R. E. Curto. Fredholm and invertible n-tuples of operators. The deformation problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 266:129–159, 1981.
- [10] R.G. Douglas, P.S. Muhly, and C. Pearcy. Lifting commuting operators. *Jour of func. anal.*, 114(2):385–395, 1969.
- [11] W. Gamelin, T. *Uniform algebras*. Chelsea Publishing Compagny, 1984.

- [12] D. Gaspar and N. Suciú. *On Wold decomposition of isometric semigroups, functional analysis and approximation*. Proceedings of the conference held at the Mathematical institute at Oberwolfach, Black Forest., 1983.
- [13] D. Gaspar and N. Suciú. On the structure of isometric semigroups. *Operator theory : advances and applications*, 14:125–139, 1984.
- [14] B.D. Khanh. Les A-mesures sur le tore de deux dimensions et le calcul de deux contractions permutables. *Journal of functional analysis*, 15:33–44, 1974.
- [15] M. Kosiek. Decomposition and spectral properties of operator representations of the algebra  $R(K_1 \times K_2)$ . *Bulletin de l'académie polonaise des sciences*, 27:577–582, 1979.
- [16] M. Kosiek. A decomposition of operator representations of the algebra  $R(K_1 \times K_2)$ . *Zeszyty naukowe uniwersytetu jagiellonskiego*, 20:89–94, 1979.
- [17] M. Kosiek. Lebesgue-type decomposition of a pair of commuting Hilbert space operators. *Bulletin de l'académie polonaise des sciences*, 27:583–589, 1979.
- [18] M. Kosiek. Representation generated by a finite number of Hilbert space operators. *Annales polonici mathematici*, 44:309–315, 1984.
- [19] M. Kosiek, A. Octavio, and M. Ptak. On the reflexivity of pairs of contraction. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123:1229–1236, 1995.
- [20] M. Kosiek and M. Ptak. Reflexivity of N-tuples of contractions with rich joint left essential spectrum. *Integral Equation and Operator Theory*, 13:395–420, 1990.
- [21] A. Octavio. Coisometric extension and functional calculus for pairs of commuting contractions. *J. Operator Theory*, 114(2):497–503, 1992.
- [22] S. Parrot. Unitary dilations for commuting contractions. *Pacific Journal of Mathematics*, 34:481–490, 1970.
- [23] R. Rudin. *Function Theory in Polydiscs*. Mathematics Lecture Note Series, 1969.
- [24] M. Słocinski. Isometric dilation of doubly commuting contractions. *Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences*, XXV:1233–1243, 1977.
- [25] M. Słocinski. Wold-type decomposition. *Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences*, 1:11–13, 1980.
- [26] B. Sz-Nagy and C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. North Holland, Amsterdam, 1970.

- [27] J. L. Taylor. A joint spectrum for several commuting operators. *Journal of Functional Analysis*, 6:172–191, 1970.
- [28] F.-H. Vasilescu. Stability of the index of a complex of Banach spaces. *Journal of operator theory*, 2:247–275, 1979.